

Интегрируя это уравнение и обозначая

$$\frac{3k-2}{k-1} - \frac{b}{2} = m,$$

будем иметь:

$$f = \frac{aU'}{U^b \left(1 - \frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^m} \int_0^x U^{b-1} \left(1 - \frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^{m-1} dx;$$

начальное значение f (при $x=0$) здесь принято равным нулю. Численные значения a и b здесь те же, что и в случае несжимаемой жидкости. Вычислив по этой формуле $f(x)$, можно с помощью таблицы 7 найти значения δ_* , ϑ и ζ , соответствующие выбранным значениям x .

Затем, зная ζ , можно определить коэффициент касательного напряжения; он равен

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\rho_0 U^2} = 2 \frac{\nu_0 \zeta(f) \rho_\delta}{U^\vartheta \rho_0}.$$

Отсюда можно исключить величину ϑ , выразив ее через ранее найденное f ; из формулы (7.85) следует

$$\vartheta = \left(\frac{f \nu_0}{U' \xi}\right)^{1/2} \left(\frac{T_\delta}{T_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{f \nu_0}{U' x}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\rho_\delta T_\delta}{\rho_0 T_0}}$$

Формула для коэффициента касательного напряжения теперь примет вид

$$\bar{\tau}_0 = 2 \frac{\nu_0 \zeta(f)}{U} \left(\frac{U' x}{\nu_0 f}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\rho_\delta}{\rho_0}}.$$

Для расчета удобно выразить здесь коэффициент кинематической вязкости в точке адиабатического торможения потока ν_0 через значение этого же коэффициента в набегающем потоке ν_∞ ,

$$\nu_0 = \nu_\infty \left(1 - \frac{V^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1} - n}.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу, окончательно получаем:

$$\bar{\tau}_0 = 2 \frac{\zeta \nu_\infty^{1/2}}{U} \left(\frac{U' x}{f}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2(k-1)} - \frac{n}{2}} \left(1 - \frac{U^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{2(k-1)}}.$$

§ 25. Турбулентный пограничный слой и сопротивление трению плоской пластинки в сжимаемой среде без теплообмена.

Применение к пограничному слою экспериментальных данных о течении газа по трубопроводам

Для расчета турбулентного пограничного слоя и сопротивления трению при обтекании пластинки сжимаемой средой могут быть использованы экспериментальные данные о турбулентном течении газа по трубопроводам, аналогично тому как это было сделано для обтекания пластинки несжимаемой средой в §§ 8—9.

Опыты по измерению скоростей в поперечном сечении трубопровода, по которому течет воздух, и по измерению сопротивления трубопровода показали, что если теплообмен между стенками трубопровода и потоком отсутствует, то сжимаемость потока практически не влияет на распределение скоростей и коэффициент сопротивления¹⁾.

На рис. 7.57 показано распределение скоростей вблизи стенки трубы прямоугольного поперечного сечения при $M = 2$. Из графика

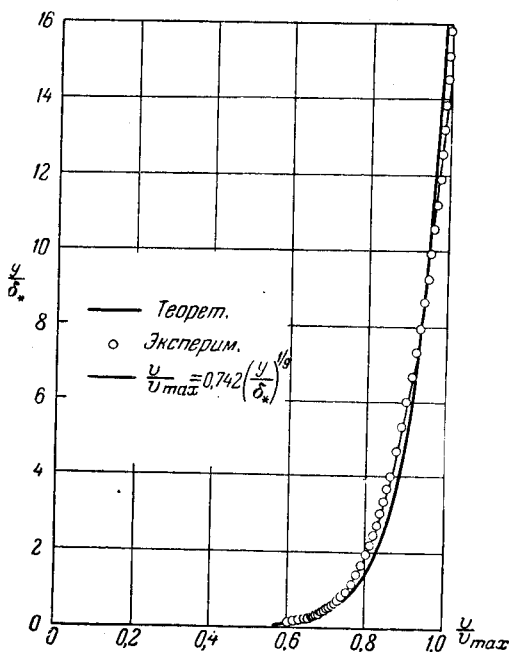


Рис. 7.57. Распределение скоростей вблизи стенки трубопровода в турбулентном потоке газа при $M \approx 2$ (по экспериментальным данным и по степенному закону).

видно, что это распределение скоростей очень хорошо изображается степенным законом с показателем степени, равным $1/9$. Число Рейнольдса для плоской пластинки, соответствующее этим опытным данным, было вычислено по толщине потери импульса и оказалось равным $50 \cdot 10^6$. Для несжимаемой среды (т.е. при $M = 0$) этому значению числа Рейнольдса соответствует примерно такая же величина показателя степени n в формуле для степенного распределения скоростей.

¹⁾ См. Eckert H., Characteristics of the turbulent boundary layer on a flat plate in compressible flow, JAS, 1950, № 9, а также Wilson R., Turbulent boundary layer characteristics at supersonic speeds, JAS, 1950, № 9.

На рис. 7.58 изображена зависимость коэффициента сопротивления трубопровода λ от числа Рейнольдса. Крестиками и кружочками отмечены экспериментальные точки, относящиеся к течению воздуха при числах M (на входе в трубу) от 1,7 до 3,6. Сплошной линией изображена зависимость λ от R по универсальному логарифмическому закону, выведенному для течения несжимаемой жидкости; пунктирной линией — степенная формула для λ , которая также была установлена, как известно из предыдущей главы, для несжимаемой жидкости. С достаточной точностью можно считать, как видно из этого графика,

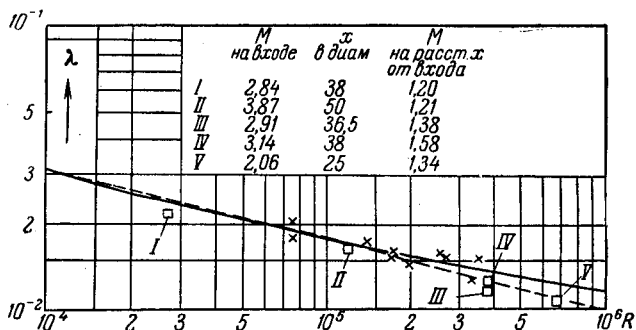


Рис. 7.58. Зависимость коэффициента сопротивления трубопровода от числа Рейнольдса при различных значениях M . Крестиками отмечены экспериментальные точки, относящиеся к сопротивлению, среднему по длине трубы, которая изменялась от 1,6 до 27 диаметров. Числа M на входе в трубу изменялись от 1,7 до 3,6. Квадратиками отмечены экспериментальные точки, относящиеся к местным значениям λ , которые были определены на расстоянии x от входа в трубу (см. таблицу).

что коэффициент сопротивления трубопровода при течении сжимаемой среды в случае небольших сверхзвуковых скоростей имеет ту же величину, что и при течении несжимаемой жидкости с теми же числами Рейнольдса.

При экспериментальном определении λ для воздухопроводов измерялся массовый расход воздуха (а не объемный, как в случае несжимаемой жидкости), т.е. расход, равный

$$Q_m = \int_{(S)} \rho v dS,$$

где S есть поперечное сечение воздухопровода; поэтому значения λ были вычислены по средней плотности, равной отношению массового расхода к объемному

$$\rho_{cp} = \frac{Q_m}{Q_0} = \frac{1}{Sv_{cp}} \int \rho v dS.$$

Выражая λ через касательное напряжение по формуле, приведенной в гл. II, § 15, мы можем написать, что для воздухопровода

$$\lambda = 4 \overline{\tau_0} = \frac{4 \tau_0}{\frac{\rho_{\text{ср}} v_{\text{ср}}^2}{2}}. \quad (7.87)$$

По величине средней плотности могут быть определены и другие параметры, характеризующие газовую среду: средняя температура

$$T_{\text{ср}} = \frac{p}{\rho_{\text{ср}} R},$$

где R есть газовая постоянная, средняя величина коэффициента вязкости

$$\mu_{\text{ср}} = \mu_u \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_u} \right)^m, \quad (7.88)$$

где индекс u означает, что величины относятся к оси воздухопровода и т. д.

Примем для λ , на основании графика на рис. 7.58, степенную зависимость от числа Рейнольдса

$$\lambda = \frac{0,3164}{R^{1/4}}, \quad (7.89)$$

где $R = \frac{v_{\text{ср}} \rho_{\text{ср}} d}{\mu_{\text{ср}}}$. Сопоставляя формулы (7.87) и (7.89), находим, что

$$\tau_0 = 0,0790 \frac{\rho_{\text{ср}} v_{\text{ср}}^2}{2} \left(\frac{\mu_{\text{ср}}}{v_{\text{ср}} \rho_{\text{ср}} d} \right)^{1/4}.$$

Для того чтобы применить эту формулу к расчету пограничного слоя, заменим в ней по известной аналогии между трубопроводом и пограничным слоем радиус трубопровода $d/2$ на толщину пограничного слоя δ и перейдем от средних по сечению величин к величинам, относящимся к оси трубопровода или, что все равно по упомянутой аналогии, к величинам, относящимся к внешней границе пограничного слоя. Так как формуле (7.89) для λ соответствует закон корня седьмой степени для распределения скоростей, то соотношение между $v_{\text{ср}}$ и U имеет вид

$$v_{\text{ср}} = 0,817 U.$$

Среднюю по сечению пограничного слоя плотность $\rho_{\text{ср}}$ выразим через среднюю температуру с помощью уравнения состояния газа; считая при этом давление постоянным по сечению слоя, получим:

$$\frac{\rho_{\text{ср}}}{\rho_u} = \frac{T_u}{T_{\text{ср}}}.$$

Среднюю по сечению величину μ заменим на величину μ на внешней границе слоя по формуле (7.88). В результате всех этих подстановок будем иметь:

$$\tau_0 = 0,0466 \frac{\rho_\delta U^2}{2} \left(\frac{\nu_\delta}{U\delta} \right)^{1/4} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_\delta} \right)^{-\frac{3-m}{4}}.$$

Воспользуемся теперь уравнением импульсов для пограничного слоя; в случае плоской пластинки (т.е. при $U = V_\infty = \text{const}$) оно будет иметь вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho v_x (U - v_x) dy = 0,0466 \frac{\rho_\delta U^2}{2} \left(\frac{\nu_\delta}{U\delta} \right)^{1/4} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_\delta} \right)^{-(3-m)/4},$$

или, после деления на $\rho_\delta U^2$,

$$\frac{d\delta}{dx} = 0,0233 \left(\frac{\nu_\delta}{U\delta} \right)^{1/4} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_\delta} \right)^{-(3-m)/4}, \quad (7.90)$$

где δ есть толщина потери импульса, равная

$$\delta = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) dy = \delta \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\left(\frac{y}{\delta} \right).$$

Обозначим последний интеграл, представляющий собой отношение δ/δ , через Θ :

$$\Theta = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\bar{y},$$

где $\bar{y} = y/\delta$. Для его вычисления предположим, что скорость v_x распределена по сечению пограничного слоя по степенному закону

$$\frac{v_x}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} = \bar{y}^{1/n}.$$

Отношение плотностей ρ/ρ_δ выразим через число M_∞ с помощью уравнения (7.82); тогда, воспользовавшись степенным законом, получим:

$$\frac{\rho_\delta}{\rho} = \frac{T}{T_\delta} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{U^2}{a_\infty^2} \left(1 - \bar{y}^{2/n} \right) = 1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \bar{y}^{2/n} \right).$$

Подставляя это выражение в формулу для Θ , будем иметь:

$$\Theta = \int_0^1 \frac{\bar{y}^{-1/n} (1 - \bar{y}^{1/n})}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 (1 - \bar{y}^{2/n})} d\bar{y}.$$

Отсюда видно, что Θ не зависит от x , т.е. постоянно по длине пластинки и является функцией лишь от двух параметров: n и M_∞ . Значения Θ , найденные в результате вычисления последнего интеграла,

представлены в виде семейства кривых, построенных для разных значений n , на рис. 7.59.

Аналогично может быть вычислена с помощью степенного закона распределения скоростей и формулы для ρ/ρ_δ толщина вытеснения δ_* , равная¹⁾

$$\delta_* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho_\delta U}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho v_x}{\rho_\delta U}\right) d\bar{y}.$$

Отношение δ_*/δ , которое мы обозначим через Δ , изображено как функция от M_∞ при разных n на рис. 7.60.

Уравнение импульсов (7.9) теперь можно написать в виде

$$\Theta \frac{d\delta}{dx} = 0,0233 \left(\frac{\nu_\delta}{U\delta}\right)^{1/4} \left(\frac{T_{cp}}{T_\delta}\right)^{-(3-m)/4}. \quad (7.91)$$

Отношение температур, входящих в эту формулу, также не зависит от x и может быть выражено через n и M_∞ . В самом деле,

$$\frac{T_\delta}{T_{cp}} = \frac{\rho_{cp}}{\rho_\delta};$$

но для пограничного слоя

$$\rho_{cp} = \frac{1}{\delta v_{cp}} \int_0^\delta \rho v_x dy = \frac{U \rho_\delta}{v_{cp}} \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{v_x}{U} d\bar{y},$$

и так как $v_{cp} = 0,817 U$, то, подставляя вместо ρ/ρ_δ и v_x/U найденные для них выражения, получим:

$$\frac{T_\delta}{T_{cp}} = \frac{1}{0,817} \int_0^1 \frac{\bar{y}^{1/n} d\bar{y}}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 (1 - \bar{y}^{2/n})}.$$

Вычисленная по этой формуле зависимость T_{cp}/T_δ от M_∞ и n изображена в виде семейства кривых на рис. 7.61. Интегрируя уравнение (7.91) и полагая, что пограничный слой турбулентен, начиная от входной кромки пластинки, получим:

$$\frac{\delta}{L} = 0,059 \Theta^{-4/5} \left(\frac{T_{cp}}{T_\delta}\right)^{-(3-m)/5} \left(\frac{x}{L}\right)^{4/5} R^{-1/5}, \quad (7.92)$$

где $R = UL/\nu_\delta$.

Из последней формулы, если положить в ней $T_{cp} = T_\delta$ и $\Theta_{несж} = 0,0972$ (что соответствует $M_\infty = 0$ и $n = 7$), получается, как частный случай, формула для толщины турбулентного пограничного слоя плоской пластинки в несжимаемой среде

$$\frac{\delta_{несж}}{L} = 0,37 R^{-1/5} \left(\frac{x}{L}\right)^{4/5}.$$

¹⁾ Выражения для δ_* и Θ здесь иные, чем на стр. 768.

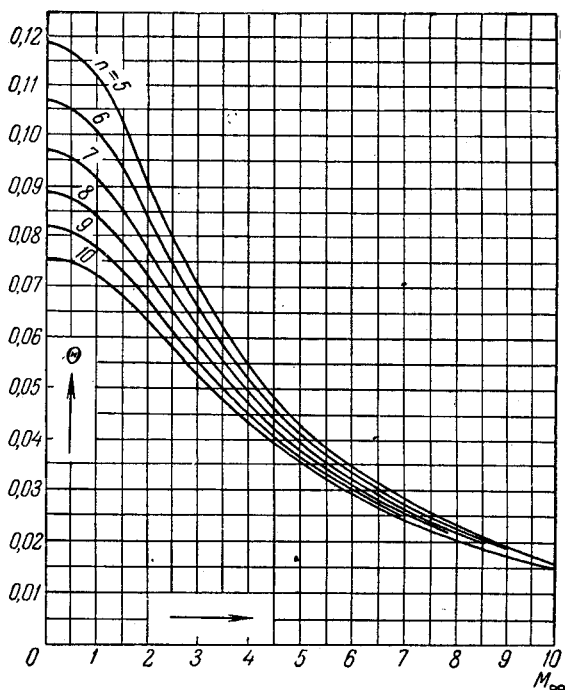


Рис. 7.59. Зависимость отношения толщины потери импульса к толщине пограничного слоя от числа M_∞ (для плоской пластинки).

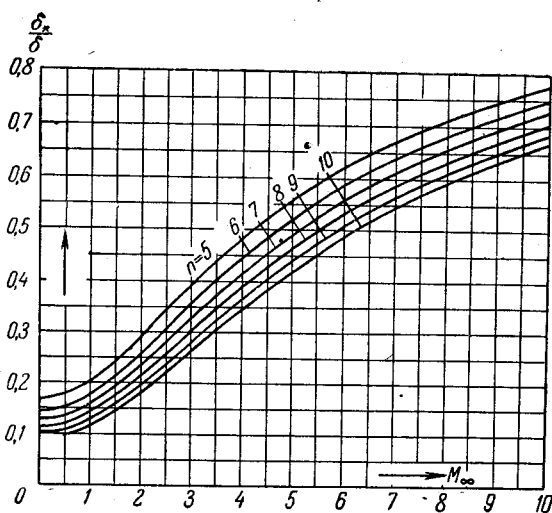


Рис. 7.60. Зависимость отношения толщины вытеснения к толщине пограничного слоя от числа M_∞ (для плоской пластинки).

Таким образом, отношение $\delta_{сж}/\delta_{несж}$ (при $n=7$) равно

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{несж}} = \left(\frac{\Theta_{несж}}{\Theta_{сж}} \right)^{4/5} \left(\frac{T_{ср}}{T_{\delta}} \right)^{-(3-m)/5};$$

это отношение изображено в виде функции от числа M_{∞} на рис. 7.62. Из графика видно, что с возрастанием M_{∞} толщина турбулентного пограничного слоя увеличивается.

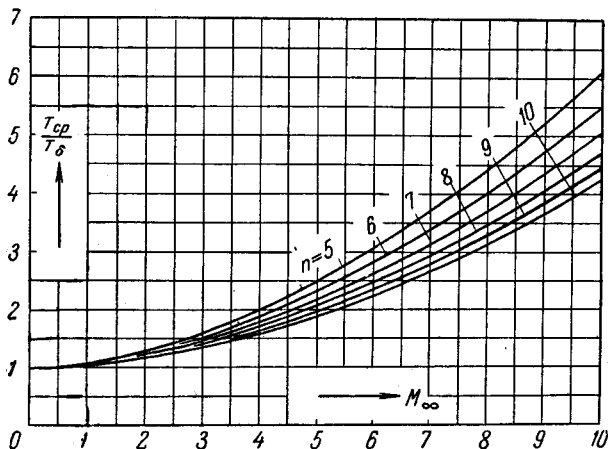


Рис. 7.61. Зависимость отношения $T_{ср}/T_{\delta}$ от числа M_{∞} для плоской пластинки.

Зная толщину пограничного слоя, можно, как известно, найти касательное напряжение τ_0 . Из уравнения импульсов для плоской пластинки

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho_{\delta} U^2}$$

следует, что коэффициент касательного напряжения $\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\rho_{\delta} U^2/2}$ равен

$$\bar{\tau}_0 = 2\Theta \frac{d\delta}{dx} = 2\Theta \frac{d\left(\frac{\delta}{L}\right)}{d\left(\frac{x}{L}\right)}.$$

Подставляя вместо $\frac{d(\delta/L)}{d(x/L)}$ его значение, вычисленное по формуле (7.91), получим:

$$\bar{\tau}_0 = 0,0944\Theta^{1/5} \left(\frac{T_{ср}}{T_{\delta}} \right)^{-(3-m)/5} \left(\frac{x}{L} \right)^{-1/5} R^{-1/5}. \quad (7.93)$$

Для частного случая несжимаемой среды эта формула дает уже известную нам величину

$$\bar{\tau}_0 \text{ несж} = 0,0592 \left(\frac{x}{L} \right)^{-1/5} R^{-1/5}.$$

Отношение коэффициентов касательных напряжений $\bar{\tau}_0 \text{ сж}$ и $\bar{\tau}_0 \text{ несж}$ может быть записано в виде

$$\frac{\bar{\tau}_0 \text{ сж}}{\bar{\tau}_0 \text{ несж}} = \left(\frac{\theta_{\text{сж}}}{\theta_{\text{несж}}} \right)^{1/5} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_{\delta}} \right)^{-(3-m)/5}.$$

По величине касательного напряжения может быть вычислено

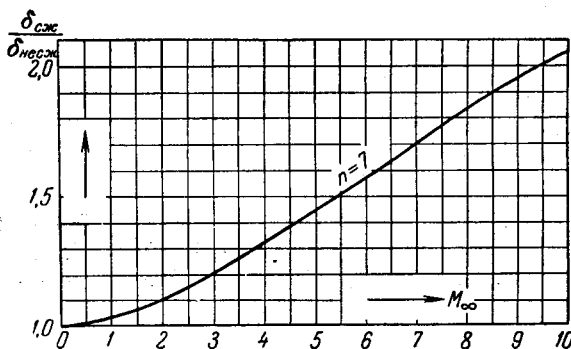


Рис. 7.62. Влияние сжимаемости среды на толщину турбулентного пограничного слоя плоской пластинки (при распределении скорости по сечению слоя по закону корня седьмой степени).

сопротивление трению плоской пластинки. Коэффициент сопротивления одной стороны пластинки равен

$$c_{x \text{ тр}} = \int_0^1 \bar{\tau}_0 d\bar{x},$$

где $\bar{x} = x/L$. Подставляя вместо $\bar{\tau}_0$ его выражение по формуле (7.93), находим:

$$c_{x \text{ тр}} = 0,118 \theta^{1/5} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_{\delta}} \right)^{-(3-m)/5} R^{-1/5}.$$

В частном случае несжимаемой среды отсюда получается известная формула (7.21)

$$c_{x \text{ тр}} = 0,074 R^{-1/5}.$$

Отношение коэффициентов сопротивления пластинки в сжимаемой и несжимаемой среде оказывается таким же, как и отношение соответствующих коэффициентов касательных напряжений

$$\frac{c_{x \text{ сж}}}{c_{x \text{ несж}}} = \left(\frac{\theta_{\text{сж}}}{\theta_{\text{несж}}} \right)^{1/5} \left(\frac{T_{\text{ср}}}{T_{\delta}} \right)^{-(3-m)/5}.$$

Величина этого отношения изображена как функция от числа M_∞ на рис. 7.63. Из графика видно, что с возрастанием M_∞ c_x убывает.

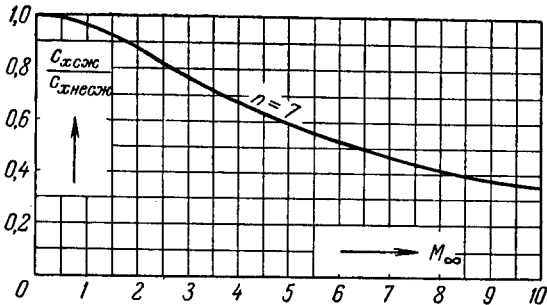


Рис. 7.63. Влияние сжимаемости среды на коэффициент касательного напряжения и сопротивление трению плоской пластинки (при распределении скорости по сечению слоя по закону корня седьмой степени).

Формулы для расчета толщины пограничного слоя и сопротивления трению плоской пластинки, выведенные в этом параграфе, не вполне удобны, так как требуют предварительного определения величины Θ .

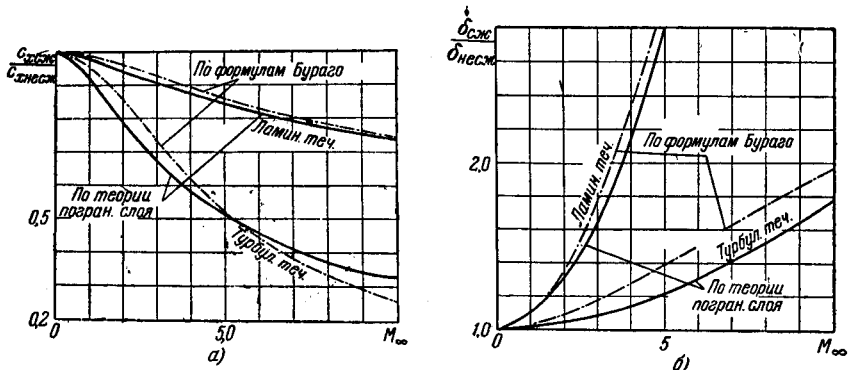


Рис. 7.64. Толщина пограничного слоя и сопротивление трению плоской пластинки при разных M_∞ для ламинарного и турбулентного течений в слое.

Более простые, но приближительные формулы предложены Г. Ф. Бурого; для толщины пограничного слоя пластинки

$$\frac{\delta_{сж}}{\delta_{несж}} = \left(1 + \frac{1}{15} M_\infty^2\right)^{1/3},$$

для коэффициента сопротивления

$$\frac{c_{x,сж}}{c_{x,несж}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{15} M_\infty^2\right)^{2/3}}.$$

Эти зависимости изображены на рис. 7.64; на этом же рисунке нанесены соответствующие зависимости для ламинарного течения в слое (см. § 23). Сопоставление показывает, что с возрастанием M_∞ толщина ламинарного пограничного слоя возрастает быстрее, нежели турбулентного, а c_x убывает медленнее, нежели у турбулентного.

§ 26. Влияние сжимаемости среды на положение точки отрыва пограничного слоя. Взаимодействие пограничного слоя и скачков уплотнения

Из предыдущих параграфов известно, что с возрастанием числа M_∞ толщина пограничного слоя на плоской пластинке возрастает (как при ламинарном, так и при турбулентном течении), а коэффициент касательного напряжения убывает. Можно доказать, что если $U(x)$ остается неизменным при возрастании M_∞ , то эти положения относятся

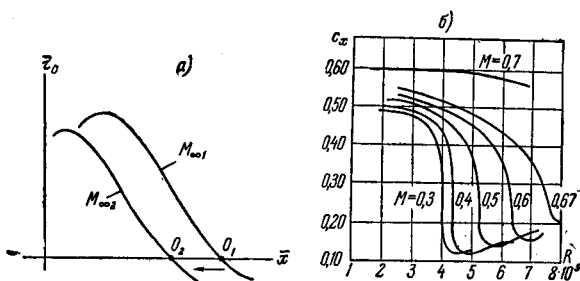


Рис. 7.65. Влияние сжимаемости среды на положение точки отрыва пограничного слоя и вихревое сопротивление тела.

не только к плоской пластинке, но и к телу с криволинейной поверхностью (см. § 24). Уменьшение коэффициента касательного напряжения с возрастанием M_∞ влечет за собой перемещение точки отрыва пограничного слоя; очевидно, что при увеличении M_∞ точка отрыва смещается против потока, т. е. к носку тела (рис. 7.65, а).

В результате этого вихревая область за телом расширяется при увеличении M_∞ и составляющая c_x , которая происходит от вихрей, возрастает. Уменьшение сопротивления трения приводит, таким образом, к увеличению вихревого сопротивления. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 7.65, б, на котором изображены для шара зависимости c_x от R при разных M_∞ .

Из графиков видно, что при одном и том же R c_x шара с возрастанием M_∞ увеличивается. В связи с этим при возрастании M_∞ кризис сопротивления шара затягивается на большие значения числа Рейнольдса.