$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$	$\bar{f}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{H}$
—0,95	1,63	0,85	0	1,00	1,00
—0,90	1,60	0,86	0,10	0,93	1,02
—0,80	1,53	0,87	0,20	0,85	1,04
—0,70	1,47	0,88	0,30	0,77	1,07
—0,60	1,41	0,90	0,40	0,69	1,10
—0,50	1,34	0,915	0,50	0,60	1,125
—0,40	1,28	0,93	0,60	0,515	1,16
—0,30	1,21	0,95	0,70	0,42	1,20
—0,20	1,14	0,97	0,80	0,31	1,26
—0,10	1,08	0,985	0,90	0,175	1,35
			1,00	0	1,48

от $\bar{f}$ и от значения постоянных величин m_0, $\bar{\Gamma}_0$ и H_0. Зависимость $\bar{F}$ от $\bar{f}$ получается здесь, так же как и в случае ламинарного пограничного слоя, близкой к линейной зависимости:

$$F \approx a - b\bar{f}.$$

Л. Г. Лойцянский выбирает $m_0 = \frac{1}{6} = 0{,}167$, $H_0 = 1{,}4$, $\bar{\Gamma}_0 = -1{,}95$; тогда получается, что

$$a \approx -0{,}6, \qquad b \approx 4{,}8.$$

Уравнение импульсов (7.61) является теперь линейным дифференциальным уравнением; интегрируя его при выбранных значениях a и b, получаем:

$$\bar{f} = \frac{0{,}6U'}{U^{4,8}} \int\limits_{x_{\text{кр}}}^{x} U^{3,8} dx + \bar{f}_{\text{кр}},$$

где $x_{\text{кр}}$ и $\bar{f}_{\text{кр}}$ суть абсцисса точки перехода ламинарного движения в турбулентное и значение $\bar{f}$ в этой точке.

Вычислив $\bar{f}(x)$, можно по таблице или графикам на рис. 7.55 определить $\bar{\zeta}(x)$ и $\bar{H}(x)$, а затем по формулам (7.58) и (7.62) — ψ и H. Точка отрыва турбулентного слоя соответствует значению $\bar{\zeta} = 0$, т. е. $\bar{f} = 1$.

Изложенный метод обычно дает приблизительно правильные значения абсциссы точки отрыва и касательных напряжений; однако трудно сказать, насколько соответствуют действительности принятые в этом методе упрощающие предположения и насколько правильны численные значения констант и, в частности, значение $\bar{\Gamma}_0$.

§ 21. Отрыв турбулентного пограничного слоя

Рассмотрим теперь вопрос о местоположении точки отрыва турбулентного слоя еще с иной точки зрения. Выясним, от каких обстоятельств зависит положение точки отрыва слоя и какими параметрами формы оно определяется.

Возьмем дифференциальное уравнение движения в общем виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

и подставим вместо τ его выражение для турбулентного потока

$$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}+\rho l^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2,$$

где l есть длина пути перемешивания; при этом вместо y возьмем за независимую переменную $\eta=y/\delta$, подобно тому как это было сделано в § 14. В результате получим:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{v_y}{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\nu}{\delta^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial\eta^2}+$$
$$+\frac{2}{\delta}\left(\frac{l}{\delta}\right)^2\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 v_x}{\partial\eta^2}+\frac{2}{\delta}\frac{l}{\delta}\frac{\partial\left(\frac{l}{\delta}\right)^2}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right)^2. \quad (7.63)$$

Если предположить, что l/δ не зависит от числа Рейнольдса и что $\nu\sim\delta^2$, то, как видно из последнего уравнения, искомые величины v_x и v_y/δ зависят от двух функций, играющих здесь роль параметров: $dp/dx=F(x)$ и $\delta=\delta(x)$. Следовательно, абсцисса точки на поверхности тела, в которой $\partial v_x/\partial\eta=0$, также зависит от распределения давления вдоль контура и распределения толщины пограничного слоя δ.

В частности, она зависит от числа Рейнольдса, так как при его изменении изменяется и δ (кроме того, число Рейнольдса влияет на положение точки отрыва еще и потому, что при изменении числа Рейнольдса происходит перемещение точки перехода ламинарного движения в турбулентное).

Но параметры формы dp/dx и δ являются размерными величинами. Для того чтобы выяснить, от какой безразмерной комбинации этих величин зависят решения уравнения движения, приведем само уравнение к безразмерному виду.

Введем новые, безразмерные переменные

$$\bar{x}=\frac{x}{L},\qquad \bar{y}=\frac{y}{\delta},\qquad \bar{v}_x=\frac{v_x}{U},\qquad \bar{v}_y=\frac{v_y}{U'\delta},\qquad \bar{l}=\frac{l}{\delta},$$

где L есть характерный размер тела; заметим, кроме того, что по уравнению неразрывности движения для несжимаемой жидкости имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

а по уравнению Бернулли

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=UU'.$$

Поэтому, переходя к новым переменным в уравнении (7.63), сможем написать:

$$-UU'\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{y}}+UU'\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{y}}=$$
$$=UU'+\frac{U\nu}{\delta^2}\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}+2\frac{U^2}{\delta}\bar{l}^2\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}+2\frac{U^2}{\delta}\frac{\partial\bar{l}}{\partial\bar{y}}\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{y}}\right)^2.$$

Разделим последнее уравнение почленно на UU' и введем безразмерные параметры

$$\lambda=\frac{U'\delta^2}{\nu}\quad\text{и}\quad \mathrm{R}_\delta=\frac{U\delta}{\nu};$$

в результате получим:

$$\bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} - \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{\lambda(\bar{x})} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\mathrm{R}_\delta(\bar{x})}{\lambda(\bar{x})} \bar{l}^2 \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\mathrm{R}_\delta(\bar{x})}{\lambda(\bar{x})} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right)^2. \quad (7.64)$$

Граничные условия для функций $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$ имеют одинаковый для всех случаев обтекания вид: при $\bar{y}=0$ $\bar{v}_x=\bar{v}_y=0$; при $\bar{y}=1$ $\bar{v}_x=1, \partial\bar{v}_x/\partial\bar{y}=0$.

Если движение в пограничном слое ламинарное, то последние два слагаемых в уравнении (7.64) отпадают. Из уравнения (7.64) в этом случае видно, что

$$\bar{v}_x = F\ (\bar{y},\ \bar{v}_y,\ \lambda\ (\bar{x})).$$

Так как дифференциальное уравнение и граничные условия одинаковы для всех случаев обтекания, то и функция F одна и та же для всех случаев обтекания. Для того чтобы определить, от каких параметров зависит при ламинарном пограничном слое положение точки отрыва, вычислим $\partial\bar{v}_x/\partial\bar{y}$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{v}_y} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}}.$$

При $\bar{y}=0$, в силу уравнения неразрывности движения и граничных условий, $\partial\bar{v}_y/\partial\bar{y}$ обращается в нуль; поэтому

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}\right)_{y=0} = \Phi\ (\lambda(\bar{x})).$$

В точке отрыва пограничного слоя $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}=0$ и, следовательно,

$$\Phi\ (\lambda) = 0.$$

Из этого равенства видно, что отрыв ламинарного слоя происходит всегда при одном и том же значении параметра λ, именно при значении, являющемся корнем $\Phi\ (\lambda)$.

Если движение в пограничном слое турбулентное, то из уравнения (7.64) видно, что

$$\bar{v}_x = F_1\left(\bar{v}_y,\ \bar{y},\ \lambda\ (\bar{x}),\ \frac{\lambda\ (\bar{x})}{\mathrm{R}_\delta\ (\bar{x})}\right),$$

где F_1, так же как и F, есть функция, одинаковая для всех случаев обтекания (т. е. не зависящая от формы обтекаемого тела).

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, находим, что

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y}=0} = \Phi_1\left(\lambda\ (\bar{x}),\ \frac{\lambda\ (\bar{x})}{\mathrm{R}_\delta(\bar{x})}\right).$$

Вблизи места перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный движение определяется обоими параметрами $\lambda\ (\bar{x})$ и $\lambda\ (\bar{x})/\mathrm{R}_\delta\ (\bar{x})$. Однако в турбулентной части слоя, далеко от места перехода, влияние $\lambda\ (\bar{x})$ становится незначительным. Поэтому приближенно можно считать, что если отрыв слоя происходит далеко от области перехода, то в точке отрыва имеет место соотношение

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y}=0} \approx \Phi_1\left(\frac{\lambda\ (\bar{x})}{\mathrm{R}_\delta\ (\bar{x})}\right) = 0.$$

Из этого равенства следует, что отрыв турбулентного пограничного слоя происходит в этих условиях всегда при одном и том же значении параметра $\lambda/R_\delta = U'\delta/U$, которое является корнем $\Phi_1(\lambda/R_\delta)$. Так как обычно расчет пограничного слоя проводится не с помощью дифференциальных уравнений движения, а путем применения теоремы импульсов, то вместо параметров λ и λ/R_δ удобнее использовать аналогичные параметры

$$f = \frac{U'\vartheta^2}{\nu} \text{ и } \frac{f}{R_\vartheta} = \frac{U'\vartheta}{U},$$

построенные на толщине потери импульса, а не на толщине пограничного слоя.

Обработка экспериментальных данных показывает, что в точке отрыва турбулентного пограничного слоя

$$\frac{\lambda}{R_\delta} = \frac{U'\delta}{U} \approx -0{,}02, \qquad \frac{f}{R_\vartheta} = \frac{U'\vartheta}{U} \approx -0{,}003.$$

§ 22. Ламинарный пограничный слой в сжимаемой среде. Метод Дородницына

Рассмотрим влияние сжимаемости газа на его движение в пограничном слое. При этом ограничимся случаем плоского, установившегося потока.

Из дифференциальных уравнений движения вязкой сжимаемой среды (гл. VI, § 14) и уравнения неразрывности движения можно вывести путем рассуждений, аналогичных тем, которые применялись ранее для несжимаемой среды, следующие уравнения для ламинарного течения в пограничном слое газа:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

В газе ρ и μ суть переменные величины, причем $\rho = f(p, T)$, а $\mu = F(T)$, где T есть абсолютная температура. Для того чтобы полностью определить все пять неизвестных величин (v_x, v_y, ρ, μ, T), необходимы еще три дополнительных уравнения.

Зависимость коэффициента вязкости μ от температуры можно приближенно выразить с помощью степенной формулы, приведенной в гл. I,

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \tag{7.66}$$

где $n \approx 0{,}76$. Зависимость плотности от давления и температуры определяется уравнением

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}; \tag{7.67}$$

индексом 0 здесь и далее отмечены значения соответствующих величин в точке адиабатического торможения потока.