стинкой или иглой — косые скачки уплотнения. В случае идеальной среды мы имели бы перед телом отсоединенный прямой скачок уплотнения и волновое сопротивление было бы гораздо бо́льшим, чем в

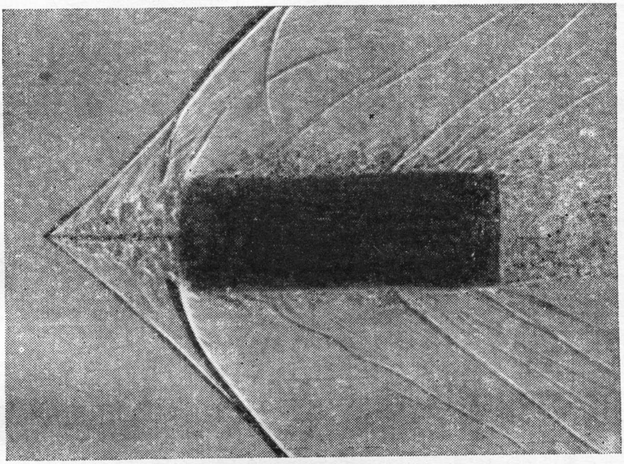

Рис. 7.70. Обтекание сверхзвуковым потоком ($M_\infty = 1{,}72$) неудобообтекаемого тела с острием.

вязкой среде. Образование жидких конусов или клиньев в результате отрыва пограничного слоя позволяет значительно снизить волновое сопротивление неудобообтекаемых тел.

§ 27. Понятие о тепловом пограничном слое. Уравнения теплопроводности для пограничного слоя

Ранее мы рассматривали пограничный слой, происходящий от вязкости среды (вязкий слой). Наряду с вязким слоем в среде у поверхности тела образуется при соответствующих условиях слой, в котором происходит резкое изменение температуры.

При приближении к поверхности неподвижного тела, обтекаемого вязкой сжимаемой средой, скорость уменьшается до нуля, а температура среды увеличивается (если поверхность тела не охлаждается). Максимальная температура среды в данном сечении достигается при этих условиях на поверхности тела (рис. 7.71, *а*); эта температура называется *температурой восстановления* и обозначается T_r (вследствие вязкости она несколько меньше температуры торможения в идеальной среде). Если поверхность тела нагревается, то температура газа у поверхности T_w (или у стенки, как мы будем в дальнейшем ее называть) будет больше T_r; если поверхность тела охлаждается, то температура газа у поверхности будет меньше T_r (рис. 7.71, *б*, *в*).

Слой среды, примыкающий к поверхности тела, где происходит изменение температуры от величины T_δ, которая была бы в данном месте тела при обтекании его идеальной средой, до величины T_w у стенки, называется *тепловым пограничным слоем.*

При увеличении числа M полета температура восстановления, так же как и температура торможения, увеличивается, возникает *аэродинамический нагрев поверхности* и в связи с этим тепловой пограничный слой приобретает большое практическое значение. Задача расчета теплового пограничного слоя состоит в определении его толщины $\delta_т$, распределения температуры по сечению и теплоотдачи

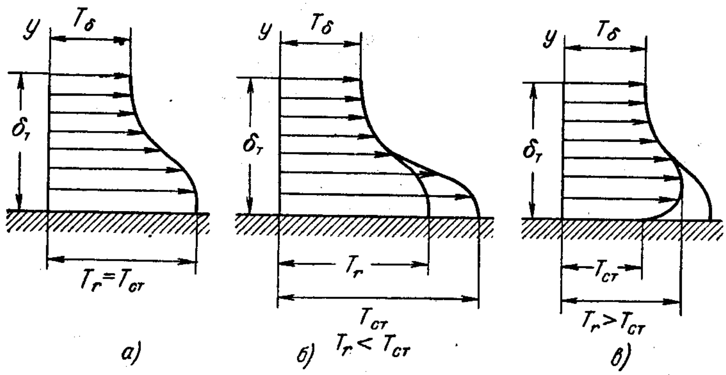

Рис. 7.71. Распределение температуры по сечению теплового пограничного слоя:
а) теплоизолированная стенка; *б*) нагреваемая; *в*) охлаждаемая.

от среды к телу. Мы ограничимся случаем плоского, установившегося ламинарного течения газа. Будем в дальнейшем предполагать, что тепловой процесс в пограничном слое является установившимся, а величины c_p, μ и λ — постоянными.

Распределение температуры в тепловом пограничном слое определяется уравнением энергии для пограничного слоя, которое было выведено в § 22. Для того чтобы выяснить, от каких параметров зависит распределение температуры, возьмем уравнение энергии в следующей форме:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + c_p T\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\, v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{7.94}$$

Так как в тепловом пограничном слое v_y^2 мало по сравнению с v_x^2, то последнее уравнение при постоянных значениях c_p, λ и μ принимает вид

$$\rho v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2}{2} + c_p T\right) + \rho v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x^2}{2} + c_p T\right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{1}{\mathrm{Pr}} c_p T\right), \tag{7.95}$$

где $\mathrm{Pr}=c_p\mu/\lambda$ есть число Прандтля (см. гл. III). Если $\mathrm{Pr}=1$, то это уравнение имеет очевидный интеграл

$$\frac{v_x^2}{2}+c_pT=\text{const}. \tag{7.96}$$

Иными словами, в этом случае полная энергия единицы массы (напомним, что в пограничном слое $v_x^2\approx v^2$, ибо v_y^2 пренебрежимо мало) есть величина постоянная во всей среде.

Из уравнения (7.95), кроме того, следует, если его привести к безразмерному виду, что распределение скоростей, температуры и другие характеристики теплового пограничного слоя зависят не только от чисел R и M, но и от числа Прандтля.

При решении уравнения (7.95) нужно принять во внимание граничные условия для температуры. На внешней границе слоя, т. е. при $y=\delta_т$, $T=T_{\delta_т}$, $\partial T/\partial y=0$; кроме того, как видно из самого уравнения (7.95), на внутренней границе слоя, т. е. при $y=0$, $v_x=v_y=0$ и, следовательно, $\partial^2T/\partial y^2=0$.

Уравнение (7.95) называется уравнением переноса тепла (или уравнением теплопроводности) в дифференциальной форме.

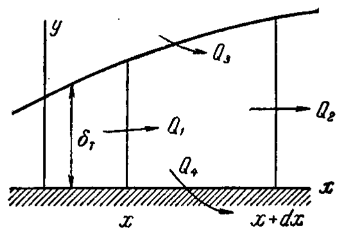

Рис. 7.72. К выводу уравнения теплопроводности в интегральной форме.

Для практических расчетов теплового пограничного слоя более удобным, нежели уравнение (7.95), оказывается уравнение переноса тепла в интегральной форме. Проведем в пограничном слое два плоских сечения, нормальных к поверхности тела, одно — с координатой x, другое — с координатой $x+dx$. Эти два сечения, внутренняя и внешняя границы пограничного слоя, выделяют в нем конечный объем, как показано на рис. 7.72. Количество тепла, протекающее в единицу времени сквозь левую грань этого объема, равно

$$Q_1=\int_0^{\delta_т}\rho v_x c_p T\,dy.$$

Количество тепла Q_2, протекающее в единицу времени через правую грань, может быть выражено через Q_1 : $Q_2=Q_1+\frac{dQ_1}{dx}\,dx$. Количество тепла Q_3, втекающее в единицу времени через внешнюю границу, равно

$$Q_3=M_3c_pT_\delta,$$

где M_3 есть массовый расход сквозь эту границу. Величину M_3 можно вычислить на основании закона сохранения массы; если M_1 и M_2 —

массовые расходы соответственно через левую и правую грани, то

$$M_3 = M_2 - M_1 = \frac{dM_1}{dx}\,dx.$$

Расход M_1, очевидно, равен

$$M_1 = \int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho v_x\,dy;$$

таким образом,

$$Q_3 = c_p T\delta_\text{т}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho v_x\,dy\,dx.$$

Теплопередача сквозь внутреннюю границу пограничного слоя возможна лишь путем теплопроводности; на основании закона Фурье находим:

$$Q_4 = \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dx.$$

Пренебрегая работой сил давления и диссипацией (рассеянием) механической энергии, затраченной на трение, сможем написать следующее уравнение теплового баланса:

$$Q_2 - Q_1 + Q_4 - Q_3 = 0.$$

Подставим сюда найденные величины Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. В результате, после сокращения на dx, получим уравнение переноса тепла в интегральной форме

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho\, v_x T\,dy - T_{\delta_\text{т}}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho v_x\,dy = -\frac{\lambda}{c_p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (7.97)$$

Если учесть работу сил давления и трения, то уравнение переноса тепла (теплопроводности) в интегральной форме будет иметь вид

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho v_x T\,dy - T_{\delta_\text{т}}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} \rho\, v_x\,dy = -\frac{\lambda}{c_p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} +$$

$$+\frac{1}{c_p}\,\frac{dp}{dx}\int\limits_0^{\delta_\text{т}} v_x\,dy + \frac{\mu}{c_p}\int\limits_0^{\delta_\text{т}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 dy. \qquad (7.98)$$

Эти уравнения можно вывести и непосредственно из уравнения теплопроводности в дифференциальной форме (7.95) путем его интегрирования по сечению пограничного слоя.

Для решения уравнений (7.97) и (7.98) применяется та же методика, что и для решения уравнения импульсов. Зная v_x и приближенно задаваясь распределением температуры так, чтобы удовлетворялись граничные условия, находят из уравнения (7.98) толщину теплового пограничного слоя. После этого можно окончательно определить распределение температуры. В следующем параграфе мы продемонстрируем эту методику для наиболее простого случая продольно обтекаемой плоской пластинки.

§ 28. Тепловой пограничный слой плоской пластинки

Предположим, что в тепловом пограничном слое плоской продольно обтекаемой пластинки имеет место установившееся ламинарное течение. Применим для расчета слоя уравнение теплопроводности в интегральной форме (7.97), которое было выведено в предыдущем параграфе.

Введем в качестве искомой величины вместо температуры T разность между температурой стенки (т. е. поверхности пластинки) и температурой T и обозначим эту разность через ϑ; значение ϑ на внешней границе слоя (при $y=\delta_т$) обозначим $\vartheta_{\delta_т}$. Разложим $\vartheta/\vartheta_{\delta_т}$ в степенной ряд по степеням $y/\delta_т$

$$\frac{T_w-T}{T_w-T_{\delta т}}=\frac{\vartheta}{\vartheta_{\delta т}}=a_0+a_1\left(\frac{y}{\delta_т}\right)+a_2\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^2+\ldots$$

и определим коэффициенты этого ряда из граничных условий. При этом ограничимся первыми четырьмя слагаемыми ряда, что позволит отразить существенные особенности кривой $\vartheta=f(y)$ (рис. 7.73). Граничные условия для ϑ следуют из граничных условий для T: при $y=0$ $\vartheta=0$, при $y=\delta_т$ $\vartheta=\vartheta_{\delta т}$; так как при $y=0$ $\partial^2T/\partial y^2=0$, то и $\partial^2\vartheta/\partial y^2=0$; так как при $y=\delta_т$ $\partial T/\partial y=0$, то и $\partial\vartheta/\partial y=0$. Эти граничные условия дают следующие значения коэффициентов ряда: $a_0=0$, $a_1=3/2$, $a_2=0$, $a_3=-1/2$; таким образом, для $\vartheta/\vartheta_{\delta т}$ получается следующее приближенное выражение:

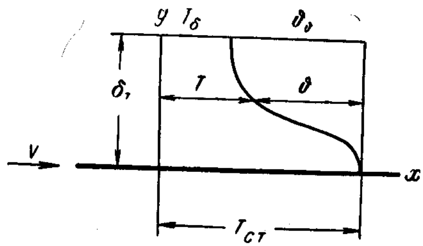

Рис. 7.73. К расчету теплового пограничного слоя плоской пластинки.

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{\delta т}}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3. \tag{7.99}$$

Опыты показывают, что эта приближенная формула близка к действительности (рис. 7.74). Температура T в пограничном слое при этой зависимости для ϑ получается равной

$$T=T_w-\vartheta=T_w-\vartheta_{\delta т}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3\right]. \tag{7.100}$$