Из этого равенства следует, что отрыв турбулентного пограничного слоя происходит в этих условиях всегда при одном и том же значении параметра $\lambda/\mathrm{R}_\delta = U'\delta/U$, которое является корнем $\Phi_1(\lambda/\mathrm{R}_\delta)$. Так как обычно расчет пограничного слоя проводится не с помощью дифференциальных уравнений движения, а путем применения теоремы импульсов, то вместо параметров λ и $\lambda/\mathrm{R}_\delta$ удобнее использовать аналогичные параметры

$$f = \frac{U'\vartheta^2}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{f}{\mathrm{R}_\vartheta} = \frac{U'\vartheta}{U},$$

построенные на толщине потери импульса, а не на толщине пограничного слоя.

Обработка экспериментальных данных показывает, что в точке отрыва турбулентного пограничного слоя

$$\frac{\lambda}{\mathrm{R}_\delta} = \frac{U'\delta}{U} \approx -0{,}02, \qquad \frac{f}{\mathrm{R}_\vartheta} = \frac{U'\vartheta}{U} \approx -0{,}003.$$

§ 22. Ламинарный пограничный слой в сжимаемой среде. Метод Дородницына

Рассмотрим влияние сжимаемости газа на его движение в пограничном слое. При этом ограничимся случаем плоского, установившегося потока.

Из дифференциальных уравнений движения вязкой сжимаемой среды (гл. VI, § 14) и уравнения неразрывности движения можно вывести путем рассуждений, аналогичных тем, которые применялись ранее для несжимаемой среды, следующие уравнения для ламинарного течения в пограничном слое газа:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

В газе ρ и μ суть переменные величины, причем $\rho = f(p, T)$, а $\mu = F(T)$, где T есть абсолютная температура. Для того чтобы полностью определить все пять неизвестных величин (v_x, v_y, ρ, μ, T), необходимы еще три дополнительных уравнения.

Зависимость коэффициента вязкости μ от температуры можно приближенно выразить с помощью степенной формулы, приведенной в гл. I,

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \tag{7.66}$$

где $n \approx 0{,}76$. Зависимость плотности от давления и температуры определяется уравнением

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}; \tag{7.67}$$

индексом 0 здесь и далее отмечены значения соответствующих величин в точке адиабатического торможения потока.

Пятое уравнение можно получить, применяя к пограничному слою общее уравнение энергии, которое было выведено для вязкой сжимаемой среды в предыдущей главе.

Для того чтобы привести уравнение энергии к виду, наиболее удобному для теории пограничного слоя, преобразуем его левую часть. Как известно из термодинамики, $c_p - c_v = R$, где R есть газовая постоянная. Вследствие этого левая часть уравнения энергии равна

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + c_v T\right) = \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T - RT\right) = \\ = \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho c_p \frac{dT}{dt} - \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right),$$

ибо по уравнению состояния газа $\frac{p}{\rho} = RT$. Последнее слагаемое на основании уравнения неразрывности движения равно

$$\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Таким образом, левая часть уравнения энергии может быть представлена в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} - p \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Правая часть уравнения энергии для случая плоского течения газа, параллельного плоскости xy, если пренебречь объемными силами, будет иметь вид

$$-\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + p \frac{\partial v_x}{\partial x} + p \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \\ + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[v_y \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Если течение не только плоское, но и установившееся, то

$$\frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right);$$

поэтому, сокращая в правой и левой частях уравнения энергии последнее выражение и принимая во внимание обычные предположения теории пограничного слоя (y и v_y малы по сравнению соответственно с x и v_x), получим следующее *уравнение энергии* для плоского, установившегося течения газа в пограничном слое:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Для того чтобы еще более упростить это уравнение, воспользуемся уравнениями (7.65). Умножим первое из этих уравнений на ρv_x и вычтем из уравнения энергии.

Так как в пограничном слое вследствие малости v_y по сравнению с v_x

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x^2}{2}\right) = \rho v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

то в результате получим:

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) = v_x \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right). \qquad (7.68)$$

В этом виде наиболее часто применяется уравнение энергии для расчета пограничного слоя в газе. Здесь левая часть представляет собой полное количество тепла, полученное элементарной частицей в единицу времени на единицу ее объема, а в правой части слагаемые соответственно изображают количества тепла, полученные от работы сил давления, от части работы сил вязкости и вследствие теплопроводности. Уравнения (7.65) — (7.68) представляют собой полную систему уравнений для пограничного слоя в газовой среде.

Уравнения (7.65) для пограничного слоя газа могут быть приведены к виду, весьма близкому к тому, который имеют уравнения пограничного слоя для несжимаемой жидкости. С этой целью введем новые независимые переменные, впервые предложенные А. А. Дородницыным [1]).

Определим новые независимые переменные ξ и η следующими формулами:

$$\xi = \int_0^x f(x)\,dx; \qquad \eta = \int_0^y \chi(x, y)\,dy, \qquad (7.69)$$

где $f(x)$ и $\chi(x, y)$ суть некоторые функции, которые мы найдем из условия, чтобы преобразованные уравнения для пограничного слоя в сжимаемой среде были наиболее близкими по форме к соответствующим уравнениям для несжимаемой жидкости. Для того чтобы перейти к новым переменным ξ и η в уравнении неразрывности, возьмем вместо него известные выражения составляющих скорости через плотность и функцию тока

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

---

[1]) Дородницын А. А., Пограничный слой в сжимаемом газе, Прикладная математика и механика, т. VI, вып. 6, 1942.

Переходя к новым переменным, получим:

$$\rho v_x = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \chi\frac{\partial\psi}{\partial\eta};$$

$$\rho v_y = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}f + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{\rho v_x}{\chi}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = -\left(\frac{\rho v_y}{f} + \frac{\rho v_x}{\chi f}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right).$$

Последние равенства показывают, что уравнение неразрывности движения в новых переменных будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho v_x}{\chi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho v_y}{f} + \frac{\rho v_x}{\chi f}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0. \tag{7.70}$$

Для того чтобы полученное уравнение совпадало с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, потребуем, чтобы $\rho/\chi = \text{const}$, и введем обозначение

$$\frac{\chi v_y}{f} + \frac{v_x}{f}\frac{\partial\eta}{\partial x} = V_y;$$

тогда получим уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial\xi} + \frac{\partial V_y}{\partial\eta} = 0. \tag{7.71}$$

Выполним ту же замену переменных (7.69) в первом уравнении (7.65); оно примет тогда вид

$$\rho v_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}f + \frac{\partial v_x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\chi = -\frac{dp}{d\xi}f + \chi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\chi\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right),$$

или

$$\rho v_x f\frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\rho v_x\frac{\partial\eta}{\partial x} + \rho v_y\chi\right)\frac{\partial v_x}{\partial\eta} = -\frac{dp}{d\xi}f + \chi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\chi\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right).$$

Разделив полученное выражение на ρf и приняв во внимание обозначение для V_y, будем иметь:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi} + \frac{\chi}{\rho f}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\chi\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right). \tag{7.72}$$

Так как по условию $\chi/\rho = \text{const}$, а f является функцией только ξ, то выражения $\chi/\rho f$, стоящие перед знаком производной в уравнении (7.72), можно внести под знак производной и мы получим:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu\chi^2}{\rho f}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right). \tag{7.73}$$

Для того чтобы последнее слагаемое в уравнении (7.73) совпадало с соответствующим выражением в уравнении для несжимаемой жидкости, мы должны положить

$$\frac{\mu\chi^2}{\rho f} = \nu'(T),$$

где ν' есть условный кинематический коэффициент вязкости. Таким образом, для определения функций f и χ мы имеем следующие два условия:

$$\frac{\chi}{\rho} = \text{const}; \qquad \frac{\mu\chi^2}{\rho f} = \nu'(T).$$

Так как χ и f — безразмерные величины, то из первого условия находим:

$$\chi = \frac{\rho}{\rho_0}, \text{ и, следовательно, } \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}\, dy.$$

Второе условие теперь примет вид

$$\frac{\mu\rho}{\rho_0^2 f} = \nu'(T).$$

Подставляя сюда значения μ и ρ из (7.66) и (7.67), находим:

$$\nu'(T) = \frac{\mu_0}{\rho_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{p}{p_0 f}.$$

Так как p/p_0 и f зависят только от ξ, то можно положить, что

$$\frac{p}{p_0} = f, \text{ т. е. } \xi = \int_0^x \frac{p}{p_0}\, dx;$$

тогда

$$\nu'(T) = \nu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, мы получаем следующие уравнения для пограничного слоя газового потока:

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\xi} + \nu_0\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right], \\ \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

Если в первом из этих уравнений с помощью уравнения состояния газа исключить ρ, то получим:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = -\left(\frac{T}{T_\delta}\right)\frac{1}{\rho_\delta}\frac{dp}{d\xi} + \nu_0\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right],$$

где через T_δ и ρ_δ обозначены соответственно температура и плотность на внешней границе слоя. Это уравнение совместно с уравнениями неразрывности (7.71) и преобразованным к новым переменным уравнением энергии, которое принимает вид

$$c_p\left(v_x\frac{\partial T}{\partial \xi} + V_y\frac{\partial T}{\partial \eta}\right) = v_x\left(\frac{T}{T_\delta}\right)\frac{1}{\rho_\delta}\frac{dp}{d\xi} + \nu'\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\nu'\frac{\partial T}{\partial \eta}\right),$$

представляют собой замкнутую систему уравнений, определяющих v_x, V_y и T. Отличие полученных уравнений от соответствующих уравнений для несжимаемой жидкости заключается лишь в присутствии множителя T/T_δ в слагаемом, происходящем от градиента давления, и множителя $(T/T_0)^{n-1}$ в слагаемом, происходящем от вязкости.

Если скорость движения газа меньше скорости распространения звука и передача тепла от поверхности тела отсутствует, то величина этих множителей близка к единице. В самом деле, если U даже достигает скорости звука, то, согласно формуле

$$T_0 = T_\delta[1 + (k-1)\mathrm{M}_\delta^2/2],$$

отношение T/T_δ для воздуха изменяется в пределах от 1 до 1,2, а $(T/T_0)^{n-1}$ при $n = 0{,}76$ — от 1 до 1,045. Таким образом, можно считать, что при дозвуковых скоростях влияние сжимаемости учитывается в уравнениях пограничного слоя в основном введением новых независимых переменных. Так как граничные условия для $v_x(\xi, \eta)$ и $V_y(\xi, \eta)$ в уравнениях (7.74) и для $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ в уравнениях пограничного слоя несжимаемой жидкости также одинаковы, то можно считать, что зависимость v_x и V_y от ξ и η в пограничном слое газа при дозвуковых скоростях приблизительно такая же, как зависимость v_x и v_y от x и y в соответствующем потоке несжимаемой жидкости.

Для дальнейших приложений целесообразно перейти к новым независимым переменным ξ, η также в уравнении импульсов. Будем исходить из наиболее общей формы этого уравнения (7.6), которая пригодна как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x dy = -\frac{dp}{dx}\delta - \tau_0.$$

Вводя вместо x, y переменные ξ, η, получим:

$$\frac{p}{p_0}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x^2\rho_0 d\eta - U\frac{p}{p_0}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x\rho_0 d\eta = -\frac{dp}{d\xi}\frac{p}{p_0}\delta - \tau_0;$$

здесь через δ_η обозначена величина η, соответствующая внешней границе пограничного слоя. Выразим δ также через новые переменные:

$$\delta = \int_0^\delta dy = \int_0^{\delta_\eta} \frac{\rho_0}{\rho} d\eta.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство и учитывая, что

$$\frac{dp}{d\xi} = -\rho_\delta UU'_\xi,$$

будем иметь:

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x^2 d\eta - U\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x d\eta = UU'_\xi\int_0^{\delta_\eta}\frac{\rho_\delta}{\rho}d\eta - \frac{\tau_0}{\rho_0}\frac{p_0}{p}. \qquad (7.75)$$

Перейдем в этом уравнении к характерным для пограничного слоя толщинам: толщине потери импульса ϑ и толщине вытеснения δ_*. С этой целью заметим, что

$$U\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x d\eta = \frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} Uv_x d\eta - U'_\xi \int_0^{\delta_\eta} v_x d\eta;$$

в силу этого равенства уравнение импульсов можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\delta_\eta} v_x(U - v_x)\,d\eta + U'_\xi \int_0^{\delta_\eta}\left(\frac{\rho_\delta}{\rho}U - v_x\right)d\eta = \frac{\tau_0}{\rho_0}\frac{p_0}{p}. \qquad (7.76)$$

Обозначим теперь

$$\vartheta = \int_0^{\delta_\eta}\frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right)d\eta, \qquad \delta_* = \int_0^{\delta_\eta}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right)d\eta, \qquad \theta = \int_0^{\delta_\eta}\left(1 - \frac{\rho_\delta}{\rho}\right)d\eta.$$

Преобразуем, кроме того, выражение под знаком интеграла во втором слагаемом

$$\frac{\rho_\delta}{\rho}U - v_x = U\left[\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) + \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - 1\right)\right].$$

Подставив это выражение в уравнение импульсов (7.76) и разделив его почленно на U^2, после несложных преобразований получим:

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{U'_\xi\vartheta}{U}(2 + H - h) = \frac{\tau_0}{\rho_0 U^2}\frac{p_0}{p}, \qquad (7.77)$$

где

$$H = \frac{\delta_*}{\vartheta}, \qquad h = \frac{\theta}{\vartheta}.$$

В несжимаемой жидкости $\rho = \rho_\delta = \text{const}$; при этом ξ переходит в x, η — в y, дифференциальные уравнения движения (7.74) и уравнение импульсов (7.77) — соответственно в уравнения (7.4) и (7.9) для пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

§ 23. Ламинарный пограничный слой плоской пластинки в сжимаемой среде. Влияние сжимаемости среды на сопротивление трению

Применим общие уравнения, составленные в предыдущем параграфе, к частному случаю продольно обтекаемой плоской пластинки. Будем при этом исходить из дифференциальных уравнений движения (7.74), которые в данном частном случае ($dp/d\xi = 0$) примут вид

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi} + V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta} &= \nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right], \\ \frac{\partial v_x}{\partial\xi} + \frac{\partial V_y}{\partial\eta} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.78)$$