где $\mathsf{R} = VL/\nu_\infty$. С возрастанием числа M_∞ коэффициент сопротивления трению, так же как и $\bar{\tau}_0$, убывает.

Точное вычисление коэффициента сопротивления плоской пластинки показывает, что для c_x получается формула такого же вида, как выведенная здесь, с той лишь разницей, что численный коэффициент должен быть заменен переменной величиной φ, немного изменяющейся при изменении числа M_∞. Таким образом, точная формула для c_x при ламинарном пограничном слое имеет вид

$$c_x = \frac{\varphi}{\left(1 + r\,\frac{k-1}{2}\,\mathsf{M}_\infty^2\right)^{(1-n)/2}}\,\frac{1}{\sqrt{\mathsf{R}}}.$$

При $\mathsf{M}_\infty = 0$ $\varphi = 1{,}328$ (что соответствует точному решению для несжимаемой жидкости), при $\mathsf{M}_\infty = 1$ $\varphi = 1{,}334$; из этих цифр видно, что при расчетах можно не учитывать изменения φ при изменении M_∞ и считать, что $\varphi = 1{,}328$.

Простые приближенные формулы для толщины пограничного слоя и сопротивления трению плоской пластинки при ламинарном течении в слое предложены Г. Ф. Бураго; они имеют вид

$$\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{несж}}} = \left(1 + 0{,}1\mathsf{M}_\infty^2\right)^{7/8}; \qquad \frac{c_{x\,\text{сж}}}{c_{x\,\text{несж}}} = \frac{1}{\left(1 + 0{,}1\mathsf{M}_\infty^2\right)^{1/8}}.$$

Эти формулы пригодны как для $\mathsf{M}_\infty \leqslant 1$, так и для $\mathsf{M}_\infty > 1$.

§ 24. Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя криволинейной поверхности в сжимаемой среде

Рассмотрим теперь пограничный слой в сжимаемой среде при наличии в нем продольного градиента давления. При этом мы ограничимся простейшим случаем, когда количество тепла, выделенного в пограничном слое в результате работы сил вязкости, равно количеству тепла, отведенного путем теплопроводности. В этом случае в уравнении энергии для пограничного слоя

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + c_p\,T\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

правая часть будет равна нулю и это уравнение будет выглядеть так же, как для идеального газа при адиабатическом процессе:

$$\frac{v^2}{2} + c_pT = c_pT_0 = \frac{v_{\max}^2}{2} = \text{const}.$$

Иными словами, температура в этом случае связана со скоростью соотношением

$$T = T_0\left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right) \approx T_0\left(1 - \frac{v_x^2}{v_{\max}^2}\right). \tag{7.81}$$

Между μ, λ и c_p в рассматриваемом случае существует простая зависимость. Так как на основании последней формулы имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{T_0}{v_{\max}^2}\frac{\partial v_x^2}{\partial y}=-\frac{1}{c_p}v_x\frac{\partial v_x}{\partial y},$$

то правая часть уравнения энергии может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\left(\mu-\frac{\lambda}{c_p}\right)\right].$$

Это выражение равно нулю при произвольном распределении скорости в пограничном слое лишь в том случае, если $\mu=\lambda/c_p$, т. е. если величина $\mu c_p/\lambda$, которая, как известно из гл. III, называется числом Прандтля, равна единице. Итак, мы ограничимся случаем, когда $\mathrm{Pr}=1$.

Распределение температуры в пограничном слое (7. 81) определяет в этом случае соответствующее распределение плотности и вязкости. В самом деле,

$$\frac{\rho_\delta}{\rho}=\frac{p_\delta}{p}\frac{T}{T_\delta}=\frac{1-\dfrac{v_x^2}{v_{\max}^2}}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}};\quad \mu/\mu_0=\left(\frac{T}{T_0}\right)^n=\left(1-\frac{v_x^2}{v_{\max}^2}\right)^n. \tag{7.82}$$

С помощью этих равенств можно исключить ρ и T из уравнения движения для пограничного слоя газа (7. 74). Заменяя одновременно в этом уравнении $dp/d\xi$ на $-\rho_\delta UU'_\xi$, мы приведем это уравнение к следующему виду:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta}=\frac{1-\dfrac{v_x^2}{v_{\max}^2}}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}UU'_\xi+\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\frac{v_x^2}{v_{\max}^2}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right].$$

Дифференциальные уравнения (7. 74) можно свести к одному уравнению, если выразить v_x и V_y через функцию тока ψ

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\qquad V_y=-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}.$$

Эти выражения тождественно удовлетворяют второму из уравнений (7. 74). Подставляя эти выражения в первое из уравнений (7.74), получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{v_{\max}^2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}UU'_\xi+\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\left[1-\frac{1}{v_{\max}^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right]^{n-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right\}.$$

Множитель $\left[1-\dfrac{1}{v_{\max}^2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right]^{n-1}$, как уже указывалось в § 23, изменяется в пограничном слое весьма незначительно и при дозвуковых скоростях близок к единице. Положим, в целях упрощения, этот множитель равным единице или, что все равно, n равным единице; уравнение для функции тока тогда примет следующий вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{1-\dfrac{1}{v_{\max}^2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}UU'_\xi+\nu_0\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}. \qquad (7.83)$$

Для этого уравнения может быть найдено семейство точных решений, подобно тому как это было сделано по отношению к уравнению (7.39) для несжимаемой жидкости.

Введем вместо η новую независимую переменную

$$\eta_1=\eta\varphi(\xi)$$

и будем искать решение уравнения (7. 84) в виде

$$\psi=U\frac{\Phi(\eta_1)}{\varphi(\xi)}.$$

В результате вычислений, аналогичных тем, которые были выполнены в § 15, уравнение (7. 83) перейдет в следующее:

$$\frac{U'_\xi}{\nu_0\varphi^2}\Phi'^2-\frac{1}{\nu_0}\left(\frac{U'_\xi}{\varphi^2}-\frac{U\varphi'}{\varphi^3}\right)\Phi\Phi''=\frac{U'_\xi}{\nu_0\varphi^2}\,\frac{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}\Phi'^2}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}+\Phi'''.$$

Собирая в левой части равенства слагаемые, содержащие Φ'^2, получим:

$$\frac{U'_\xi}{\nu_0\varphi^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}\Phi'^2-\frac{1}{\nu_0}\left(\frac{U'_\xi}{\varphi^2}-\frac{U\varphi'}{\varphi^3}\right)\Phi\Phi''=\frac{U'_\xi}{\nu_0\varphi^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}+\Phi'''.$$

Для того чтобы существовало решение этого уравнения Φ, зависящее только от η_1, коэффициенты и свободный член уравнения не должны зависеть от ξ, т. е. должны представлять собой постоянные величины. Отсюда получаем следующие два равенства:

$$\frac{1}{\nu_0}\frac{U'_\xi}{\varphi^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}=a_{\text{сж}}=\text{const},\qquad \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{U'_\xi}{\varphi^2}-\frac{U\varphi'}{\varphi^3}\right)=b_{\text{сж}}=\text{const}.$$

Если эти равенства выполняются, то для $\Phi(\eta_1)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{\text{сж}}\Phi'^2-b_{\text{сж}}\Phi\Phi''=a_{\text{сж}}+\Phi'''. \qquad (7.84)$$

Это уравнение с точностью до обозначений независимых переменных и коэффициентов совпадает с уравнением (7. 43). Граничные условия для искомой функции в обоих уравнениях также совпадают. Таким образом, зная решения уравнения (7. 43), мы сразу получаем решения последнего уравнения: нужно только в решениях уравнения (7. 43) заменить независимые переменные x и y соответственно на ξ и η, коэффициент вязкости ν — на ν_0 и параметры a и b — на $a_{\text{сж}}$ и $b_{\text{сж}}$.

Решения уравнения (7. 43), удовлетворяющие граничным условиям (при $\eta_1=0$ $\Phi=\Phi'=0$, при $\eta_1=\infty$ $\Phi'=1$) представляют собой семейство функций, зависящих от двух параметров a и b. Для частного случая, когда $b=1$, уравнение (7.43) численно проинтегрировано и его решения, зависящие от одного параметра $\beta = a/b$, положены в основу приближенного метода Кочина—Лойцянского для расчета ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Эти же решения пригодны, с соответствующей заменой обозначений, и для пограничного слоя в сжимаемой жидкости.

Следует, однако, отметить, что переменные ξ, η здесь не обладают тем свойством, которое они имеют в случае плоской пластинки. В предыдущем параграфе было показано, что в ламинарном пограничном слое плоской пластинки распределение скоростей в переменных ξ, η остается одним и тем же при всех значениях M_∞ и, следовательно, одинаково для сжимаемой и несжимаемой жидкости. В отличие от этого распределение скоростей в пограничном слое, соответствующее решениям последнего уравнения, зависит от M_∞. В самом деле, как видно из формул для $a_{\text{сж}}$ и $b_{\text{сж}}$, параметр $\beta_{\text{сж}}$, определяющий профиль скорости из семейства профилей $\frac{v_x}{U} = \Phi'(\eta_1, \beta_{\text{сж}})$, равен

$$\beta_{\text{сж}} = \frac{a_{\text{сж}}}{b_{\text{сж}}} = \frac{a}{b}\,\frac{1}{1 - \dfrac{U^2}{v_{\max}^2}} = \beta\,\frac{1}{1 - \dfrac{U^2}{v_{\max}^2}} = \beta\,\frac{1}{1 - \dfrac{k-1}{2}\,\dfrac{U^2}{a_0^2}}.$$

Если распределение скоростей при потенциальном обтекании данного контура $U(x)$ не изменяется при изменении числа M, то и величина β остается постоянной, ибо

$$\beta = \frac{U'_\xi}{\varphi^2\left(\dfrac{U'_\xi}{\varphi^2} - \dfrac{U\varphi'_\xi}{\varphi^3}\right)} = \frac{U'_x}{\varphi^2\left(\dfrac{U'_x}{\varphi^2} - \dfrac{U\varphi'_x}{\varphi^3}\right)}.$$

Следовательно, параметр $\beta_{\text{сж}}$ возрастает по абсолютной величине при возрастании числа M_∞. Таблица 7 (стр. 736) показывает, что при этом в области положительных значений β происходит возрастание коэффициента касательного напряжения, а в области отрицательных значений β — убывание коэффициента касательного напряжения. Отсюда следует, что с *возрастанием числа* M_∞ *и при неизменном* $U(x)$, соответствующем решению уравнения (7.43), *точка отрыва пограничного слоя перемещается против набегающего потока*, т. е. по направлению к носовой точке контура.

Имея семейство точных решений уравнения (7.84), зависящих от одного параметра, можно воспользоваться ими для приближенного расчета пограничного слоя при любом распределении скорости в потенциальном потоке (аналогично тому как это было сделано для несжимаемой жидкости). Будем полагать с этой целью, что в выражении

$$\frac{v_x}{U} = \Phi'(\eta_1, \beta_{\text{сж}})$$

параметр $\beta_{\text{сж}}$ есть величина переменная вдоль контура тела, и определим $\beta_{\text{сж}}(\xi)$ из уравнения импульсов.

Приведем предварительно уравнение импульсов (7.77) к виду, аналогичному (7.48). При ламинарном пограничном слое касательное напряжение определяется законом Ньютона, согласно которому

$$\tau_0 = \mu_w \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu_w \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu_w \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \frac{\rho_w}{\rho_0} =$$
$$= \mu_0 \frac{T_w}{T_0} \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \frac{\rho_w}{\rho_0} = \mu_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \frac{p_w}{p_0}.$$

Правая часть уравнения (7. 77) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\tau_0}{\rho_0 U^2}\,\frac{p_w}{p_0}=\frac{\mu_0}{\rho_0 U^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=\frac{\nu_0 \zeta}{U \vartheta},$$

где ζ есть безразмерный коэффициент, определяемый соотношением

$$\frac{U}{\vartheta}\,\zeta=\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}.$$

На основании равенства (7. 83) величина h в уравнении (7. 77) равна

$$h=\frac{\theta}{\vartheta}=-\frac{\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}(1+H).$$

Подставляя в уравнение (7. 77) вместо правой части ее выражение, получим:

$$\frac{U}{2\nu_0}\,\frac{d(\vartheta^2)}{d\xi}+\frac{U'_\xi\vartheta^2}{\nu_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}\left[2\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)+\frac{U^2}{v_{\max}^2}+H\right]=\zeta.$$

Введем вместо ϑ параметр f, равный

$$f=\frac{U'_\xi\vartheta^2}{\nu_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}=\frac{U'_\xi\vartheta^2}{\nu_0}\,\frac{T_0}{T_\delta}\,. \tag{7.85}$$

Вычислим $d(\vartheta^2)/d\xi$; так как

$$\vartheta^2=\frac{f\nu_0}{U'_\xi}\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)=\frac{f\nu_0}{U'_\xi}\,\frac{T_\delta}{T_0},$$

то

$$\frac{d(\vartheta^2)}{d\xi}=\nu_0\,\frac{f'U'_\xi-U''_\xi f}{U'^2_\xi}\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)-\nu_0\,\frac{f}{U'_\xi}\,\frac{2UU'_\xi}{v_{\max}^2}.$$

Уравнение импульсов теперь примет вид

$$\frac{U}{U'^2_\xi}(f'U'_\xi-U''_\xi f)\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)-4\frac{U^2 f}{v_{\max}^2}+2f(2+H)=2\zeta.$$

Решая это уравнение относительно f' и обозначая, как и для несжимаемой жидкости,

$$F=2\left[\zeta-f(2+H)\right],$$

получим:

$$\frac{df}{d\xi}=\frac{U'_\xi}{U}\,\frac{1}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}F+\left(\frac{U''_\xi}{U'_\xi}+4\frac{U'_\xi}{U}\,\frac{\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}{1-\dfrac{U^2}{v_{\max}^2}}\right)f.$$

Если жидкость несжимаема, то $v_{\max}=\infty$, $\xi=x$ и из последнего уравнения получается, как частный случай, уравнение (7. 48). Возвратимся теперь от переменной ξ к переменной x. Заметим с этой целью, что

$$\frac{df}{d\xi}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{d\xi}, \qquad U'_\xi=U'_x\frac{dx}{d\xi}, \qquad U''_\xi=U''_x\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+U'_x\frac{d^2x}{d\xi^2};$$

подставляя эти выражения в последнее уравнение, будем иметь:

$$\frac{df}{dx}=\frac{U'_x}{U}\frac{1}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}F+\left(\frac{U''_x}{U'_x}+\frac{\frac{d^2x}{d\xi^2}}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}+4\frac{U'_x}{U}\frac{\frac{U^2}{v_{\max}^2}}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}\right)f.$$

Так как

$$\frac{dx}{d\xi}=\frac{p_0}{p},$$

то

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}=-\frac{p_0}{p^2}\frac{dp}{dx}\frac{dx}{d\xi}=-\frac{p_0^2}{p^3}\frac{dp}{dx},$$

и, следовательно,

$$\frac{\frac{d^2x}{d\xi^2}}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2}=-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}=\frac{2k}{k-1}\frac{UU'_x}{v_{\max}^2}\frac{1}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}.$$

Уравнение импульсов принимает окончательно следующий вид:

$$\frac{df}{dx}=\frac{U_x'}{U}\frac{1}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}F+\left(\frac{U''_x}{U'_x}+\frac{6k-4}{k-1}\frac{U'_x}{U}\frac{\frac{U^2}{v_{\max}^2}}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}\right)f. \tag{7.86}$$

Перейдем к интегрированию этого уравнения. Так как профили безразмерной скорости в пограничном слое

$$\frac{v_x}{U}=\Phi'(\eta_1, \beta_{\text{сж}})$$

являются, по предположению, решениями уравнения (7.43), то зависимости $\zeta(f)$, $H(f)$ и $F(f)$ определяются здесь той же таблицей 7 (стр. 736), которая была составлена по решениям этого уравнения для несжимаемой жидкости. В частности, можно приближенно считать, что F есть линейная функция f

$$F=a-bf.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7.86), получим для f линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{U''_x}{U'_x}+\frac{6k-4}{k-1}\frac{U'_x}{U}\frac{\frac{U^2}{v_{\max}^2}}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}-b\frac{U'_x}{U}\frac{1}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}\right)f+a\frac{U'_x}{U}\frac{1}{1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}}.$$

Интегрируя это уравнение и обозначая

$$\frac{3k-2}{k-1}-\frac{b}{2}=m,$$

будем иметь:

$$f=\frac{aU'}{U^b\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^m}\int_0^x U^{b-1}\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^{m-1} dx;$$

начальное значение f (при $x=0$) здесь принято равным нулю. Численные значения a и b здесь те же, что и в случае несжимаемой жидкости. Вычислив по этой формуле $f(x)$, можно с помощью таблицы 7 найти значения δ_*, ϑ и ζ, соответствующие выбранным значениям x.

Затем, зная ζ, можно определить коэффициент касательного напряжения; он равен

$$\bar{\tau}_0=\frac{\tau_0}{\frac{\rho_0 U^2}{2}}=2\frac{\nu_0\zeta(f)}{U\vartheta}\frac{p_\delta}{p_0}.$$

Отсюда можно исключить величину ϑ, выразив ее через ранее найденное f; из формулы (7.85) следует

$$\vartheta=\left(\frac{f\nu_0}{U'_\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{T_\delta}{T_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{f\nu_0}{U'_x}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{p_\delta T_\delta}{p_0 T_0}}$$

Формула для коэффициента касательного напряжения теперь примет вид

$$\bar{\tau}_0=2\frac{\nu_0\zeta(f)}{U}\left(\frac{U'_x}{\nu_0 f}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho_0}}.$$

Для расчета удобно выразить здесь коэффициент кинематической вязкости в точке адиабатического торможения потока ν_0 через значение этого же коэффициента в набегающем потоке ν_∞,

$$\nu_0=\nu_\infty\left(1-\frac{V^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}-n}.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, окончательно получаем:

$$\bar{\tau}_0=2\frac{\zeta\nu_\infty^{1/2}}{U}\left(\frac{U'_x}{f}\right)^{1/2}\left(1-\frac{V^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2(k-1)}-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2(k-1)}}.$$

§ 25. Турбулентный пограничный слой и сопротивление трению плоской пластинки в сжимаемой среде без теплообмена. Применение к пограничному слою экспериментальных данных о течении газа по трубопроводам

Для расчета турбулентного пограничного слоя и сопротивления трению при обтекании пластинки сжимаемой средой могут быть использованы экспериментальные данные о турбулентном течении газа по трубопроводам, аналогично тому как это было сделано для обтекания пластинки несжимаемой средой в §§ 8—9.