женно задаваясь распределением температуры так, чтобы удовлетворялись граничные условия, находят из уравнения (7.98) толщину теплового пограничного слоя. После этого можно окончательно определить распределение температуры. В следующем параграфе мы продемонстрируем эту методику для наиболее простого случая продольно обтекаемой плоской пластинки.

§ 28. Тепловой пограничный слой плоской пластинки

Предположим, что в тепловом пограничном слое плоской продольно обтекаемой пластинки имеет место установившееся ламинарное течение. Применим для расчета слоя уравнение теплопроводности в интегральной форме (7.97), которое было выведено в предыдущем параграфе.

Введем в качестве искомой величины вместо температуры T разность между температурой стенки (т. е. поверхности пластинки) и температурой T и обозначим эту разность через ϑ; значение ϑ на внешней границе слоя (при $y=\delta_т$) обозначим $\vartheta_{\delta_т}$. Разложим $\vartheta/\vartheta_{\delta_т}$ в степенной ряд по степеням $y/\delta_т$

$$\frac{T_w-T}{T_w-T_{\delta т}}=\frac{\vartheta}{\vartheta_{\delta т}}=a_0+a_1\left(\frac{y}{\delta_т}\right)+a_2\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^2+\ldots$$

и определим коэффициенты этого ряда из граничных условий. При этом ограничимся первыми четырьмя слагаемыми ряда, что позволит отразить существенные особенности кривой $\vartheta=f(y)$ (рис. 7.73). Граничные условия для ϑ следуют из граничных условий для T: при $y=0$ $\vartheta=0$, при $y=\delta_т$ $\vartheta=\vartheta_{\delta т}$; так как при $y=0$ $\partial^2T/\partial y^2=0$, то и $\partial^2\vartheta/\partial y^2=0$; так как при $y=\delta_т$ $\partial T/\partial y=0$, то и $\partial\vartheta/\partial y=0$. Эти граничные условия дают следующие значения коэффициентов ряда: $a_0=0$, $a_1=3/2$, $a_2=0$, $a_3=-1/2$; таким образом, для $\vartheta/\vartheta_{\delta т}$ получается следующее приближенное выражение:

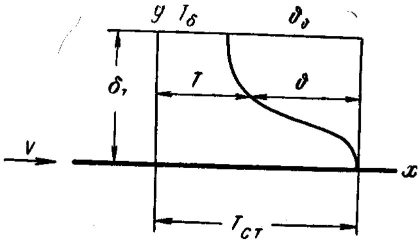

Рис. 7.73. К расчету теплового пограничного слоя плоской пластинки.

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_{\delta т}}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3. \qquad (7.99)$$

Опыты показывают, что эта приближенная формула близка к действительности (рис. 7.74). Температура T в пограничном слое при этой зависимости для ϑ получается равной

$$T=T_w-\vartheta=T_w-\vartheta_{\delta т}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_т}\right)^3\right]. \qquad (7.100)$$

Зададимся теперь приближенным распределением скорости по сечению пограничного слоя. Предположим для простоты вычислений, что скорость v_x распределена по сечению теплового слоя по линейному

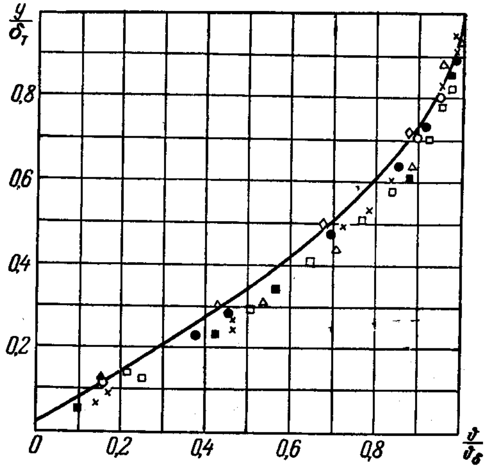

Рис. 7.74. Распределение температуры по сечению теплового пограничного слоя в безразмерных величинах.

закону для вязкого слоя: $v_x = Vy/\delta$. Тогда будем иметь, полагая, что течение адиабатическое и, следовательно, плотность ρ по сечению слоя не изменяется:

$$\int_0^{\delta_\text{т}} \rho\, v_x\, dy = \frac{\rho V}{2} \frac{\delta_\text{т}^2}{\delta};$$

$$\int_0^{\delta_\text{т}} \rho v_x T\, dy = \frac{\rho V}{2} \frac{\delta_\text{т}^2}{\delta}\left(T_w - \frac{3}{4}\vartheta_{\delta_\text{т}}\right) = \frac{\rho V}{2} \frac{\delta_\text{т}^2}{\delta}\left(T_{\delta_\text{т}} + \frac{1}{4}\vartheta_{\delta_\text{т}}\right);$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{3}{2}\frac{\vartheta_{\delta_\text{т}}}{\delta_\text{т}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.97), получим:

$$\frac{\rho V}{2}\left(T_{\delta_\text{т}} + \frac{1}{4}\vartheta_{\delta_\text{т}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_\text{т}^2}{\delta}\right) - \frac{\rho V}{2} T_{\delta_\text{т}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_\text{т}^2}{\delta}\right) = \frac{\lambda}{c_p}\frac{3}{2}\frac{\vartheta_{\delta_\text{т}}}{\delta_\text{т}}$$

или, после сокращений,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_\text{т}^2}{\delta}\right) = \frac{12\lambda}{c_p \rho V \delta_\text{т}}.$$

Из расчета вязкого пограничного слоя плоской пластинки известно, что при ламинарном течении толщина слоя равна $\delta = 4{,}9\sqrt{\frac{\nu x}{V}}$.

Воспользовавшись этой формулой, получаем для толщины теплового пограничного слоя уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_т^2}{x^{1/2}}\right)=\frac{58{,}8\lambda\nu^{1/2}}{c_p\rho\, V^{3/2}\delta_т}.$$

Для решения этого уравнения удобно принять $\delta_т^2/x^{1/2}$ за новую переменную. В результате, полагая, что при $x=0$ эта переменная обращается в нуль, получим:

$$\left(\frac{\delta_т^2}{x^{1/2}}\right)^{3/2}=\frac{107{,}6\lambda\nu^{1/2}}{c_p\rho\, V^{3/2}}x^{3/4},$$

откуда

$$\delta_т=\frac{4{,}75\,\lambda^{1/3}\,\nu^{1/6}}{(c_p\rho)^{1/3}V^{1/2}}\,x^{1/2}=0{,}97\left(\frac{\lambda}{c_p\mu}\right)^{1/3}\delta=\frac{0{,}97}{\mathrm{Pr}^{1/3}}\,\delta.$$

Таким образом, мы видим, что *толщина теплового пограничного слоя пропорциональна толщине вязкого слоя*, причем отношение этих толщин зависит от числа Прандтля, которое характеризует отношение количества тепла, выделившегося в результате трения слоев жидкости, к количеству тепла, отведенному путем теплопроводности. Полагая численный коэффициент, который вычислен здесь лишь приблизительно, равным единице, будем иметь:

$$\frac{\delta_т}{\delta}=\frac{1}{\mathrm{Pr}^{1/3}}. \qquad (7.101)$$

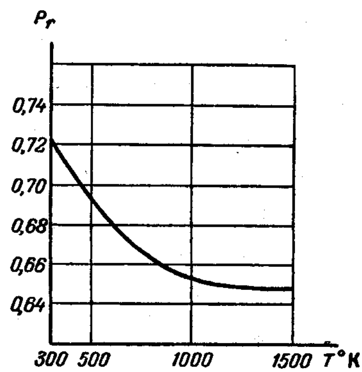

Рис. 7.75. Зависимость числа Прандтля от температуры для воздуха.

Число Прандтля не зависит от размеров и скорости тела, движущегося в среде; оно полностью определяется физическими характеристиками самой среды. Так как входящие в его выражение величины зависят от температуры, то и Pr зависит от температуры (рис. 7. 75). Для воздуха при нормальной температуре $\mathrm{Pr}\approx 0{,}72$ и с возрастанием температуры убывает. Подстановка в последнюю формулу $\mathrm{Pr}=0{,}72$ дает $\delta_т=1{,}12\ \delta$, т. е. тепловой слой несколько толще вязкого. Если бы число Прандтля равнялось единице, то толщины теплового и вязкого слоя совпадали бы.

Можно более точно, чем по формуле (7.100), найти распределение температуры по сечению слоя и, кроме того, найти температуру на поверхности пластинки, если решить уравнение (7.95), воспользовавшись решением дифференциального уравнения вязкого пограничного слоя для плоской пластинки (§ 23). Мы приведем лишь один из результатов вычислений. Температуру на поверхности теплоизолированной пластинки для ламинарного течения в слое можно выразить следующей приближенной формулой:

$$T_r = T_\infty\left(1 + \frac{k-1}{2} r\mathsf{M}_\infty^2\right), \tag{7.102}$$

где коэффициент восстановления $r \approx \mathsf{Pr}^{1/2}$. Если $\mathsf{Pr} = 1$, то температура восстановления совпадает с температурой торможения, что следует и непосредственно из формулы (7.96). Полагая для воздуха $\mathsf{Pr} = 0,72$, получим $r \approx 0,85$.

Расчеты, выполненные для турбулентного течения в пограничном слое плоской пластинки, показали, что формула (7.102) пригодна и для этого случая, но коэффициент восстановления r оказывается равным $r \approx \mathsf{Pr}^{1/3}$, что при $\mathsf{Pr} = 0,72$ дает численное значение $r \approx 0,90$. Формула (7.102) была экспериментально проверена для пластинок и трубопроводов, причем было обнаружено хорошее соответствие ее с действительностью.

§ 29. Теплоотдача на плоской пластинке. Зависимость между трением и теплоотдачей

Одной из основных задач при расчете теплового пограничного слоя является определение потока тепла (теплоотдачи) от среды к телу. Эта задача сводится к определению коэффициента теплоотдачи α в формуле

$$q = -\alpha\,(T_{\delta_т} - T_w) = \alpha\vartheta_{\delta_т},$$

где q есть количество тепла, протекающее в единицу времени сквозь поверхность, площадь которой равна единице. Коэффициент α может быть вычислен, если известен температурный градиент на поверхности тела; в самом деле, по закону Фурье тот же тепловой поток q равен

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0},$$

и сравнивая оба выражения для q, находим:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_{\delta_т}}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda}{\vartheta_{\delta_т}}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Примем для $(\partial\vartheta/\partial y)_{y=0}$ его приближенное выражение по формуле (7.99): $(\partial\vartheta/\partial y)_{y=0} = 3/2 \cdot \vartheta_{\delta_т}/\delta_т$, тогда коэффициент теплоотдачи получится равным

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\delta_т}.$$