Для облегчения дальнейших вычислений на этом графике изображены также зависимости R_ϑ и ψ от Z, построенные с помощью формул (7.52).

Расчетные формулы, основанные на логарифмическом законе распределения скоростей, являются универсальными для всех чисел Рейнольдса в турбулентной области. Однако остальные недостатки, отмеченные выше для степенного закона, присущи и логарифмическому: он непригоден для ламинарного подслоя и для области вблизи точки отрыва слоя. Логарифмический закон распределения скоростей, так же как и степенной, можно применять лишь при небольших значениях градиента давления.

§ 19. Распределение касательных напряжений и скоростей в турбулентном пограничном слое

Уравнение импульсов, которое применялось в предыдущем параграфе, не может дать ответа на вопрос о распределении скоростей и касательных напряжений в пограничном слое. Для изучения этого вопроса необходимо обратиться к дифференциальному уравнению движения жидкости. Возьмем это уравнение в наиболее общем виде (§ 2)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Трудность решения этого уравнения заключается в том, что в левую часть его входят осредненные скорости, а в правой части составляющая касательного напряжения τ, которая обусловлена турбулентным перемешиванием, непосредственно выражается лишь через пульсационные, а не через осредненные скорости движения $\tau_{\text{турб}} = -\rho\overline{(v'_x v'_y)}$. Так как теория турбулентного движения развита еще недостаточно, то остается невыясненной зависимость пульсационных скоростей от осредненных, а также зависимость пульсационных скоростей от градиента давления и других обстоятельств. Таким образом, уравнения движения остаются, по сути дела, незамкнутыми, т. е. количество неизвестных превосходит число уравнений.

Можно, однако, не решая дифференциального уравнения движения, приближенно найти с его помощью распределение касательных напряжений по сечению слоя (а затем и скоростей), если воспользоваться соответствующими граничными условиями для τ [1]).

Представим корень из касательного напряжения в пограничном слое в виде полинома, расположенного по степеням y/δ:

$$\sqrt{\tau(x, y)} = \sqrt{\tau_0(x)}\left[A_0(x) + A_1(x)\frac{y}{\delta} + A_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \ldots + A_n(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^n\right];$$

этот полином можно рассматривать как отрезок соответствующего степенного ряда. Коэффициенты этого полинома могут быть определены из граничных условий, которым должны удовлетворять τ и его производные по y на внутренней и внешней границах слоя.

---

[1]) Федяевский К. К., Турбулентный пограничный слой крыла, ч. I. О профиле напряжения трения и скоростей, Труды ЦАГИ, вып. 282, 1936; ч. II. О законе сопротивления, Труды ЦАГИ, вып. 316, 1937; Федяевский К. К. и Гиневский А. С., Метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, Журнал технической физики, т. XXVII, вып. 2, 1957.

На поверхности тела касательное напряжение равно τ_0: при $y=0$ $\tau=\tau_0$; на внешней границе слоя, по самому ее определению, касательное напряжение должно обращаться в нуль, т. е. при $y=\delta$ $\tau=0$. Далее из уравнения движения следует, что при $y=0$ $\partial\tau/\partial y=dp/dx$, при $y=\delta$ $\partial\tau/\partial y=0$.

Дифференцируя по y уравнение движения и полагая затем $y=0$, находим, подобно тому как это было сделано в § 6 для случая ламинарного пограничного слоя, что при $y=0$ $\partial^2\tau/\partial y^2=0$.

Последовательно дифференцируя по y уравнение движения и полагая затем всякий раз $y=0$, можно вычислить значения любого необходимого количества производных от τ по y при $y=0$. Аналогично определяются значения производных от τ по y при $y=\delta$.

Если воспользоваться первыми тремя из написанных здесь граничных условий, то можно определить три коэффициента A_i, т. е. представить $\sqrt{\tau}$ в виде полинома второй степени. В этом случае коэффициенты A_i и $\sqrt{\tau}$ имеют следующие выражения:

$$A_0=1,\quad A_1=\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\frac{\delta}{\tau_0},\quad A_2=-\left(1+\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\frac{\delta}{\tau_0}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}=1+A_1\left(\frac{y}{\delta}\right)-(1+A_1)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2. \qquad (7.54)$$

Отсюда видно, что профиль касательных напряжений в пограничном слое можно в первом приближении считать зависящим только от одного «параметра формы»:

$$\Gamma=\frac{dp}{dx}\frac{\delta}{\tau_0}.$$

(Если воспользоваться еще другими граничными условиями, то в формулу для τ войдут наряду с Γ также иные «параметры формы».)

Принимая во внимание, что по уравнению (7.7)

$$\frac{dp}{dx}=-\rho UU',$$

можно записать выражение параметра Γ в виде

$$\Gamma=-\frac{U'\delta^2}{\nu}\frac{\nu}{U\delta}\frac{\rho U^2}{\tau_0}.$$

Применяя уравнение импульсов для пограничного слоя, удобно, как известно из предыдущего, взять за характерную толщину пограничного слоя вместо δ толщину потери импульса ϑ. Тогда вместо параметра Γ будем иметь аналогично построенный параметр

$$\Gamma_1=-\frac{U'\vartheta^2}{\nu}\frac{\nu}{U\vartheta}\frac{\rho U^2}{\tau_0}.$$

Из последнего выражения видно, что параметры Γ и Γ_1 не являются, по существу, новыми параметрами: они выражаются через известные уже нам параметры формы для пограничного слоя f и R_ϑ и коэффициенты касательного напряжения ψ

$$\Gamma_1=-\frac{f}{\mathsf{R}_\vartheta\psi}.$$

Найдя с помощью коэффициентов A_i распределение касательных напряжений по сечению пограничного слоя, можно затем вычислить и профиль скоростей, если, в соответствии с общей теорией турбулентного движения, принять ту или иную зависимость, связывающую касательное напряжение с осредненной скоростью. Необходимо, однако, отметить, что в общей теории турбулентного движения все эти зависимости выведены только для случая неускоренного движения и можно лишь предполагать, что они остаются без существенных изменений и в случаях ускоренного или замедленного движения.

Для части пограничного слоя, близкой к поверхности тела, можно значительно упростить вычисления, если в выражении касательного напряжения $\tau=\rho l^2(d\overline{v}_x/dy)^2$ воспользоваться для длины пути перемешивания формулой Прандтля $l=\varkappa y$ (где $\varkappa=0{,}4$), которая, как известно, справедлива вблизи твердой поверхности[1]). Тогда сможем написать:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}=\varkappa\, y\,\frac{d\overline{v}_x}{dy}.$$

Но, с другой стороны, $\sqrt{\tau}$ определяется выражением (7. 54); приравнивая друг другу оба выражения для $\sqrt{\tau}$, получаем дифференциальное уравнение для $\overline{v}_x$, откуда после интегрирования находим:

$$\frac{\overline{v}_x}{U}=1+\frac{v_*}{\varkappa U}\left\{\ln\frac{y}{\delta}-A_1\left(1-\frac{y}{\delta}\right)+\frac{1}{2}\left(1+A_1\right)\left[1-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]\right\}. \quad (7.55)$$

При $\Gamma=0$ (т. е. $A_1=0$) эта формула переходит в формулу, выражающую закон распределения скоростей для течения вдоль плоской пластинки. Слагаемые, содержащие Γ, дают поправку к этому закону, вызванную влиянием продольного градиента давления. Однако последняя формула, так же как и формула логарифмического закона, неприменима к области ламинарного подслоя: при $y=0$ по этой формуле получается бесконечно большое значение скорости, тогда как в действительности оно должно быть нулевым. Рассмотрим поэтому отдельно движение жидкости в ламинарном подслое.

Будем считать, что в ламинарном подслое касательное напряжение происходит только от вязкости и определяется законом Ньютона

$$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Предположим для простоты, что в ламинарном подслое имеет место линейное распределение касательных напряжений по его сечению. Возводя в квадрат равенство (7. 54) и оставляя лишь первые степени y/δ, будем иметь:

$$\frac{\tau}{\tau_0}=1+\Gamma(x)\,\frac{y}{\delta}. \quad (7.56)$$

Приравняем касательные напряжения, определяемые законом Ньютона и формулой (7. 56); тогда получим:

$$\frac{dv_x}{dy}=\frac{\tau_0}{\mu}\left(1+\Gamma(x)\,\frac{y}{\delta}\right),$$

откуда

$$v_x=v_*\left(1+\frac{1}{2}\Gamma(x)\frac{y}{\delta}\right)\frac{v_* y}{\nu}; \quad (7.57)$$

постоянная интегрирования здесь равна нулю, так как при $y=0$ $v_x=0$.

Обозначим толщину ламинарного подслоя через $\delta_{\text{лам}}$. При $y=\delta_{\text{лам}}$, т. е. на границе между ламинарным подслоем и турбулентной частью слоя, должны

[1]) См. по этому поводу: Файнзильбер А.М., Обобщение теории «пути смешения» на обтекание криволинейных профилей, Доклады Академии наук СССР, т. VIII, № 4, 1947.

сопрягаться профили скорости, выражаемые формулами (7.55) и (7.57). Подставляя в каждую из этих формул $y=\delta_{лам}$ и приравнивая друг другу их правые части, получаем:

$$U+\frac{v_*}{\varkappa}\left\{\ln\frac{\delta_{лам}}{\delta}-A_1\left(1-\frac{\delta_{лам}}{\delta}\right)+\frac{1}{2}(1+A_1)\left[1-\left(\frac{\delta_{лам}}{\delta}\right)^2\right]\right\}=$$
$$=v_*\left(1+\frac{1}{2}\Gamma\frac{\delta_{лам}}{\delta}\right)\frac{v_*\delta_{лам}}{\nu}.$$

Последнее равенство дает возможность определить через посредство v_* касательные напряжения, т. е. представляет собой так называемый закон сопротивления. С помощью закона сопротивления, формул, выражающих профиль скорости, и уравнения импульсов можно выполнить весь расчет пограничного слоя.

Но в последнее равенство входит, кроме v_* и δ, еще одна неизвестная величина — $\delta_{лам}$. Для того чтобы определить ее, введем гипотезу о том, что в пограничном слое при удалении от твердой поверхности переход ламинарного движения в турбулентное происходит всякий раз при одном и том же значении числа Рейнольдса $v_*\delta_{лам}/\nu$; обозначив это критическое значение числа Рейнольдса через α, сможем записать $v_*\delta_{лам}/\nu=\alpha=\text{const}$.

Численное значение α может быть определено, например, из опытных данных по распределению скоростей вблизи стенки трубы или в пограничном слое; опыты показывают, что с достаточной для практических целей точностью можно считать, что $\alpha\approx 11,5$.

Вместо $\delta_{лам}$ в формулу для закона сопротивления теперь можно подставить $\alpha\nu/v_*$; тогда получится:

$$U+\frac{v_*}{\varkappa}\left\{\ln\frac{\alpha\nu}{v_*\delta}-\frac{\Gamma}{2}\left(1-\frac{\alpha\nu}{v_*\delta}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Gamma}{2}\right)\left[1-\left(\frac{\alpha\nu}{v_*\delta}\right)^2\right]\right\}=$$
$$=v_*\alpha\left(1+\frac{1}{2}\Gamma\alpha\frac{\nu}{v_*\delta}\right).$$

Весь дальнейший расчет турбулентного пограничного слоя может быть проведен на основе последней формулы, формулы (7.55) для распределения скоростей и уравнения импульсов принципиально так же, как это было сделано в предыдущем параграфе при применении логарифмического закона распределения скоростей.

§ 20. Приближенный метод Лойцянского для расчета турбулентного пограничного слоя

Изложенные в предыдущем параграфе способы расчета турбулентного пограничного слоя имеют тот недостаток, что они не позволяют определить местоположение точки отрыва слоя; эти способы исходят, как мы видели, из задания профиля касательных напряжений, причем предполагается, что $\tau_0\neq 0$ и $\Gamma\neq\infty$.

Иной метод расчета турбулентного пограничного слоя, пригодный и для определения места отрыва, был предложен Л. Г. Лойцянским[1]).

Этот метод основан на предположении о некоторой формальной аналогии между ламинарным и турбулентным пограничным слоем, а также на других предположениях и является распространением на случай турбулентного слоя метода расчета ламинарного слоя, изложенного в § 15.

[1]) Лойцянский Л. Г., Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла, Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 6, 1945.