

Уравнение для $\Phi(\eta)$ принимает вид

$$\frac{2m}{m+1} \Phi'^2 - \Phi \Phi'' = \frac{2m}{m+1} + \Phi''',$$

или если обозначить $2m/(m+1) = \beta$, то

$$\Phi''' + \Phi \Phi'' = \beta(\Phi'^2 - 1).$$

Это уравнение численно проинтегрировано ¹⁾ при указанных выше граничных условиях для ряда значений параметра β ; для функции $\Phi'(\eta, \beta)$ составлены таблицы, по которым можно построить соответствующие профили скорости.

§ 15. Приближенный расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой среде. Метод Кочина — Лойцянского

Рассмотрим плоское, установившееся движение несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое при произвольном распределении скорости $U(x)$ в потенциальном потоке, окружающем пограничный слой.

Задача об определении движения в этих условиях не решена точно до настоящего времени. Существует, однако, ряд приближенных методов ее решения. Наиболее простые и практически пригодные из них базируются на уравнении импульсов (7.9).

Сущность этих методов заключается в том, что приближенно задается распределение скоростей по сечению пограничного слоя (например, в виде полинома или тригонометрической суммы) или используются профили скорости, полученные в результате точного решения уравнений пограничного слоя для некоторых частных случаев $U(x)$ (см. предыдущий параграф). Уравнение импульсов позволяет тогда определить толщину слоя или толщину потери импульса; затем по закону Ньютона можно найти распределение касательных напряжений вдоль контура тела, а следовательно, и положение точки отрыва слоя ($\tau_0 = 0$).

Имея в виду воспользоваться уравнением импульсов, преобразуем его к наиболее удобному в данном случае виду. По закону Ньютона

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0};$$

так как v_x имеет ту же размерность, что и U , а y — ту же размерность, что и толщина потери импульса δ , то касательное напряжение можно выразить через U и δ следующим образом:

$$\tau_0 = \mu \frac{U}{\delta} \zeta,$$

где ζ есть некоторый безразмерный коэффициент.

Подставляя последнее выражение в уравнение импульсов (7.9), получим:

$$\frac{d\delta}{dx} + \frac{U'\delta}{U} \left(2 + \frac{\delta_*}{\delta} \right) = \frac{\nu \zeta}{U\delta},$$

или

$$\frac{U}{2\nu} \frac{d\delta^2}{dx} + \frac{U'\delta^2}{\nu} \left(2 + \frac{\delta_*}{\delta} \right) = \zeta.$$

Введем обозначения

$$f = \frac{U'\delta^2}{\nu}, \quad \frac{\delta_*}{\delta} = H$$

¹⁾ Hartree D. R., Proceed. Cambridge Philos. Soc., v. 33, 1937.

и примем за искомую величину в уравнении импульсов вместо δ безразмерный параметр f . Вычислим $d\delta^2/dx$; так как $\delta^2 = f\sqrt{U'}$, то

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \sqrt{\frac{fU' - U''f}{U^2}}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение импульсов, получим:

$$\frac{U}{U'^2} (fU' - U''f) + 2f(2 + H) = 2\zeta,$$

откуда

$$f = 2 \frac{U}{U'} [\zeta - f(2 + H)] + \frac{U''}{U'} f.$$

Если обозначить

$$F = 2[\zeta - f(2 + H)],$$

то уравнение импульсов примет следующий вид:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} F + \frac{U''}{U'} f. \quad (7.48)$$

Н. Е. Кочин и Л. Г. Лойцянский предложили¹⁾ приближенный метод решения этого уравнения, применимый при любом распределении скорости U вдоль контура тела. Этот метод основан на использовании точного решения уравнений пограничного слоя (7.4), относящегося к случаю, когда скорость в потенциальном потоке распределена вдоль контура тела по степенному закону:

$$U = cx^m.$$

В предыдущем параграфе было показано, что в этом случае профиль продольной составляющей скорости в сечении пограничного слоя определяется формулой

$$v_x = U\Phi'(\eta),$$

где

$$\eta = y \left[\frac{c(m+1)}{2\nu} \right]^{1/2} x^{(m-1)/2} = y \left(\frac{m+1}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{U'}{\nu} \right)^{1/2},$$

а $\Phi'(\eta)$ есть производная по η от функции $\Phi(\eta)$, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' = \frac{2m}{m+1} (\Phi'^2 - 1) \quad (7.49)$$

и граничным условиям: при $\eta = 0$ $\Phi = \Phi' = 0$; при $\eta = \infty$ $\Phi' = 1$.

Таким образом, имеется семейство профилей скорости, зависящее от одного параметра m или, что все равно, параметра

$$\beta = \frac{2m}{m+1}.$$

Зная уравнение этого семейства

$$\Phi' = \Phi'(\eta, \beta),$$

можно вычислить для него характерные толщины пограничного слоя δ_* и δ и величину ζ , характеризующую касательное напряжение. Все эти величины,

¹⁾ Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г., Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя, Доклады Академии наук СССР, т. XXXVI, № 9, 1942; см. также Лойцянский Л. Г., Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя на крыле, Доклады Академии наук СССР, т. XXXV, № 8, 1942.

а следовательно, и величины f и F в уравнении (7.48) будут функциями параметра β .

Предположим теперь, что при произвольном $U(x)$ характерные толщины слоя и касательное напряжение на контуре тела зависят, так же как и в случае $U = cx^m$, только от одного параметра β , причем эта зависимость такая же, как и при $U = cx^m$. Но в отличие от степенного распределения скорости U параметр β при произвольном $U(x)$ не будет постоянной величиной вдоль контура тела; он будет изменяться при изменении x в соответствии с уравнением импульсов (7.48), в котором $f = f(\beta)$ и $F = F(\beta)$. Практически оказывается более целесообразным принять за искомый параметр не β , а f .

Вычислим, исходя из указанного предположения, величины, входящие в уравнение (7.48). Толщина вытеснения в случае асимптотического слоя равна

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \left(\frac{\beta v}{U}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta.$$

Толщина потери импульса в этом случае равна

$$\vartheta = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) \frac{v_x}{U} dy = \left(\frac{\beta v}{U}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \Phi'(\eta, \beta) [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta.$$

Отношение этих толщин равно

$$H = \frac{\delta_*}{\vartheta} = \frac{\int_0^{\infty} [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta}{\int_0^{\infty} \Phi'(\eta, \beta) [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta}.$$

Величина ζ определится из соотношения

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\tau_0}{\mu} \frac{\vartheta}{U} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{\vartheta}{U} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \left(\frac{U'}{\beta v}\right)^{1/2} \frac{\vartheta}{U} = \\ &= \Phi''(\eta, \beta)_{\eta=0} \int_0^{\infty} \Phi'(\eta, \beta) [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta. \end{aligned}$$

Искомый параметр f также можно выразить через β

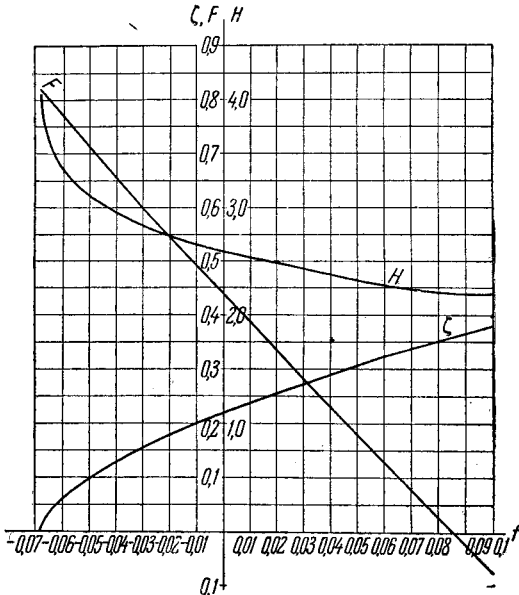
$$f = \frac{U' \vartheta^2}{v} = \beta \left\{ \int_0^{\infty} \Phi'(\eta, \beta) [1 - \Phi'(\eta, \beta)] d\eta \right\}^2.$$

Функция $\Phi(\eta, \beta)$ получена путем численного интегрирования уравнения (7.49); кроме того, составлены таблицы для $\Phi'(\eta, \beta)$ и $\Phi''(\eta, \beta)$. С помощью этих таблиц по последним формулам вычислены значения $\vartheta (U'/\beta v)^{1/2}$, $\delta_* (U'/\beta v)^{1/2}$, H , ζ , f , а также значения функции F , входящей в уравнение импульсов. Эти значения при разных β приведены в табл. 7. Обычно параметр f монотонно убывает вдоль контура тела от значения f_0 до значения $f_{отр}$.

По данным таблицы построен график, изображающий зависимость F , ζ и H от f (рис. 7.45). График показывает, что зависимость F от f весьма близка к линейной. Этим обстоятельством можно воспользоваться для того,

Таблица 7

β	$\delta_* \left(\frac{\beta v}{U'} \right)^{-1/2}$	$\vartheta \left(\frac{\beta v}{U'} \right)^{-1/2}$	$\Phi''(0, \beta)$	f	$\zeta(f)$	$H(f)$	$F(f)$
-0,1988	2,359	0,585	0,0000	-0,0681	0,000	4,03	0,821
-0,19	2,007	0,577	0,0860	-0,06	0,064	3,35	0,772
-0,18	1,871	0,568	0,1285	-0,05	0,098	3,12	0,715
-0,16	1,708	0,552	0,1905	-0,04	0,130	2,96	0,658
-0,14	1,597	0,539	0,2395	-0,03	0,155	2,84	0,602
-0,10	1,444	0,515	0,3191	-0,02	0,178	2,74	0,548
-0,00	1,217	0,470	0,4696	-0,01	0,200	2,66	0,495
0,10	1,080	0,435	0,5870	0,00	0,221	2,59	0,441
0,20	0,984	0,408	0,6869	0,01	0,240	2,53	0,388
0,30	0,911	0,386	0,7748	0,02	0,257	2,48	0,336
0,40	0,853	0,367	0,8542	0,03	0,274	2,43	0,283
0,50	0,804	0,350	0,9277	0,04	0,291	2,38	0,232
0,60	0,764	0,336	0,996	0,05	0,307	2,34	0,180
0,80	0,699	0,312	1,120	0,06	0,323	2,30	0,130
1,00	0,648	0,292	1,2326	0,07	0,338	2,26	0,078
1,20	0,607	0,276	1,336	0,08	0,352	2,23	0,028
1,60	0,544	0,250	1,521	0,09	0,366	2,20	-0,023
2,00	0,498	0,231	1,687	0,10	0,380	2,18	-0,074

Рис. 7.45. Зависимость F , ζ и H от параметра f .

чтобы заменить точное, но, вообще говоря, нелинейное уравнение (7.48) приближенным линейным уравнением. Положим приближенно $F = a - bf$; если выбрать $a = 0,45$, $b = 5,35$, то оказывается, что отклонение линейной зависимости F от f от точной не превышает $0,03 a$.

Подставляя в уравнение (7.48) вместо F его приближенное выражение, получим:

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{U''}{U'} - b \frac{U''}{U} \right) f + a \frac{U'}{U}.$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрируя его и подставляя вместо a и b указанные выше численные значения, будем иметь:

$$f = \frac{0,45U'}{U^{5,35}} \int_0^x U^{4,35} dx.$$

Точность этой формулы оказывается вполне достаточной для практических целей. Определив по этой формуле f как функцию x , можно затем с помощью таблицы найти характерные для слоя толщины δ_* и δ , касательные напряжения τ_0 и место отрыва слоя; все эти величины определяются теперь как функции x .

Следует заметить, что весь расчет можно было бы провести аналогичным образом, используя другие семейства точных решений уравнений пограничного слоя. Например, можно было бы воспользоваться точным решением для семейства линейных распределений скорости в потенциальном потоке: $U = b \cdot x + c$. В предыдущем параграфе было установлено, что в этом случае профили скоростей в пограничном слое определяются формулой

$$v_x = U\Phi(y, b).$$

Они зависят от одного параметра b , который при произвольном распределении U вдоль контура тела можно считать функцией x и приближенно определить $b(x)$ из уравнения импульсов аналогично тому, как это было сделано выше для $\beta(x)$.

На использовании профилей скорости в пограничном слое для случая линейного изменения U вдоль контура построен так называемый метод Хоуэрза¹⁾. Для приближенного расчета пограничного слоя с помощью уравнения импульсов можно также задать профиль скорости в слое в виде полинома или в виде тригонометрических функций. Однако все же наиболее простым и вместе с тем наиболее точным является изложенный выше метод Кочина—Лойцянского.

§ 16. Переход в пограничном слое криволинейной поверхности ламинарного движения в турбулентное

Переход от ламинарного течения в пограничном слое к турбулентному происходит в общем случае криволинейной поверхности в том же порядке, что и для плоской пластинки. Вблизи передней критической точки всегда имеет место ламинарное движение в слое; за ламинарным участком расположен переходный и далее по потоку — участок турбулентного пограничного слоя. Обычно переход-

¹⁾ Howarth L., On the solution of the laminar boundary layer equations, *Proceed. Royal Soc., ser. A*, № 919, 1938.