

сопрягаться профили скорости, выражаемые формулами (7.55) и (7.57). Подставляя в каждую из этих формул  $u = \delta_{\text{лам}}$  и приравнивая друг другу их правые части, получаем:

$$U + \frac{v_*}{\alpha} \left\{ \ln \frac{\delta_{\text{лам}}}{\delta} - A_1 \left( 1 - \frac{\delta_{\text{лам}}}{\delta} \right) + \frac{1}{2} (1 + A_1) \left[ 1 - \left( \frac{\delta_{\text{лам}}}{\delta} \right)^2 \right] \right\} = \\ = v_* \left( 1 + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\delta_{\text{лам}}}{\delta} \right) \frac{v_* \delta_{\text{лам}}}{\nu}.$$

Последнее равенство дает возможность определить через средство  $v_*$  касательные напряжения, т. е. представляет собой так называемый закон сопротивления. С помощью закона сопротивления, формул, выражающих профиль скорости, и уравнения импульсов можно выполнить весь расчет пограничного слоя.

Но в последнее равенство входит, кроме  $v_*$  и  $\delta$ , еще одна неизвестная величина —  $\delta_{\text{лам}}$ . Для того чтобы определить ее, введем гипотезу о том, что в пограничном слое при удалении от твердой поверхности переход ламинарного движения в турбулентное происходит всякий раз при одном и том же значении числа Рейнольдса  $v_* \delta_{\text{лам}}/\nu$ ; обозначив это критическое значение числа Рейнольдса через  $\alpha$ , сможем записать  $v_* \delta_{\text{лам}}/\nu = \alpha = \text{const}$ .

Численное значение  $\alpha$  может быть определено, например, из опытных данных по распределению скоростей вблизи стенки трубы или в пограничном слое; опыты показывают, что с достаточной для практических целей точностью можно считать, что  $\alpha \approx 11,5$ .

Вместо  $\delta_{\text{лам}}$  в формулу для закона сопротивления теперь можно подставить  $\alpha\nu/v_*$ ; тогда получится:

$$U + \frac{v_*}{\alpha} \left\{ \ln \frac{\alpha\nu}{v_*\delta} - \frac{\Gamma}{2} \left( 1 - \frac{\alpha\nu}{v_*\delta} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Gamma}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\alpha\nu}{v_*\delta} \right)^2 \right] \right\} = \\ = v_* \alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \Gamma \alpha \frac{\nu}{v_*\delta} \right).$$

Весь дальнейший расчет турбулентного пограничного слоя может быть проведен на основе последней формулы, формулы (7.55) для распределения скоростей и уравнения импульсов принципиально так же, как это было сделано в предыдущем параграфе при применении логарифмического закона распределения скоростей.

## § 20. Приближенный метод Лойцянского для расчета турбулентного пограничного слоя

Изложенные в предыдущем параграфе способы расчета турбулентного пограничного слоя имеют тот недостаток, что они не позволяют определить местоположение точки отрыва слоя; эти способы исходят, как мы видели, из задания профиля касательных напряжений, причем предполагается, что  $\tau_0 \neq 0$  и  $\Gamma \neq \infty$ .

Иной метод расчета турбулентного пограничного слоя, пригодный и для определения места отрыва, был предложен Л. Г. Лойцянским<sup>1)</sup>.

Этот метод основан на предположении о некоторой формальной аналогии между ламинарным и турбулентным пограничным слоем, а также на других предположениях и является распространением на случай турбулентного слоя метода расчета ламинарного слоя, изложенного в § 15.

<sup>1)</sup> Лойцянский Л. Г., Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла, Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 6, 1945.

Л. Г. Лойцянский представляет коэффициент трения  $\psi = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$  в виде

$$\psi = \frac{\bar{\zeta}}{G(R_0)}. \quad (7.58)$$

Эта формула аналогична той, которая была получена в § 18 при использовании степенного закона распределения скоростей, но отличается от нее, во-первых, тем, что  $G(R_0)$  есть произвольная (а не обязательно степенная) функция  $R_0$ , а во-вторых, тем, что  $\bar{\zeta}$  есть величина переменная вдоль контура. В точке отрыва пограничного слоя  $\bar{\zeta} = 0$ ; очевидно, что величину  $\bar{\zeta}$  можно выбрать так, чтобы при  $U' = 0$  (что соответствует продольному обтеканию плоской пластинки)  $\bar{\zeta} = 1$ .

В качестве основного параметра формы в излагаемом методе выбирается величина  $\bar{\Gamma}$ , построенная аналогично параметру  $\Gamma_1$  (§ 19), выражение для которого можно теперь представить в виде

$$\Gamma_1 = -\frac{fG(R_0)}{R_0 \bar{\zeta}}.$$

Параметр  $\bar{\Gamma}$  отличается от  $\Gamma_1$ , во-первых, знаком, во-вторых, тем, что не содержит в знаменателе величины  $\bar{\zeta}$ ; таким образом,

$$\bar{\Gamma} = \frac{f}{R_0} G(R_0) = \frac{U'^{\frac{3}{2}}}{U} G(R_0).$$

В отличие от  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  параметр  $\bar{\Gamma}$  в точке отрыва не обращается в бесконечность, в чем и заключается его преимущество перед  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$ .

Приведем теперь параметр  $\bar{\Gamma}$  к такому виду, чтобы он для всех случаев обтекания изменялся в одних и тех же пределах при перемещении сечения от точки минимума давления до точки отрыва слоя. С этой целью обозначим через  $\bar{\Gamma}_0$  значение параметра  $\bar{\Gamma}$  в точке отрыва слоя и разделим  $\bar{\Gamma}$  на  $\bar{\Gamma}_0$ . Параметр

$$\bar{f} = \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_0} = \frac{f}{R_0} \frac{G}{\bar{\Gamma}_0} = \frac{U'^{\frac{3}{2}}}{U} \frac{G}{\bar{\Gamma}_0} \quad (7.59)$$

обладает тем свойством, что в точке минимума давления он для всех тел равен нулю (ибо в этой точке  $U' = 0$ ), а в точке отрыва слоя равен единице.

Составим уравнение для определения  $\bar{f}(x)$ . Возьмем уравнение импульсов в форме (7.48)

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} F + \frac{U'}{U} f;$$

здесь, как известно,

$$F = 2[\zeta - f(2 + H)].$$

Перейдем в последних двух равенствах от  $f$  и  $\zeta$  к  $\bar{f}$  и  $\bar{\zeta}$ . Из формулы (7.59) следует:

$$f = \bar{f} \frac{R_0}{G} \bar{\Gamma}_0;$$

кроме того,

$$\zeta = \frac{\tau_0}{\mu \frac{3}{2} U} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} R_0 = \psi R_0 = \frac{\bar{\zeta}}{G} R_0.$$

Подставляя выражения для  $f$  и  $\zeta$  в уравнение (7.48), получим:

$$\bar{\Gamma}_0 \frac{d\bar{f}}{dx} + \bar{f}\bar{\Gamma}_0 \frac{G}{R_0} \frac{d\left(\frac{R_0}{G}\right)}{dx} = 2 \frac{U'}{U} [\bar{\zeta} - \bar{f}\bar{\Gamma}_0(2+H)] + \frac{U''}{U'} \bar{f}\bar{\Gamma}_0$$

или

$$\frac{d\bar{f}}{dx} = \frac{U'}{U} \left[ 2 \left( \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\Gamma}_0} - \bar{f}(2+H) \right) - \frac{U}{U'} \frac{G}{R_0} \frac{d\left(\frac{R_0}{G}\right)}{dx} \bar{f} \right] + \frac{U''}{U'} \bar{f}.$$

С другой стороны, непосредственно дифференцируя по  $x$  обе части равенства (7.59), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}}{dx} &= \frac{1}{\bar{\Gamma}_0} \left[ \frac{U'\vartheta'}{U} G + \frac{U''}{U} \vartheta G - \frac{U'^2}{U^2} \vartheta G + \frac{U'\vartheta}{U} \frac{dG}{dR_0} R_0' \right] = \\ &= \left[ \frac{\vartheta'}{\vartheta} - \frac{U'}{U} + \frac{R_0'}{G} \frac{dG}{dR_0} \right] \bar{f} + \frac{U''}{U'} \bar{f}. \end{aligned}$$

Сопоставляя оба выражения для  $d\bar{f}/dx$ , находим:

$$2 \left[ \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\Gamma}_0} - \bar{f}(2+H) \right] - \frac{U}{U'} \frac{G}{R_0} \frac{d\left(\frac{R_0}{G}\right)}{dx} \bar{f} = \left( \frac{U'\vartheta'}{U'\vartheta} - 1 + \frac{U}{U'} \frac{R_0'}{G} \frac{dG}{dR_0} \right) \bar{f}. \quad (7.60)$$

Введем обозначение

$$m(R_0) = \frac{R_0}{G} \frac{dG}{dR_0} = \frac{d \ln G}{d \ln R_0};$$

тогда сможем написать:

$$\frac{U}{U'} \frac{G}{R_0} \frac{d\left(\frac{R_0}{G}\right)}{dx} = \frac{U}{U'} \left( \frac{d \ln R_0}{dx} - \frac{d \ln G}{dx} \right) = \frac{UR_0'}{UR_0} (1-m) = \left( \frac{U\vartheta'}{U'\vartheta} + 1 \right) (1-m).$$

Равенство (7.60) теперь примет вид

$$2 \left[ \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\Gamma}_0} - \bar{f}(2+H) \right] - (1-m) \left( \frac{U\vartheta'}{U'\vartheta} + 1 \right) \bar{f} = \left[ \frac{U\vartheta'}{U'\vartheta} (1+m) + (m-1) \right] \bar{f};$$

решая его относительно  $U\vartheta'/U'\vartheta$  и возвращаясь к одной из формул для  $d\bar{f}/dx$ , получим окончательно:

$$\frac{d\bar{f}}{dx} = \frac{U'}{U} \bar{F} + \frac{U''}{U'} \bar{f}, \quad (7.61)$$

где

$$\bar{F}(\bar{f}, R_0) = (1+m) \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\Gamma}_0} - [3+m+(1+m)H] \bar{f}.$$

Таким образом, расчетное уравнение для параметра  $\bar{f}$  имеет такой же вид, как и для параметра  $f$ , с той лишь разницей, что функция  $\bar{F}$  зависит в случае турбулентного движения не только от  $\bar{f}$ , но и от  $R_0$  (через посредство  $m$ )<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если движение в пограничном слое ламинарное, то, согласно § 16,

$$\psi = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\mu U \zeta(f)}{\vartheta \rho U^2} = \frac{\zeta(f)}{R_0}.$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (7.58), получаем, что

$$G(R_0) = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}, R_0,$$

и так как  $\zeta$  зависит в данном случае только от  $f$ , то  $m = \text{const} = 1$ .

Для того чтобы решить уравнение (7.61), необходимо в каждом отдельном случае знать зависимость функции  $\bar{F}$  от независимых переменных  $\bar{f}$  и  $R_0$ . Л. Г. Лойцянский вводит ряд упрощающих предположений, с помощью которых можно определить вид функции  $\bar{F}(\bar{f}, R_0)$  для всех случаев обтекания.

Во-первых, предполагается, что функция  $G(R_0)$ , которая определяет зависимость коэффициента трения  $\psi$  от  $R_0$ , одинакова для всех случаев обтекания при турбулентном движении в слое. Ее можно найти, например, для простейшего случая продольного обтекания плоской пластинки и распространить затем на все остальные случаи. Если принять для плоской пластинки логарифмический закон распределения скоростей в пограничном слое, то для  $G(R_0)$  получается следующее приближенное выражение:

$$G(R_0) = 33 (\log R_0 + 0,66)^2;$$

его можно с достаточной точностью заменить другим выражением, степенного вида

$$G(R_0) = 153,2 R_0^{1/6}.$$

Отсюда следует, что величина

$$m(R_0) = \frac{d \log G(R_0)}{d \log R_0} \approx \frac{d}{d \log R_0} \left( \log 153,2 + \frac{1}{6} \log R_0 \right) = \frac{1}{6},$$

т. е. представляет собой слабо изменяющуюся функцию  $R_0$ ; приближенно ее можно считать постоянной величиной и обозначить эту постоянную через  $m_0$ .

Во-вторых, предполагается, по аналогии с ламинарным слоем, что  $\zeta$  является универсальной для всех случаев функцией  $\bar{f}$  и что

$$\bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad (7.62)$$

где  $H_0$  есть значение  $H$  в точке минимума

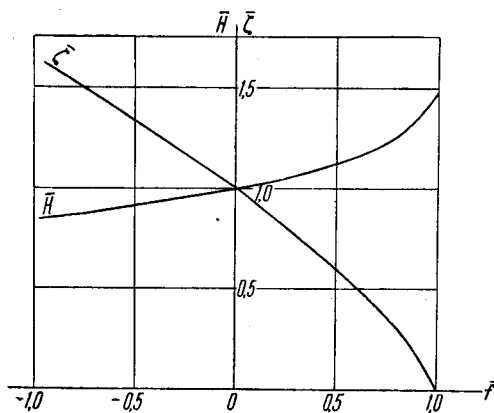


Рис. 7.55. Зависимость  $\bar{\zeta}$  и  $\bar{H}$  от  $\bar{f}$ .

давления, также есть универсальная для всех случаев функция  $\bar{f}$ .

В-третьих, предполагается, что эти универсальные функции  $\bar{\zeta}(\bar{f})$  и  $\bar{H}(\bar{f})$  одинаковы как в ламинарном, так и в турбулентном пограничном слое. Для ламинарного пограничного слоя значения этих функций можно подсчитать, например, по данным таблицы, приведенной в § 15. Величины  $\bar{\zeta}$  и  $\bar{H}$  получатся в результате деления  $\zeta$  и  $H$  соответственно на значения этих величин  $\zeta_0$  и  $H_0$  в точке минимума давления, а  $\bar{f}$  получится в результате деления  $f$  на значение  $f$  в точке отрыва. Вычисленные таким образом значения  $\bar{f}$ ,  $\bar{\zeta}$  и  $\bar{H}$  приведены

в нижеследующей таблице. Зависимости  $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{f})$  и  $\bar{H} = \bar{H}(\bar{f})$  изображены, кроме того, в виде графиков на рис. 7.55.

Если принять указанные предположения, то решение уравнения импульсов (7.61) сильно облегчается. Функция  $\bar{F}$  оказывается зависящей только

$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$	$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$
-0,95	1,63	0,85	0	1,00	1,00
-0,90	1,60	0,86	0,10	0,93	1,02
-0,80	1,53	0,87	0,20	0,85	1,04
-0,70	1,47	0,88	0,30	0,77	1,07
-0,60	1,41	0,90	0,40	0,69	1,10
-0,50	1,34	0,915	0,50	0,60	1,125
-0,40	1,28	0,93	0,60	0,515	1,16
-0,30	1,21	0,95	0,70	0,42	1,20
-0,20	1,14	0,97	0,80	0,31	1,26
-0,10	1,08	0,985	0,90	0,175	1,35
			1,00	0	1,48

от  $\bar{f}$  и от значения постоянных величин  $m_0$ ,  $\bar{\Gamma}_0$  и  $H_0$ . Зависимость  $\bar{F}$  от  $\bar{f}$  получается здесь, так же как и в случае ламинарного пограничного слоя, близкой к линейной зависимости:

$$F \approx a - b\bar{f}.$$

Л. Г. Лойцянский выбирает  $m_0 = \frac{1}{6} = 0,167$ ,  $H_0 = 1,4$ ,  $\bar{\Gamma}_0 = -1,95$ ; тогда получается, что

$$a \approx -0,6, \quad b \approx 4,8.$$

Уравнение импульсов (7.61) является теперь линейным дифференциальным уравнением; интегрируя его при выбранных значениях  $a$  и  $b$ , получаем:

$$\bar{f} = \frac{0,6U}{U^{4,3}} \int_{x_{кр}}^x U^{3,3} dx + \bar{f}_{кр},$$

где  $x_{кр}$  и  $\bar{f}_{кр}$  суть абсцисса точки перехода ламинарного движения в турбулентное и значение  $\bar{f}$  в этой точке.

Вычислив  $\bar{f}(x)$ , можно по таблице или графикам на рис. 7.55 определить  $\bar{\zeta}(x)$  и  $\bar{H}(x)$ , а затем по формулам (7.58) и (7.62) —  $\psi$  и  $H$ . Точка отрыва турбулентного слоя соответствует значению  $\bar{\zeta} = 0$ , т. е.  $\bar{f} = 1$ .

Изложенный метод обычно дает приблизительно правильные значения абсциссы точки отрыва и касательных напряжений; однако трудно сказать, насколько соответствуют действительности принятые в этом методе упрощающие предположения и насколько правильны численные значения констант и, в частности, значение  $\bar{\Gamma}_0$ .

## § 21. Отрыв турбулентного пограничного слоя

Рассмотрим теперь вопрос о местоположении точки отрыва турбулентного слоя еще с иной точки зрения. Выясним, от каких обстоятельств зависит положение точки отрыва слоя и какими параметрами формы оно определяется.

Возьмем дифференциальное уравнение движения в общем виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$