

§ 18. Приближенный расчет турбулентного пограничного слоя в несжимаемой среде с помощью степенного и логарифмического законов распределения скоростей

Движение жидкости в турбулентном пограничном слое криволинейной поверхности весьма сложно. На распределение скоростей и касательных напряжений в турбулентной части слоя влияют многие обстоятельства, в том числе продольный градиент давления, число Рейнольдса, наличие ламинарного участка слоя перед турбулентным, наличие ламинарного «подслоя» и т. п.

До настоящего времени еще не разработана теория турбулентного пограничного слоя, которая учитывала бы все эти особенности его. Имеются лишь приближенные полуэмпирические методы расчета, каждый из которых основан на дополнительных (к обычным в теории пограничного слоя) допущениях и гипотезах.

Для расчета турбулентного пограничного слоя обычно применяется уравнение импульсов вместе с соотношениями, устанавливающими распределение скоростей по сечению слоя и закон для касательных напряжений.

Наиболее простой метод расчета основан на предположении, что продольная скорость распределена в сечении слоя по степенному закону (7.24)

$$v_x = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^n;$$

для касательного напряжения на поверхности тела тогда получается формула (7.25)

$$\tau_0 = \xi \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{U \delta}{\nu} \right)^{-m},$$

где $m = 2n/(n + 1)$.

Уравнение импульсов удобнее всего использовать в безразмерной форме (7.10). Вычислим по формулам для степенного закона распределения скоростей величины H и ϑ , входящие в уравнение (7.10); для этого найдем предварительно δ_* и ϑ :

$$\delta_* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) dy = \delta \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \right] d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \frac{n}{n+1} \delta,$$

$$\vartheta = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) dy = \delta \int_0^1 \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^n \right] d \left(\frac{y}{\delta} \right) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \delta.$$

Для H получается теперь выражение

$$H = \frac{\delta_*}{\vartheta} = 1 + 2n.$$

Величину ψ можно с помощью формулы для ϑ выразить через R_ϑ

$$\psi = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{2} \xi \left(\frac{U\vartheta}{\nu} \right)^{-m} = \frac{1}{2} \xi \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right]^{-m} \left(\frac{U\vartheta}{\nu} \right)^{-m};$$

если обозначить

$$\frac{1}{2} \xi \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{n} \right]^{-m} = \zeta,$$

то получится:

$$\psi = \zeta \frac{1}{R_\vartheta^m}.$$

Коэффициент ζ и показатель степени m в последней формуле полностью определяются, если заданы значения n и ξ ; для быстрого

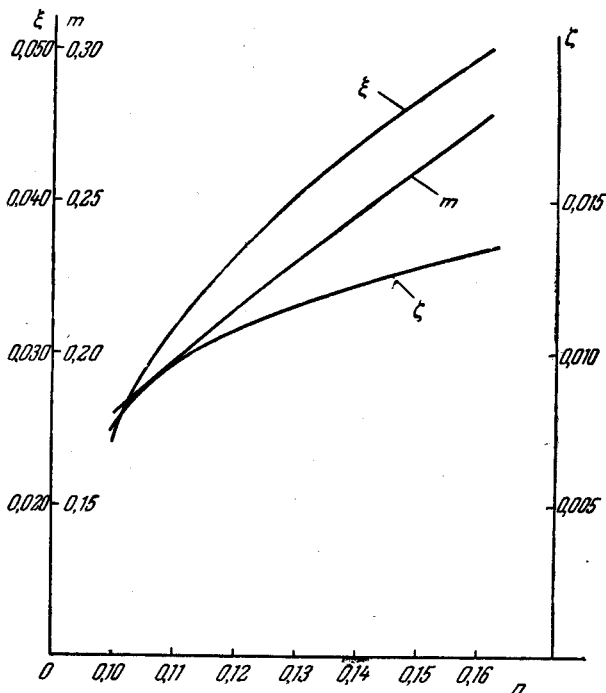


Рис. 7.52. Зависимость ξ , ζ и m от показателя степени n в формуле для степенного закона распределения скоростей. Величина ξ вычислена по результатам опытов Никурадзе для гладких труб.

определения ζ и m мы приводим график (рис. 7.52) зависимости этих величин от n (значения ξ , соответствующие взятым n , определялись при этом по данным опытов Никурадзе, изображенным на рис. 7.13).

Уравнение (7.10) теперь принимает вид

$$R_{\vartheta}^m \frac{dR_{\vartheta}}{d\chi} = \frac{\zeta}{K} - 2(1+n)R_{\vartheta}^{1+m}$$

или

$$\frac{d(R_{\vartheta})^{1+m}}{d\chi} + 2(1+n)(1+m)R_{\vartheta}^{1+m} = \frac{\zeta(1+m)}{K}.$$

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением относительно R_{ϑ}^{1+m} ; интегрируя его, находим:

$$R_{\vartheta}^{1+m} = e^{-2(1+n)(1+m)\chi} \left[\int \frac{\zeta(1+m)}{K} e^{2(1+n)(1+m)\chi} d\chi + C \right].$$

Подставим вместо χ и K их выражения через скорость U на внешней границе слоя (см. § 5)

$$\chi = \ln \frac{U}{V}, \quad K = \frac{U^2}{V^2}; \quad (7.51)$$

тогда получим:

$$R_{\vartheta}^{1+m} = \left(\frac{U}{V}\right)^{-2(1+3n)} \left[\frac{2(1+3n)}{1+n} \zeta R \int \left(\frac{U}{V}\right)^{3(1+2n)} d\left(\frac{x}{L}\right) + C \right],$$

где $R = VL/\nu$. Постоянную интегрирования C определим из условия, которое должно соблюдаться в точке перехода ламинарного движения в слое в турбулентное; для того чтобы сила трения была распределена непрерывно вдоль контура тела, толщина потери импульса в точке перехода также должна быть непрерывной, т.е. при $x = x_{\text{кр}}$ $\vartheta = \vartheta_{\text{лам}}$. Формула для R_{ϑ} тогда примет вид

$$R_{\vartheta}^{1+m} = \left(\frac{U}{V}\right)^{-2(1+3n)} \left[\frac{2(1+3n)}{1+n} \zeta R \int_{x_{\text{кр}}/L}^{x/L} \left(\frac{U}{V}\right)^{3(1+2n)} d\left(\frac{x}{L}\right) \right] + R_{\vartheta_{\text{лам}}}^{1+m}.$$

Определив по этой формуле R_{ϑ} как функцию x/L , можно затем вычислить δ , ψ , τ_0 и сопротивление тела трению. Таким образом, расчет турбулентного пограничного слоя с помощью степенного закона распределения скорости не представляет никаких принципиальных затруднений.

Для удобообтекаемых тел (точнее, для тел, обтекаемых без отрыва пограничного слоя) результаты расчета по степенному закону обычно дают удовлетворительное совпадение с экспериментальными значениями толщины слоя и касательного напряжения. Однако следует иметь в виду, что расчет этот является грубо приближенным и в силу самой природы степенного закона не может отразить существенных особенностей движения жидкости в пограничном слое криволинейной поверхности.

Степенной закон, как уже указывалось в гл. VI, не является универсальным законом, т.е. пригодным для всех чисел Рейнольдса, при которых имеет место турбулентное движение. В условиях погра-

ничного слоя, где число Рейнольдса R_δ есть величина, переменная вдоль контура тела, это означает, что при применении степенного закона необходимо считать n и ξ также переменными вдоль контура (во всяком случае разными на разных участках контура). Однако обычно этого не делают для того, чтобы не усложнять излишне расчет. Можно отчасти обойти этот недостаток удачным выбором значений n и ξ , пригодных для всей области чисел Рейнольдса, встречающихся в том или ином конкретном случае.

Гораздо более существенными оказываются другие недостатки степенного закона. Действительный профиль скорости в пограничном слое криволинейной поверхности в разных сечениях разный вследствие влияния продольного градиента давления. В передней части тела давление вдоль контура убывает и частицы в пограничном слое движутся ускоренно, в задней части давление вдоль контура нарастает и частицы движутся замедленно. Этой особенности пограничного слоя криволинейной поверхности степенной закон не отражает, так как он был выведен для неускоренного движения жидкости по трубе за разгонным участком. Поэтому он не может дать правильной картины движения в ускоренном или замедленном пограничном слое.

Вследствие указанного недостатка невозможно определить при степенном законе распределения скоростей местоположение точки отрыва слоя. Отрыв пограничного слоя является, как известно, результатом тормозящего действия градиента давления, а этого именно обстоятельства степенной закон не учитывает.

Степенной закон, кроме того, непригоден для ламинарного «подслоя». В самом деле, по степенному закону получается, что

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U}{\delta} n \left(\frac{y}{\delta} \right)^{n-1},$$

и так как $n < 1$, то при $y=0$ $\partial v_x / \partial y = \infty$; следовательно, касательное напряжение получается по закону Ньютона бесконечно большим. В действительности же градиенты скорости на поверхности тела при турбулентном пограничном слое не равны бесконечности, хотя и значительно больше, чем при ламинарном. Некоторое представление об этом можно составить себе по рис. 7.53, на котором изображено распределение скоростей в ряде сечений пограничного слоя крыла, полученное в результате измерений микротрубками полного давления и поверхностными трубками.

В сечениях на передней части крыла (приблизительно до 0,25 хорды) распределение скоростей соответствует ламинарному движению по всей толщине слоя; во всех дальнейших сечениях распределение скоростей является типичным для турбулентного движения в слое. По кривым, соответствующим турбулентной части слоя, отчетливо видно, что вблизи $y=0$ профиль скоростей резко изменяется. Это место является как раз границей ламинарного «подслоя». Степенной закон дает с известной степенью приближения лишь внешнюю

к ламинарному «подслою» часть профиля распределения скоростей в пограничном слое, для внутренней же части он непригоден.

Можно устранить один из перечисленных недостатков расчета по степенному закону (именно его неуниверсальность для всех чисел

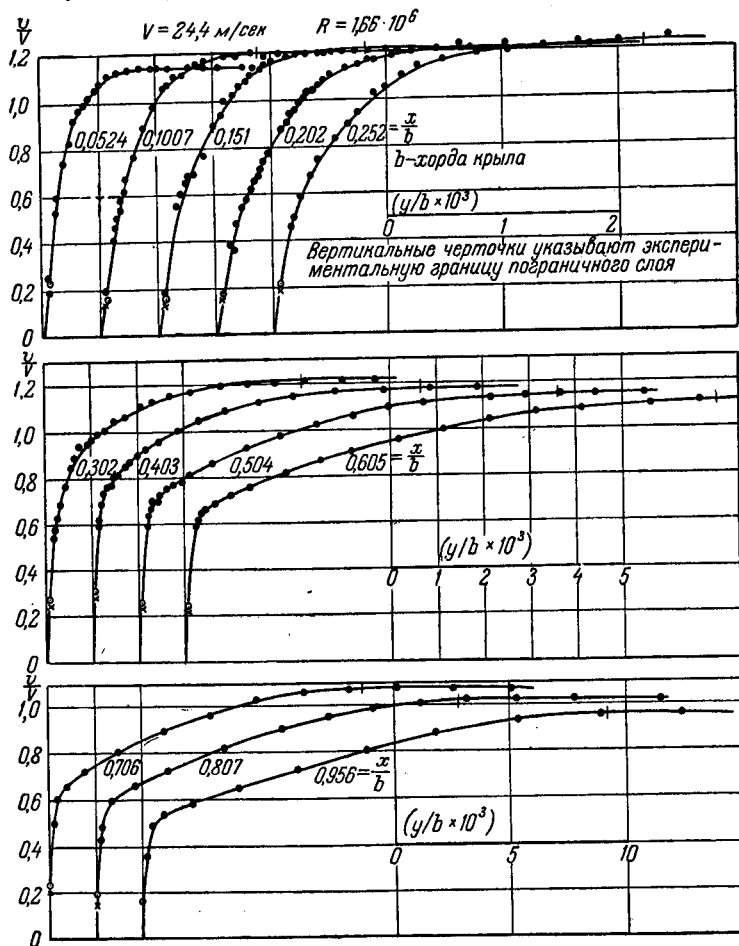


Рис. 7.53. Распределение скоростей в ряде сечений пограничного слоя крыла. (Обозначения: b — хорда профиля; x — абсцисса сечения, отсчитываемая от носовой точки профиля вдоль его хорды; y — ордината точки в пограничном слое).

Рейнольдса), если предположить, что продольная составляющая скорости распределена в сечении слоя по логарифмическому закону¹⁾.

¹⁾ Гуржиенко Г. А., Применение универсального логарифмического закона распределения скоростей к изучению пограничного слоя и лобового сопротивления хорошо обтекаемых тел при больших числах Рейнольдса,

Однако вычисления при этом становятся несколько более сложными, нежели при использовании степенного закона.

Мы изложим применение логарифмического закона распределения скоростей в наиболее простом виде и вместе с тем без некоторых излишних предположений, которые обычно при этом вводятся.

Запишем логарифмический закон распределения скоростей в виде равенства (7.27)

$$v_x = U + \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}.$$

Вычислим, исходя из этой формулы, характерные толщины слоя δ_* и ϑ и величины, входящие в уравнение импульсов (7.10):

$$\begin{aligned} \delta_* &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = -\delta \frac{v_*}{\kappa U} \int_0^1 \ln \left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= -\frac{v_* \delta}{\kappa U} \left[\left(\frac{y}{\delta}\right) \ln \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \Big|_0^1 = \frac{v_* \delta}{\kappa U}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \int_0^{\delta} \frac{v_*}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = -\delta \int_0^1 \left[1 + \frac{v_*}{\kappa U} \ln \left(\frac{y}{\delta}\right)\right] \frac{v_*}{\kappa U} \ln \left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= \frac{v_* \delta}{\kappa U} \left[1 - \frac{v_*}{\kappa U} \int_0^1 \ln^2 \left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]; \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^1 \ln^2 \left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2,$$

то окончательно находим:

$$\vartheta = \frac{v_* \delta}{\kappa U} \left[1 - 2 \frac{v_*}{\kappa U}\right].$$

Таким образом,

$$H = \frac{\delta_*}{\vartheta} = \frac{1}{1 - 2 \frac{v_*}{\kappa U}}.$$

Здесь удобно, так же как и в случае плоской пластинки, принять v_* или другую величину, непосредственно с ней связанную, за искомую. Для того чтобы выразить δ через v_* , воспользуемся формулой (7.25), в которой представим константу в виде $\ln C$:

$$\ln C \frac{\delta v_*}{\nu} = \kappa \frac{U}{v_*}.$$

Введя обозначение, которое уже применялось ранее для плоской пластинки, а именно $xU/v_* = z$, сможем выразить все величины через единственную неизвестную z :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\nu z e^z}{C x U}, & v_* &= \frac{x U}{z}, & \psi &= \frac{x^2}{z^2}, \\ \delta_* &= \frac{\nu e^z}{C x U}, & \vartheta &= \frac{\nu e^z}{C x U} \left(1 - \frac{2}{z}\right), & H &= \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

Уравнение импульсов (7.10) теперь примет вид

$$\frac{d}{d\chi} \left[\frac{e^z}{C x} \left(1 - \frac{2}{z}\right) \right] = \frac{x^2}{K z^2} - \frac{e^z}{C x} \left(1 - \frac{2}{z}\right) \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}\right).$$

Это уравнение неудобно для интегрирования в общем виде. Его можно значительно упростить и привести к линейному дифференциальному уравнению, если предположить, что H есть величина постоянная вдоль контура тела. Для тел, обтекаемых несжимаемой средой без отрыва пограничного слоя, это предположение весьма близко к действительности; в частности, при степенном законе распределения скоростей $H = 1 + 2n$, и, следовательно, если $n = \text{const}$, то и $H = \text{const}$. Так как

$$1 - \frac{2}{z} = \frac{1}{H},$$

то, включая множитель $1 - 2/z$ в постоянную величину C и обозначая $\frac{C x}{1 - 2/z}$ через C_1 , получим уравнение импульсов в следующем виде:

$$e^z z^2 \frac{dz}{d\chi} = \frac{C_1 x^2}{K} - (1 + H) e^z z^2.$$

Примем произведение $e^z z^2$ за новую искомую функцию, которую обозначим через Z :

$$Z = e^z z^2; \quad (7.53)$$

тогда будем иметь:

$$dZ = (e^z z^2 + 2ze^z) dz = e^z z^2 \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz = Z \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz.$$

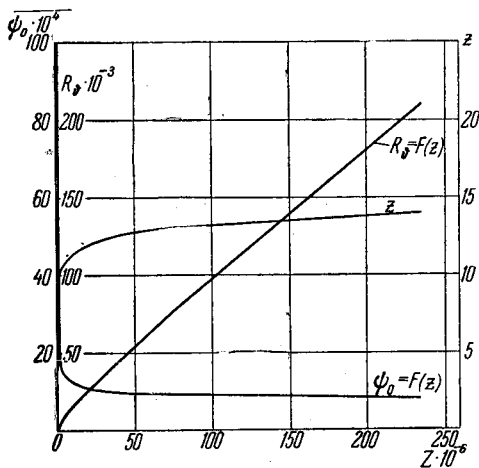


Рис. 7.54. Расчетные графики зависимостей z , R_δ и ψ от z .

Но так как

$$1 + \frac{2}{z} = 2 - \frac{1}{H},$$

то

$$dz = \frac{dZ}{Z} \frac{1}{2 - \frac{1}{H}},$$

и для Z получается следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dZ}{d\chi} + (1 + H) \left(2 - \frac{1}{H}\right) Z = C_1 x^2 \left(2 - \frac{1}{H}\right) \frac{1}{K}.$$

Интегрируя его, находим:

$$Z = e^{-(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)\chi} \left[C_1 x^2 \left(2 - \frac{1}{H}\right) \int \frac{e^{(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)\chi}}{K} d\chi + C \right].$$

Подставим вместо χ и K их выражения (7.51); тогда получим:

$$Z = \left(\frac{U}{V}\right)^{-(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)} \left[C_1 x^2 \left(2 - \frac{1}{H}\right) R \int \left(\frac{U}{V}\right)^{(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)+1} \times \right. \\ \left. \times d\left(\frac{x}{L}\right) + C \right].$$

Постоянная интегрирования C может быть определена из условия, чтобы в точке перехода ламинарного движения в турбулентное, т. е. при $x = x_{кр}$, $Z = Z_{кр}$. Формула для Z тогда примет вид

$$Z = \left(\frac{U}{V}\right)^{-(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)} \left[C_1 x^2 \left(2 - \frac{1}{H}\right) R \int_{x_{кр}/L}^{x/L} \left(\frac{U}{V}\right)^{(1+H)\left(2-\frac{1}{H}\right)+1} \times \right. \\ \left. \times d\left(\frac{x}{L}\right) \right] + Z_{кр}.$$

При вычислении Z по этой формуле можно принять следующие приближенные значения входящих в нее постоянных величин:

$$H \approx 1,4, \quad x \approx 0,39, \quad C_1 \approx 5,72.$$

Подставляя эти значения в последнюю формулу, получаем:

$$Z = 1,125 R \left(\frac{U}{V}\right)^{-3,08} \int_{x_{кр}/L}^{x/L} \left(\frac{U}{V}\right)^{4,08} d\left(\frac{x}{L}\right) + Z_{кр}.$$

После того как Z вычислено как функция x/L , необходимо по уравнению (7.53) определить соответствующие значения z . Так как уравнение (7.53) является трансцендентным относительно z , то для того, чтобы при расчетах упростить его решение, мы приводим график зависимости z от Z (рис. 7.54), с помощью которого можно быстро определять по вычисленным значениям Z соответствующие им z .

Для облегчения дальнейших вычислений на этом графике изображены также зависимости R_0 и ϕ от Z , построенные с помощью формул (7.52).

Расчетные формулы, основанные на логарифмическом законе распределения скоростей, являются универсальными для всех чисел Рейнольдса в турбулентной области. Однако остальные недостатки, отмеченные выше для степенного закона, присущи и логарифмическому: он непригоден для ламинарного подслоя и для области вблизи точки отрыва слоя. Логарифмический закон распределения скоростей, так же как и степенной, можно применять лишь при небольших значениях градиента давления.

§ 19. Распределение касательных напряжений и скоростей в турбулентном пограничном слое

Уравнение импульсов, которое применялось в предыдущем параграфе, не может дать ответа на вопрос о распределении скоростей и касательных напряжений в пограничном слое. Для изучения этого вопроса необходимо обратиться к дифференциальному уравнению движения жидкости. Возьмем это уравнение в наиболее общем виде (§ 2)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Трудность решения этого уравнения заключается в том, что в левую часть его входят осредненные скорости, а в правой части составляющая касательного напряжения τ , которая обусловлена турбулентным перемешиванием, непосредственно выражается лишь через пульсационные, а не через осредненные скорости движения $\tau_{\text{турб}} = -\rho \overline{v'_x v'_y}$. Так как теория турбулентного движения развита еще недостаточно, то остается невыясненной зависимость пульсационных скоростей от осредненных, а также зависимость пульсационных скоростей от градиента давления и других обстоятельств. Таким образом, уравнения движения остаются, по сути дела, незамкнутыми, т. е. количество неизвестных превосходит число уравнений.

Можно, однако, не решая дифференциального уравнения движения, приближенно найти с его помощью распределение касательных напряжений по сечению слоя (а затем и скоростей), если воспользоваться соответствующими граничными условиями для τ ¹⁾.

Представим корень из касательного напряжения в пограничном слое в виде полинома, расположенного по степеням y/δ :

$$\sqrt{\tau(x, y)} = \sqrt{\tau_0(x)} \left[A_0(x) + A_1(x) \frac{y}{\delta} + A_2(x) \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots + A_n(x) \left(\frac{y}{\delta}\right)^n \right];$$

этот полином можно рассматривать как отрезок соответствующего степенного ряда. Коэффициенты этого полинома могут быть определены из граничных условий, которым должны удовлетворять τ и его производные по y на внутренней и внешней границах слоя.

¹⁾ Федяевский К. К., Турбулентный пограничный слой крыла, ч. I. О профиле напряжения трения и скоростей, Труды ЦАГИ, вып. 282, 1936; ч. II. О законе сопротивления, Труды ЦАГИ, вып. 316, 1937; Федяевский К. К. и Гиневский А. С., Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, Журнал технической физики, т. XXVII, вып. 2, 1957.