

Перейдем в этом уравнении к характерным для пограничного слоя толщинам: толщине потери импульса ϑ и толщине вытеснения δ_* . С этой целью заметим, что

$$U \frac{d}{d\xi} \int_0^{\delta_\eta} v_x d\eta = \frac{d}{d\xi} \int_0^{\delta_\eta} U v_x d\eta - U'_\xi \int_0^{\delta_\eta} v_x d\eta;$$

в силу этого равенства уравнение импульсов можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\delta_\eta} v_x (U - v_x) d\eta + U'_\xi \int_0^{\delta_\eta} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} U - v_x \right) d\eta = \frac{\tau_0}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (7.76)$$

Обозначим теперь

$$\vartheta = \int_0^{\delta_\eta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\eta, \quad \delta_* = \int_0^{\delta_\eta} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\eta, \quad \theta = \int_0^{\delta_\eta} \left(1 - \frac{\rho_\delta}{\rho} \right) d\eta.$$

Преобразуем, кроме того, выражение под знаком интеграла во втором слагаемом

$$\frac{\rho_\delta}{\rho} U - v_x = U \left[\left(1 - \frac{v_x}{U} \right) + \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - 1 \right) \right].$$

Подставив это выражение в уравнение импульсов (7.76) и разделив его почленно на U^2 , после несложных преобразований получим:

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{U'_\xi \vartheta}{U} (2 + H - h) = \frac{\tau_0}{\rho_0 U^2} \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (7.77)$$

где

$$H = \frac{\delta_*}{\vartheta}, \quad h = \frac{\theta}{\vartheta}.$$

В несжимаемой жидкости $\rho = \rho_\delta = \text{const}$; при этом ξ переходит в x , η — в y , дифференциальные уравнения движения (7.74) и уравнение импульсов (7.77) — соответственно в уравнения (7.4) и (7.9) для пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

§ 23. Ламинарный пограничный слой плоской пластинки в сжимаемой среде. Влияние сжимаемости среды на сопротивление трению

Применим общие уравнения, составленные в предыдущем параграфе, к частному случаю продольно обтекаемой плоской пластинки. Будем при этом исходить из дифференциальных уравнений движения (7.74), которые в данном частном случае ($dp/d\xi = 0$) примут вид

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial \eta} &= v_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right], \\ \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.78)$$

В предыдущем параграфе уже указывалось, что если скорость движения в пограничном слое не превосходит скорость распространения звука, то множитель $(T/T_0)^{n-1}$ весьма близок к единице (изменяется в пределах от 1 до 1,045). Поэтому для упрощения вычислений можно без большой погрешности принять этот множитель равным единице или, что все равно в смысле тождественности получаемых результатов, принять $n = 1$, т. е. считать μ пропорциональным T . Тогда уравнения (7.78) будут в точности совпадать с уравнениями (7.11) для пограничного слоя при обтекании плоской пластинки несжимаемой жидкостью, коэффициент кинематической вязкости которой равен ν_0 . Граничные условия для v_x и V_y также совпадают с соответствующими граничными условиями в случае несжимаемой жидкости. Мы можем поэтому воспользоваться для определения $v_x(\xi, \eta)$ и $V_y(\xi, \eta)$ готовым решением, которое было получено в § 6.

Заменяя в формулах § 6 x на ξ , y на η , ν на ν_0 , получаем, в частности:

$$v_x = \frac{1}{2} V_\infty f' \left(\frac{\eta}{\xi} \right) = \frac{1}{2} V_\infty f' \left(\frac{1}{2} \eta \sqrt{\frac{V}{\nu_0 \xi}} \right),$$

где V_∞ есть скорость набегающего потока, а f — функция, удовлетворяющая уравнению (7.12) и соответствующим граничным условиям. Для того чтобы найти распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое плоской пластинки в сжимаемой среде, следует перейти в последней формуле от ξ и η к x и y . В данном случае это облегчается тем, что в пограничном слое плоской пластинки $p = \text{const}$ и, следовательно,

$$\xi = \frac{p}{\rho_0} x.$$

Желая составить себе представление о том, как влияет сжимаемость среды на профиль продольной скорости, вычислим $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. По формулам § 6 имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_0 \xi}} f'' = \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_0 x}} \sqrt{\frac{\rho_0}{p}} f'';$$

перейдем здесь к производной по y :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{p}} \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_0 x}} f''.$$

Обозначая величины ρ и p на поверхности пластинки соответственно через ρ_w и p_w и принимая во внимание, что при $y = 0$ $f'' = 1,328$, получаем:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 1,328 \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_0 x}} \frac{\rho_w}{\rho_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{p_w}}.$$

Выразим здесь плотность ρ_w через давление и температуру (по уравнению состояния) и заменим p_w на p_δ (по свойству давлений в пограничном слое); тогда будем иметь:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 1,328 \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_0 x}} \sqrt{\frac{p_\delta}{\rho_0} \frac{T_0}{T_w}}, \quad (7.79)$$

где T_w — температура среды на поверхности пластинки, причем T_w , вообще говоря, не совпадает с температурой адиабатического торможения T_0 . Из уравнения энергии (7.68) следует, что в случае теплоизолированной пластинки $T_w < T_0$, ибо часть температурного градиента компенсируется в пограничном слое теплом, полученным в результате работы сил вязкости. Так как $T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)$, то для T_w применяют аналогичную формулу

$$T_w = T_\infty \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right),$$

где коэффициент $r = (T_w - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ называется *коэффициентом восстановления температуры* и характеризует, насколько действительный процесс торможения в пограничном слое близок к адиабатическому, при котором $r = 1$. Расчеты, основанные на уравнении энергии, показывают, что для воздуха при ламинарном течении коэффициент r равен приблизительно 0,85.

Возвращаясь теперь к формуле (7.79) и замечая, что

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0} = \frac{\mu_\infty \frac{T_0}{T_\infty}}{\rho_\infty \frac{p_0}{\rho_\infty} \frac{T_\infty}{T_0}} = \nu_\infty \frac{p_\infty}{p_0} \left(\frac{T_0}{T_\infty}\right)^2,$$

получим:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2} \cdot 1,328 \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_\infty x}}. \quad (7.80)$$

Отсюда видно, что с возрастанием числа M_∞ наклон к оси y кривой распределения продольной скорости уменьшается.

Следует отметить, что если ввести в последнюю формулу вместо ν_∞ значение ν на поверхности пластинки, то число M_∞ явно не войдет в выражение для $(\partial v_x/\partial y)_{y=0}$ и наклон к оси y кривой распределения продольной скорости в газе будет в начальной точке таким же, как в несжимаемой жидкости, имеющей то же значение ν , что и газ на поверхности пластинки. Действительно,

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_w} = \frac{\mu_\infty}{\mu_w} \frac{\rho_w}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T_w} \frac{p_\delta}{p_\infty} \frac{T_\infty}{T_w} = \left(\frac{T_\infty}{T_w}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (7.80), получаем:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 1,328 \frac{V_\infty}{4} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu_w x}}.$$

Независимость величины $(\partial v_x / \partial y)_{y=0}$, выраженной через ν_w , от числа M_∞ иллюстрируется рис. 7.56, на котором представлен результат точного решения уравнений (7.78) для плоской пластинки (ход решения аналогичен изложенному в § 6 для несжимаемой жидкости).

На рис. 7.56 изображены профили скорости в пограничном слое плоской пластинки для несжимаемой жидкости и для газа ($k = 1,41$) при $M_\infty = 3,05$. Несмотря на сравнительно большую величину числа M_∞ , профили скорости для несжимаемой жидкости и для газа в переменных Дородницына весьма близки друг к другу. Профиль скорости для газа, в котором v_x / V_∞ выражено через ν_w , существенно отличается от профиля для несжимаемой жидкости. При одинаковых значениях y здесь будут значительно меньшие скорости, нежели в случае несжимаемой жидкости, имеющей то же значение ν_w . Весь профиль скорости с увеличением числа M_∞ (и при одном и том же значении ν_w) как бы растягивается вдоль оси y и в результате толщина пограничного слоя резко увеличивается.

Перейдем теперь к выяснению влияния сжимаемости среды на касательные напряжения на поверхности пластинки и сопротивление трению (при любой величине показателя степени n). С этой целью применим уравнение импульсов (7.75). Как известно из предыдущего, для этого следует задаться распределением скорости по сечению слоя, например, в виде полинома и определить коэффициенты этого полинома из граничных условий. Для упрощения вычислений примем, так же как и в § 7, линейный закон распределения скоростей по сечению слоя:

$$v_x = \frac{V_\infty}{\delta} \eta.$$

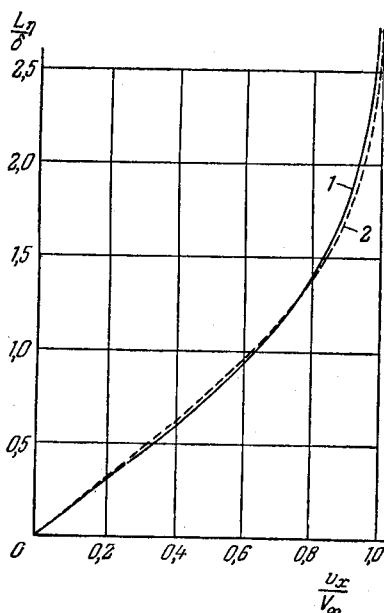


Рис. 7.56. Распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое плоской пластинки для несжимаемой жидкости (2) и для газа (1) при $M_\infty = 3,05$. Профиль скорости для газа в переменных η и v_x / V_∞ весьма близок к профилю скорости для несжимаемой жидкости.

Касательное напряжение определится по закону Ньютона

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \mu_w \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_w \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{y=0} = \\ &= \mu_0 \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^n \frac{V_\infty}{\delta_\eta} \frac{\rho_w}{\rho_0} \frac{T_0}{T_w} = \mu_0 \frac{V_\infty}{\delta_\eta} \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для v_x и τ_0 в уравнение (7.75), получим:

$$\frac{1}{6} V_\infty \frac{d\delta_\eta}{d\xi} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{1}{\delta_\eta} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n-1}.$$

Интегрируя это уравнение в предположении, что $T_w = \text{const}$, и принимая в качестве начального условия, что при $\xi = 0$ $\delta_\eta = 0$, найдем, аналогично тому как это было сделано для несжимаемой жидкости (§ 7),

$$\delta_\eta = 3,46 \sqrt{\frac{\nu_0 \xi}{V_\infty}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{(n-1)/2} = 3,46 \sqrt{\frac{\nu_0 x}{V_\infty}} \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho_0}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{(n-1)/2}.$$

Формула для касательного напряжения на поверхности пластинки теперь примет вид

$$\tau_0 = \mu_0 \frac{V_\infty}{\delta_\eta} \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n-1} = 0,289 \frac{\mu_0 V_\infty^{3/2}}{\sqrt{\nu_0 x}} \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho_0}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{(n-1)/2}.$$

Выразим здесь μ_0 и ν_0 через одноименные величины в бесконечно удаленной точке

$$\mu_0 = \mu_\infty \left(\frac{T_0}{T_\infty} \right)^n, \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \left(\frac{T_0}{T_\infty} \right)^{n+1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для τ_0 и переходя к безразмерному коэффициенту касательного напряжения $\bar{\tau}_0$, получим:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_0 &= \frac{\tau_0}{\rho_\infty V_\infty^2} = 0,578 \sqrt{\frac{\nu_\infty}{V_\infty x}} \left(\frac{T_w}{T_\infty} \right)^{(n-1)/2} = \\ &= 0,578 \sqrt{\frac{\nu_\infty}{V_\infty x}} \frac{1}{\left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{(1-n)/2}}.\end{aligned}$$

Из этой формулы видно, что так как $n < 1$, то с возрастанием M_∞ коэффициент касательного напряжения убывает.

Коэффициент одностороннего сопротивления пластинки при ее продольном обтекании выражается через $\bar{\tau}_0$ известной формулой

$$c_x = \int_0^1 \bar{\tau}_0 dx.$$

Выполняя указанное здесь интегрирование, получим:

$$c_x = \frac{1,156}{\left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{(1-n)/2}} \frac{1}{\sqrt{R}},$$

где $R = VL/\nu_\infty$. С возрастанием числа M_∞ коэффициент сопротивления трению, так же как и τ_0 , убывает.

Точное вычисление коэффициента сопротивления плоской пластинки показывает, что для c_x получается формула такого же вида, как выведенная здесь, с той лишь разницей, что численный коэффициент должен быть заменен переменной величиной φ , немного изменяющейся при изменении числа M_∞ . Таким образом, точная формула для c_x при ламинарном пограничном слое имеет вид

$$c_x = \frac{\varphi}{\left(1 + r \frac{k-1}{2} M_\infty^2\right)^{(1-n)/2}} \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

При $M_\infty = 0$ $\varphi = 1,328$ (что соответствует точному решению для несжимаемой жидкости), при $M_\infty = 1$ $\varphi = 1,334$; из этих цифр видно, что при расчетах можно не учитывать изменения φ при изменении M_∞ и считать, что $\varphi = 1,328$.

Простые приближенные формулы для толщины пограничного слоя и сопротивления трению плоской пластинки при ламинарном течении в слое предложены Г. Ф. Бурого; они имеют вид

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{несж}} = (1 + 0,1M_\infty^2)^{7/8}; \quad \frac{c_{x\ сж}}{c_{x\ несж}} = \frac{1}{(1 + 0,1M_\infty^2)^{1/8}}.$$

Эти формулы пригодны как для $M_\infty \leq 1$, так и для $M_\infty > 1$.

§ 24. Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя криволинейной поверхности в сжимаемой среде

Рассмотрим теперь пограничный слой в сжимаемой среде при наличии в нем продольного градиента давления. При этом мы ограничимся простейшим случаем, когда количество тепла, выделенного в пограничном слое в результате работы сил вязкости, равно количеству тепла, отведенного путем теплопроводности. В этом случае в уравнении энергии для пограничного слоя

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + c_p T \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

правая часть будет равна нулю и это уравнение будет выглядеть так же, как для идеального газа при адиабатическом процессе:

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \frac{v_{\max}^2}{2} = \text{const.}$$

Иными словами, температура в этом случае связана со скоростью соотношением

$$T = T_0 \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right) \approx T_0 \left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\max}^2} \right). \quad (7.81)$$