

ГЛАВА 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 1.1. Место электродинамики среди технических дисциплин. Назначение электродинамики и основные этапы ее развития

Прежде всего необходимо уяснить место, занимаемое электродинамикой среди общетеоретических и специальных дисциплин.

Электродинамику можно рассматривать как часть курса физики и теоретических основ электротехники, с одной стороны, и как дальнейшее развитие курсов теории цепей и сигналов или основ радиотехники — с другой. Таким образом, базовый курс электродинамики является переходным между указанными теоретическими курсами и такими специальными курсами, как «Распространение радиоволн», «Антенно-фидерные устройства», «Техника высоких частот», «Квантовая радиоэлектроника» и др.

Круг вопросов, рассматриваемых электродинамикой, в последнее время значительно расширился и решение практических задач существенно усложнилось.

В настоящее время под электродинамикой понимают раздел науки, описывающий процессы возбуждения и распространения электромагнитных волн в различных средах. Как правило, задачи электродинамики связаны с диапазоном высоких частот, используемых современной радиотехникой.

Трудно представить себе современного радиоспециалиста-исследователя, не имеющего представления об электродинамических процессах, независимо от того, в какой из областей радиотехники он работает.

Генерирование электромагнитных колебаний сверхвысоких частот, канализация этих колебаний по волноводам, процессы излучения электромагнитной энергии и улавливания ее приемными антеннами — таков круг задач, требующих изучения электродинамики. Анализ и создание ферритовых устройств, приборов, использующих плазму, квантовых устройств также возможны на базе законов электродинамики.

Электродинамика получила сейчас очень широкое распространение и развитие ее далеко от завершения.

Основным объектом изучения электродинамики является электромагнитное поле.

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи. По определению В. И. Ленина [1], «... материя есть то, что, действуя на наши органы чувств, производит ощущение; материя есть объективная реальность, данная нам в ощущении, ...».

История развития электродинамики, определяемая трудами многих ученых, могла бы составить предмет самостоятельного исследования. Приведем главнейшие ее этапы.

В 1753 г. в работе «Речь о явлениях воздушных от электрической силы происходящих» и в 1756 г. в труде «Теория электричества, разработанная математическим путем» М. В. Ломоносов высказал мысль о динамической природе электричества, о связи между электрическими и световыми явлениями. В 1819 г. Эрстед открыл влияние электрического тока на магнитную стрелку. В 1820 г. Ампер исследовал действие тока на ток, в результате чего была установлена связь между магнитными и электрическими явлениями. В 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. В 1873 г. Дж. Максвелл опубликовал «Трактат об электричестве и магнетизме», в котором в математической форме изложил основные законы электромагнитного поля. Им же было введено понятие о токе смещения, позволившее разработать теорию электромагнитного поля в пространстве и в конечном счете установить связь между электромагнитными колебаниями и светом. В 1888 г. ученик знаменитого физика Гельмгольца—Г. Герц в работе «Силы электрических колебаний, рассмотренные согласно теории Максвелла» дал метод решения уравнений Максвелла и экспериментально доказал возможность существования электромагнитных волн в пространстве. В 1895 г. А. С. Попов осуществил первую в мире радиосвязь с помощью электромагнитных волн.

В 1899 г. П. Н. Лебедев экспериментально доказал давление света, т. е. электромагнитных волн, на тела. Было подтверждено наличие инертной массы у электромагнитного поля. В 1916 г. А. Эйнштейн высказал мысль об искривлении светового луча в поле тяготения, которая в 1919 г. была подтверждена Эддингтоном, измерившим отклонение светового луча в гравитационном поле Солнца. Таким образом, было доказано существование гравитационной массы у электромагнитного поля. В 1960 г. Р. В. Паунд взвесил световой луч. Материальность электромагнитного поля была окончательно доказана, чем был нанесен еще один удар по «энергетической» физике, которая, по определению В. И. Ленина [1], «есть источник новых идеалистических попыток мыслить движение без материи...».

Электромагнитное поле является носителем энергии, способной преобразовываться в другие виды энергии, что широко используется в современной технике.

В данном пособии рассматривается макроскопическая электродинамика, т. е. процессы на расстояниях, значительно превышающих внутриатомные расстояния.

При математическом описании процессов в электромагнитном поле вводят четыре основных вектора поля:

E—вектор напряженности электрического поля;

D—вектор электрического смещения, или электрической индукции;

B—вектор магнитной индукции;

H—вектор напряженности магнитного поля.

Поля, описываемые этими векторами, создаются электрическими зарядами Q_3 и токами I_3 , которые в свою очередь могут создаваться электромагнитным полем. Дополнительно в современную электродинамику вводят удобные для анализа величины магнитного заряда Q_m и магнитного тока I_m , облегчающие решение ряда задач. Смысл этих величин будет определен в дальнейшем.

Электродинамика устанавливает математическую связь между векторами поля, токами и зарядами в различных конкретных случаях, когда эти векторы являются функциями времени.

§ 1.2. Система единиц. Закон Кулона. Вектор напряженности электрического поля E . Разность потенциалов U . Теорема Гаусса для вакуума

В настоящем пособии используется система единиц МКСА (метр, килограмм, секунда, ампер), являющаяся Международной системой единиц измерения—СИ [2].

В 1785 г. Кулон экспериментально определил силу взаимодействия между двумя заряженными телами малых размеров, помещенными в вакуум. В принятой системе единиц измерения эту силу можно определить с помощью закона Кулона, выражаемого соотношением

$$F_3 = \frac{Q_{31}Q_{32}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \quad (1.1)$$

Здесь F_3 —вектор силы взаимодействия между зарядами, Н; Q_{31} , Q_{32} —взаимодействующие заряды, Кл; ϵ_0 —коэффициент пропорциональности (электрическая постоянная вакуума); r —расстояние между центрами зарядов, м; $\mathbf{1}_r$ —единичный вектор (орт), направленный вдоль r таким образом, что разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются (рис. 1.1).

Вектором напряженности электрического поля E называют силу, действующую на единичный положительный заряд:

$$E = F_3/Q_{31}, \quad (1.2)$$

$$E \rightarrow \text{Н/Кл}, \quad (1.3)$$

$$E = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \quad (1.4)$$

Введем понятие разности потенциалов U между точками a_2 и a_1 , под которой понимают интеграл

$$U = \int_{a_1}^{a_2} E dl = \int_{l_1}^{l_2} E dl. \quad (1.5)$$

Разность потенциалов представляет собой работу силы E на пути l_1 . Единицей измерения разности потенциалов является вольт:

$$U \rightarrow \text{В} = \text{Н} \cdot \text{м/Кл}. \quad (1.6)$$

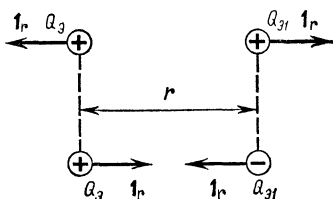


Рис. 1.1

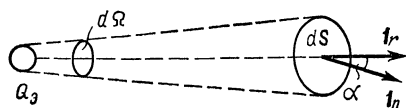


Рис. 1.2

Из формул (1.3), (1.6) следуют единицы измерения \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} \rightarrow \text{В/м}. \quad (1.7)$$

Как известно из курса физики, емкостью конденсатора C называют отношение заряда Q_3 к разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$C = Q_3/U. \quad (1.8)$$

В системе МКСА емкость измеряют в фарадах:

$$C \rightarrow \Phi = \text{Кл/В}. \quad (1.9)$$

Единицы измерения электрической постоянной можно определить из выражения (1.4)

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (1.10)$$

Таким образом, единицей измерения ϵ_0 является фарада на метр. В системе МКСА

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (1.11)$$

Рассмотрим бесконечно малую площадку dS , находящуюся в поле, создаваемом зарядом Q_3 (рис. 1.2).

Пусть расстояние от центра заряда до площадки равно r . Определим бесконечно малый поток вектора \mathbf{E} ($d\Phi_E$) с помощью соотношения

$$d\Phi_E = \mathbf{E} dS, \quad dS = dS \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{1}_n$ — единичный вектор, нормальный к площадке dS .

С учетом выражения (1.4) можно записать

$$d\Phi_E = \frac{Q_3 dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r \mathbf{1}_n.$$

Выражение

$$\frac{dS \mathbf{1}_r \mathbf{1}_n}{r^2} = d\Omega$$

определяет бесконечно малый телесный угол, характеризующий угол зрения, под которым из точки расположения заряда видна пло-

щадка dS . Вводя понятие телесного угла, получаем

$$d\Phi_E = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Переходя от бесконечно малой площадке dS к площадке конечных размеров S_1 , можно записать

$$\Phi_E = \int_{S_1} \mathbf{E} dS = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_1} d\Omega.$$

Здесь Ω_1 — телесный угол, в пределах которого из точки расположения центра заряда наблюдается площадка S_1 .

В случае замкнутой поверхности S_1 , окружающей заряд Q_3 , полный поток вектора \mathbf{E} , проходящего через эту поверхность, может быть найден путем интегрирования по всей замкнутой поверхности. Полный телесный угол вокруг точки при этом равен 4π и

$$\Phi_E = \oint_{S_1} \mathbf{E} dS = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q_3}{\epsilon_0}.$$

Соотношение

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} dS = Q_3/\epsilon_0 \quad (1.12)$$

является математическим выражением *теоремы Гаусса для вакуума*.

§ 1.3. Теорема Гаусса для вещества. Вектор электрического смещения \mathbf{D} . Первое материальное уравнение среды. Первое уравнение непрерывности

В диэлектрической среде под влиянием поля происходит процесс поляризации. Он заключается в том, что положительные и отрицательные заряды атомов диэлектрика под действием силы \mathbf{E} смещаются относительно друг друга. Положительные заряды движутся в направлении поля \mathbf{E} , отрицательные — против него. Диэлектрик поляризуется, т. е. перестает быть электрически нейтральным. Для математической оценки этого процесса, рассмотрим некоторую

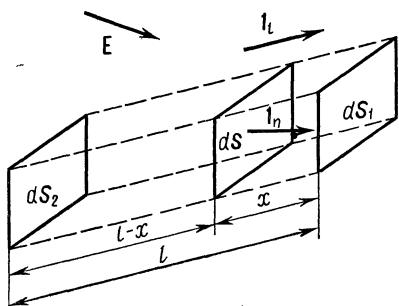


Рис. 1.3

бесконечно малую поверхность dS в веществе, единичная нормаль к которой \mathbf{l}_n не обязательно совпадает с направлением поля \mathbf{E} (рис. 1.3). Предположим, что в результате процесса поляризации положительные заряды, входящие в состав атомов, расположенных на поверхности dS , сместились на некоторое расстояние x . Направление смещения, которое характеризуется единичным вектором \mathbf{l}_l , определяется ориентацией вектора \mathbf{E} и свойствами среды. Это на-

правление может не совпадать с направлением вектора \mathbf{E} . В результате смещения положительные заряды расположатся на поверхности dS_1 . Заряды, находившиеся левее поверхности dS на расстоянии x от нее, смещаясь вправо, займут место на поверхности dS_1 . Таким образом, сместившиеся положительные заряды займут объем, ограниченный поверхностями dS и dS_1 . Этот объем может быть легко подсчитан:

$$dV_+ = dSx\mathbf{1}_n\mathbf{1}_l.$$

Допустим, что каждый положительный заряд равен $Q_{э1}$ и число зарядов, охваченных процессом поляризации в 1 м^3 , составляет N_1 . Тогда суммарный положительный заряд $dQ'_{э+}$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, можно определить из соотношения

$$dQ'_{э+} = Q_{э1}N_1 dV_+ = Q_{э1}N_1 dSx\mathbf{1}_n\mathbf{1}_l.$$

Отрицательные заряды, находившиеся на поверхности dS до начала действия внешнего поля \mathbf{E} , в результате этого действия сместятся в направлении, обратном направлению смещения положительных зарядов. Это направление определяется единичным вектором $-\mathbf{1}_l$.

Примем, что после смещения расстояние между положительными и отрицательными зарядами нейтрального атома равно l . Тогда отрицательные заряды, находившиеся на поверхности dS , сместятся влево на расстояние $l-x$ и расположатся на поверхности dS_2 . Объем между поверхностями dS и dS_2 будет заполнен сместившимися отрицательными зарядами, и суммарный отрицательный заряд $dQ'_{э-}$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, определится формулой

$$dQ'_{э-} = Q_{э1}N_1 dS(l-x)(-\mathbf{1}_n)(-\mathbf{1}_l).$$

Прохождение положительных зарядов слева направо через поверхность dS эквивалентно прохождению отрицательных зарядов справа налево. Поэтому общий заряд $dQ'_э$, прошедший через поверхность dS в результате поляризации, можно найти суммированием зарядов $dQ'_{э+}$ и $dQ'_{э-}$:

$$dQ'_э = dQ'_{э+} + dQ'_{э-} = Q_{э1}N_1 l\mathbf{1}_l\mathbf{1}_n dS.$$

Вводят обозначение

$$Q_{э1}N_1 l\mathbf{1}_l = Q_{э1}N_1 l = \mathbf{P}.$$

Величину \mathbf{P} называют *вектором поляризованности вещества*. Единицей измерения поляризованности вещества является кулон на квадратный метр:

$$\mathbf{P} \rightarrow \text{Кл/м}^2. \quad (1.13)$$

При этом

$$dQ'_э = \mathbf{P} dS\mathbf{1}_n = \mathbf{P} dS.$$

В конкретных случаях вектор \mathbf{P} может являться функцией координат. В силу этого заряд Q'_3 , прошедший через конечную поверхность S_1 , следует отыскивать путем интегрирования полученного выражения по этой поверхности:

$$Q'_3 = \int_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Если процесс поляризации вызван зарядом, находившимся внутри замкнутой поверхности S_1 , и необходимо определить заряд Q'_3 , прошедший через эту поверхность в результате поляризации среды, то интегрирование должно быть распространено на замкнутую поверхность:

$$Q'_3 = \oint_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Это количество электричества выйдет за пределы замкнутой поверхности S_1 . Внутри поверхности останется заряд $-Q'_3$, связанный с зарядом Q_3 и создававший совместно с ним до процесса поляризации нейтральные атомы среды. Таким образом, процесс поляризации среды сводится к появлению помимо первоначального заряда Q_3 , создавшего поле \mathbf{E} , дополнительного поляризованного заряда $-Q'_3$. Учитывая этот заряд в выражении теоремы Гаусса для вакуума (1.12), можно получить формулу, позволяющую определить поле в конкретной среде. При этом выражение (1.12) запишется в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_3 - Q'_3),$$

или

$$\oint_{S_1} \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q_3 - \oint_{S_1} \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Объединив интегралы, получим

$$\oint_{S_1} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = Q_3.$$

Введем обозначение

$$\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}. \quad (1.14)$$

Величину \mathbf{D} называют *вектором электрического смещения*. Интегральное соотношение

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_3 \quad (1.15)$$

является математическим выражением *теоремы Гаусса для вещества*. Легко определить единицу измерения вектора электрического смещения:

$$\mathbf{D} \rightarrow \text{Кл/м}^2. \quad (1.16)$$

Теорема Гаусса, записанная в форме (1.15), справедлива для идеальной диэлектрической среды. Если среда проводящая, то при выводе этой теоремы необходимо учитывать заряды, создаваемые в среде за счет токов проводимости. В дальнейшем будет дан вывод выражения, соответствующего теореме Гаусса для проводящей среды.

Выражение (1.14) позволяет установить связь между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} , т. е. вывести первое материальное уравнение среды. Это уравнение различно для различных сред, и на нем необходимо остановиться подробно. Прежде всего рассмотрим однородную линейную изотропную среду и монохроматическое поле, т. е. поле, изменяющееся с одной угловой частотой ω .

В этом случае вектор поляризованности вещества \mathbf{P} можно считать пропорциональным вектору поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \chi_3 \mathbf{E}. \quad (1.17)$$

Коэффициент пропорциональности χ_3 называют *диэлектрической восприимчивостью вещества*. При этом выражение (1.14) запишется в виде

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + \chi_3) \mathbf{E}.$$

Введя обозначение

$$\epsilon_0 + \chi_3 = \epsilon_a, \quad (1.18)$$

получим уравнение

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

которое представляет собой *первое материальное уравнение среды*.

Величину ϵ_a называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью среды*. Единицы измерения диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости такие же, как для ϵ_0 — Ф/м.

Введем безразмерную величину — относительную диэлектрическую проницаемость среды:

$$\epsilon_r = \epsilon_a / \epsilon_0. \quad (1.20)$$

В реальных средах она может изменяться в значительных пределах — от отрицательных сотен (плазма), нулевых значений (плазма) до положительных десятков тысяч (титанаты бария).

Для монохроматического поля и неоднородной среды, параметры которой являются функциями обобщенных криволинейных координат ξ, η, ζ , диэлектрическая проницаемость становится функцией этих координат:

$$\epsilon_a = \epsilon_a(\xi, \eta, \zeta)$$

и первое материальное уравнение среды принимает вид

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{E}. \quad (1.21)$$

Для монохроматического поля и однородной нелинейной изотропной среды диэлектрическая проницаемость зависит от поля

$$\epsilon_a = \epsilon_a(E)$$

и первое материальное уравнение среды записывается таким образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(E) \mathbf{E}. \quad (1.22)$$

Для монохроматического поля и однородной линейной анизотропной среды каждая из составляющих вектора \mathbf{D} вдоль координатных направлений ξ, η, ζ в общем случае зависит от трех координатных составляющих вектора \mathbf{E} , что отражено следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} D_{\xi} &= \epsilon_{a11} E_{\xi} + \epsilon_{a12} E_{\eta} + \epsilon_{a13} E_{\zeta}, \\ D_{\eta} &= \epsilon_{a21} E_{\xi} + \epsilon_{a22} E_{\eta} + \epsilon_{a23} E_{\zeta}, \\ D_{\zeta} &= \epsilon_{a31} E_{\xi} + \epsilon_{a32} E_{\eta} + \epsilon_{a33} E_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{D} = (\epsilon_a) \mathbf{E}, \quad (1.24.)$$

где (ϵ_a) — тензор абсолютной диэлектрической проницаемости среды:

$$(\epsilon_a) = \begin{pmatrix} \epsilon_{a11} & \epsilon_{a12} & \epsilon_{a13} \\ \epsilon_{a21} & \epsilon_{a22} & \epsilon_{a23} \\ \epsilon_{a31} & \epsilon_{a32} & \epsilon_{a33} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Применение тензора (ϵ_a) показывается выражением (1.23).

Применительно к анизотропной среде каждая из составляющих вектора \mathbf{D} в общем случае изменяется в своем масштабе по отношению к соответствующей составляющей вектора \mathbf{E} и в силу этого ориентация вектора \mathbf{D} не совпадает с ориентацией вектора \mathbf{E} .

В случае немонохроматического поля целесообразно рассматривать отдельно поля, обладающие дискретным и непрерывным спектрами частот. Если параметры среды не зависят от частоты для однородной линейной изотропной среды справедливо материальное уравнение (1.19) независимо от спектрального состава поля. Такую среду называют недиспергирующей. Если параметры среды являются функциями частоты, то говорят, что среда обладает дисперсией и называется диспергирующей.

Допустим, что спектр частот дискретен и вектор \mathbf{E} может быть представлен рядом гармонических составляющих. Предположим также, что среда является диспергирующей, однородной, линейной и изотропной. При этом векторы поля могут быть представлены в следующем соотношении:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots$$

Пусть

$$\epsilon_a = \epsilon_a(\omega). \quad (1.26)$$

Тогда первое материальное уравнение среды можно записать следующим образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a(\omega_0) \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \epsilon_a(\omega_1) \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \epsilon_a(\omega_2) \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \epsilon_a(\omega_n) \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (1.27)$$

Такая запись возможна в силу применимости принципа суперпозиции к линейной среде.

В случае непрерывного спектра частот для определения вида первого материального уравнения среды можно использовать преобразование Фурье или Лапласа [3]. Если вектор \mathbf{E} записать как временную функцию $\mathbf{E}(t)$, то с помощью прямого преобразования Фурье можно получить вектор спектральной плотности этой функции:

$$\mathbf{G}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.28)$$

По известному вектору спектральной функции $\mathbf{G}_E(\omega)$ можно найти вектор $\mathbf{E}(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.29)$$

Аналогично определяют вектор $\mathbf{D}(t)$ по его спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_D(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.30)$$

Таким образом, по известному вектору спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$ можно найти вектор $\mathbf{D}(t)$. Для вектора спектральной плотности $\mathbf{G}_D(\omega)$ справедливо так же, как для каждой составляющей дискретного спектра, обычное материальное уравнение вида (1.19) с учетом частотной зависимости $\varepsilon_a(\omega)$:

$$\mathbf{G}_D(\omega) = \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega). \quad (1.31)$$

Используя обратное преобразование Фурье (1.30), получаем первое материальное уравнение для непрерывного спектра частот:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.32)$$

Как указывалось, первое материальное уравнение среды в случае непрерывного спектра может быть получено также с помощью преобразования Лапласа. Прямое преобразование Лапласа, примененное к вектору $\mathbf{E}(t)$, определяет его изображение $\mathbf{E}(p)$:

$$\mathbf{E}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-pt} dt, \quad (1.33)$$

где

$$p = c + j\omega. \quad (1.34)$$

Вектор $\mathbf{E}(t)$ можно определить с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.35)$$

Аналогично, если известно изображение $\mathbf{D}(p)$ вектора $\mathbf{D}(t)$, то этот вектор определяют из соотношения

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{D}(p) e^{pt} dp. \quad (1.36)$$

Зная изображение $\varepsilon_a(p)$ диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и изображение $\mathbf{E}(p)$ вектора $\mathbf{E}(t)$, можно легко получить изображение $\mathbf{D}(p)$ вектора $\mathbf{D}(t)$:

$$\mathbf{D}(p) = \varepsilon_a(p) \mathbf{E}(p). \quad (1.37)$$

Тогда

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon_a(p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.38)$$

Выражение (1.38) представляет собой еще одну возможную форму записи первого материального уравнения в случае непрерывного спектра частот.

Рассмотрим среду, параметры которой изменяются по заданному временному закону. Допустим, что диэлектрическая проницаемость ε_a изменяется по закону

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t) \quad (1.39)$$

и не зависит от частоты

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(\omega) \quad (1.40)$$

При этом для однородной линейной и изотропной, но параметрической среды*, будет справедливо первое материальное уравнение, сходное по форме с (1.19):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(t) \mathbf{E}. \quad (1.41)$$

Положение существенно осложняется, если наряду с изменением ε_a во времени существует зависимость ε_a и от частоты ω :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t, \omega). \quad (1.42)$$

Как известно из теории цепей [3], при воздействии сигнала $u_1(t)$ на параметрическую цепь с коэффициентом передачи $K(\omega, t)$ сигнал на выходе цепи

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{u_1}(\omega) K(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.43)$$

где $G_{u_1}(\omega)$ — спектральная функция входного сигнала:

$$G_{u_1}(\omega) = \int u_1(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.44)$$

При использовании преобразования Лапласа эти выражения запишутся следующим образом:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} u_1(p) K(p, t) e^{pt} dp, \quad (1.45)$$

$$u_1(p) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-pt} dt. \quad (1.46)$$

Поскольку нахождение спектральной функции или изображения входного сигнала не представляет труда, решение задачи сводится к отысканию коэффициента передачи параметрической цепи.

В нашем случае должен быть найден коэффициент передачи параметрической среды, который выражается зависимостью диэлектрической проницаемости ε_a от частоты ω и времени t . Таким образом, при использовании преобразования Фурье первое материальное уравнение запишется в форме, сходной с (1.32):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.47)$$

где спектральную функцию $\mathbf{G}_E(\omega)$ находят по формуле (1.28).

Обозначая аналогично (1.31):

$$\mathbf{G}_D(\omega) = \varepsilon_a(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega), \quad (1.48)$$

получаем

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_D(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.49)$$

При использовании преобразования Лапласа материальное уравнение запишется в виде (1.38):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} \varepsilon_a(t, p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.50)$$

* Параметрической называют среду, параметры которой изменяются во времени.

Для всех видов первого материального уравнения справедлива теорема Гаусса, соответствующая соотношению (1.16).

Иногда электрический заряд $Q_э$ целесообразно выражать через его объемную плотность $\rho_э$:

$$Q_э = \int_{V_1} \rho_э dV. \quad (1.51)$$

Найдем единицу измерения объемной плотности электрического заряда:

$$\rho_э \rightarrow \text{Кл/м}^3.$$

При этом теорема Гаусса запишется в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_э dV. \quad (1.52)$$

Если в замкнутой поверхности S_1 находится заряд $Q_э$, который с течением времени уменьшается, то это уменьшение будет связано с существованием тока $I_э$, вытекающего из объема, окруженного поверхностью S_1 . Связь тока $I_э$ с зарядом $Q_э$ определяется соотношением

$$I_э = -\frac{\partial Q_э}{\partial t} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_э}{\partial t} dV. \quad (1.53)$$

Знак «минус» перед производной объясняется тем, что с течением времени заряд $Q_э$ уменьшается. Ток $I_э$ связан с плотностью тока $\mathbf{J}_э$ соотношением

$$I_э = \oint_{S_1} \mathbf{J}_э d\mathbf{S}. \quad (1.54)$$

Это выражение позволяет найти единицу измерения плотности электрического тока:

$$\mathbf{J}_э \rightarrow \text{А/м}^2.$$

С учетом (1.54) выражение (1.53) может быть переписано в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_э d\mathbf{S} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_э}{\partial t} dV. \quad (1.55)$$

Соотношение (1.55) называют *первым уравнением непрерывности в интегральной форме*, связывающим плотность электрического тока с объемной плотностью электрического заряда.

Если плотность зарядов не изменяется во времени, то интеграл по поверхности равен нулю, что свидетельствует о замкнутости, непрерывности линий плотности постоянного тока.

§ 1.4. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} . Связь вектора \mathbf{B} с током

Эксперименты показывают, что неподвижный заряд $Q_э$ в магнитном поле не испытывает никаких воздействий со стороны этого поля.

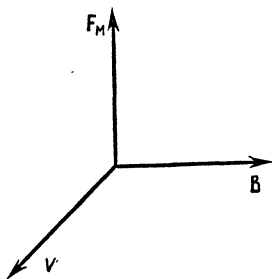


Рис. 1.4

Если же этот заряд движется в магнитном поле со скоростью v , то по данным опытов, например с катодными лучами (движущимися электрическими зарядами), возникает сила F_M , действующая на движущийся заряд и вызывающая изменение его траектории.

По результатам экспериментов можно определить величину и направление этой силы как функцию скорости движения заряда v , интенсивности и ориентации силовых линий магнитного поля, характеризуемых некоторым вектором B . Вектор B ориентирован так же, как и силовые линии магнитного поля. При этом справедливо экспериментальное соотношение

$$F_M = Q_3 [vB], \quad (1.56)$$

которое иллюстрируется рис. 1.4.

Если помимо магнитного поля B движущийся заряд находится также в электрическом поле E , он испытывает действие суммарной силы F :

$$F = F_3 + F_M = Q_3 (E + [vB]), \quad (1.57)$$

называемой силой Лоренца.

С помощью соотношения

$$F_M = Q_3 [vB] = I_{F_M} Q_3 v B \sin \alpha,$$

где I_{F_M} — орт, характеризующий направление силы F_M ; α — угол между векторами v и B , можно найти вектор B .

Действительно, определив опытным путем (например, по смещению пятна на экране катодной трубки) величину силы F_M , а также, зная угол α между вектором скорости v и ориентацией силовых линий магнитного поля B , величину заряда Q_3 и скорость его движения v , можно определить модуль вектора $|B|$:

$$|B| = \frac{F_M}{Q_3 v \sin \alpha}.$$

Поскольку направление этого вектора совпадает с ориентацией силовых линий поля, вектор B может быть определен полностью.

Существует и другая методика определения вектора B . Изменяя направление вектора v и фиксируя силу F_M , находят максимальное значение силы $F_{M \max}$, соответствующее $\alpha = 90^\circ$.

Направление вектора B при этом будет перпендикулярным вектору v , а его модуль

$$|B| = \frac{F_{M \max}}{Q_3 v}.$$

На основании соотношения (1.56) определим единицу измерения вектора \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}}.$$

Из (1.5) следует, что $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \mathbf{B}$, поэтому

$$\mathbf{B} \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}. \quad (1.58)$$

Введем понятие об элементарном потоке $d\Phi_B$ вектора \mathbf{B} через бесконечно малую поверхность dS :

$$d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.59)$$

Конечный поток Φ_B через конечную поверхность S_1 может быть найден по соотношению

$$\Phi_B = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.60)$$

Магнитное поле в электродинамических процессах создается за счет электрического тока I_3 . Важно установить математическую связь между током I_3 и вектором \mathbf{B} . Эту связь можно получить экспериментально (рис. 1.5).

Плоскость катушки с числом витков w_1 пересекает ток I_3 , создающий магнитное поле \mathbf{B} . Поток этого вектора Φ_B , пересекающий виток катушки, находят из соотношения (1.60). Если площадь витка катушки S_1 достаточно мала, то в пределах этой площади вектор \mathbf{B} можно считать неизменным и записать выражение (1.60) в виде

$$\Phi_B = BS_1 \cos \alpha,$$

где α — угол между нормалью к поверхности S_1 и вектором \mathbf{B} .

Предположив, что периметр катушки равен l_1 , найдем число витков, приходящееся на бесконечно малый участок этого периметра dl : $\frac{w_1 dl}{l_1}$.

Поток Φ_B пересечет на участке dl плоскость витка катушки $\frac{w_1 dl}{l_1}$ раз.

Поток $d\Psi_B$, сцепленный с $\frac{w_1 dl}{l_1}$ витками, определяется произведением

$$d\Psi_B = \Phi_B \frac{w_1 dl}{l_1}.$$

Полный поток, сцепленный со всеми витками катушки, или полное потокосцепление Ψ_B , может быть найдено путем интегри-

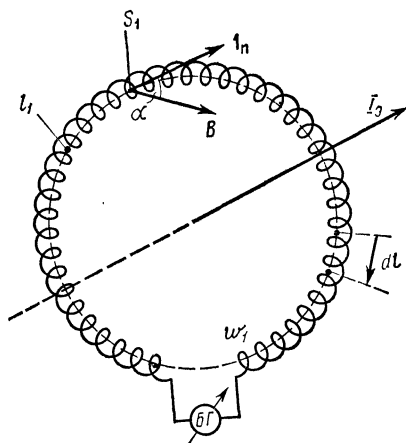


Рис. 1.5

рования по всему периметру l_1 катушки:

$$\Psi_B = \oint_{l_1} \Phi_B \frac{\omega_1}{l_1} dl = \frac{\omega_1}{l_1} \oint_{l_1} BS_1 \cos \alpha dl = \frac{\omega_1 S_1}{l_1} \oint_{l_1} B \cos \alpha dl.$$

Здесь α — угол между вектором \mathbf{B} и нормалью к поверхности S_1 .

С этой нормалью совпадает направление участка периметра dl . Следовательно, α является углом между векторами \mathbf{B} и dl . При этом произведение под интегралом можно представить в векторной форме:

$$B \cos \alpha dl = \mathbf{B} dl.$$

Тогда

$$\Psi_B = \frac{\omega_1 S_1}{l_1} \int_{l_1} \mathbf{B} dl.$$

Подсоединив к концам катушки баллистический гальванометр $БГ$ (см. рис. 1.5), позволяющий измерить суммарное потягосцепление Ψ_B при различных величинах тока I_3 , можно экспериментально найти зависимость интеграла $\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \frac{\Psi_B l_1}{\omega_1 S_1}$ от тока I_3 . В результате экспериментов, осуществленных в вакууме, было установлено, что интеграл $\oint_{l_1} \mathbf{B} dl$ пропорционален току I_3 . Другими словами, была экспериментально установлена справедливость соотношения

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 I_3, \quad (1.61)$$

где μ_0 — коэффициент пропорциональности, называемый *магнитной постоянной*:

$$\mu_0 = \frac{\oint_{l_1} \mathbf{B} dl}{I_3} \dots$$

Определим единицу измерения магнитной постоянной:

$$\mu_0 \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \text{Гн/м}. \quad (1.62)$$

В системе МКСА

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}. \quad (1.63)$$

Если в эксперименте магнитное поле \mathbf{B} создается током I_3 , протекающим по второй катушке с числом витков ω_2 , то соотношение (1.62) должно быть записано в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 \omega_2 I_3. \quad (1.64)$$

§ 1.5. Воздействие внешнего магнитного поля на вещество.
Вектор напряженности магнитного поля H .
Закон полного тока.
Второе материальное уравнение среды.
Второе уравнение непрерывности

Рассмотрим эксперимент, иллюстрируемый рис. 1.6.

На сердечник, выполненный из некоторого материала, намотана катушка с числом витков w_2 , по которой пропускается ток I_2 . Магнитное поле измеряется в точке наблюдения b при наличии сердечников, выполненных из различных материалов.

Эксперименты показывают, что при этом имеются три варианта поведения магнитного поля: 1) при использовании ферромагнитных сердечников магнитное поле резко возрастает; 2) при использовании диамагнитных сердечников магнитное поле уменьшается; 3) при использовании парамагнитных сердечников магнитное поле не претерпевает существенных изменений по сравнению с опытом в отсутствие сердечника.

Наблюдаемые факты можно объяснить различной ориентацией элементарных магнитов в веществе под действием внешнего поля.

Для количественного описания влияния вещества на магнитное поле примем следующую схему рассуждений.

Добавочное магнитное поле, вызываемое определенной ориентацией элементарных магнитов, можно считать эквивалентным полю, создаваемому добавочным током I_3 , однократно охватывающим сердечник и равномерно распределенным по его длине. В зависимости от величины и ориентации добавочного тока создаваемое им добавочное магнитное поле может совпадать с первичным полем тока I_2 . При этом суммарное поле возрастает — случай, эквивалентный ферромагнитному сердечнику. Добавочное поле может быть ориентировано так, что суммарное поле будет уменьшаться — случай, эквивалентный диамагнитному сердечнику. Парамагнитному сердечнику соответствует нулевое значение тока I_3 . Отметим, что при надлежащей ориентации тока I_3 возможно изменение не только величины, но и ориентации суммарного поля.

Далее выбираем контур обхода l_1 (см. рис. 1.6), участок ac которого находится в пределах сердечника, а участок cda — вне его.

Рассмотрим бесконечно малый ток dI_3 , охватывающий бесконечно малый участок контура обхода dl . Отношение dI_3/dl зависит от ориентации контура обхода. Если эта ориентация совпадает с линиями тока, то отношение $dI_3/dl = 0$, так как при движении вдоль линий тока прираще-

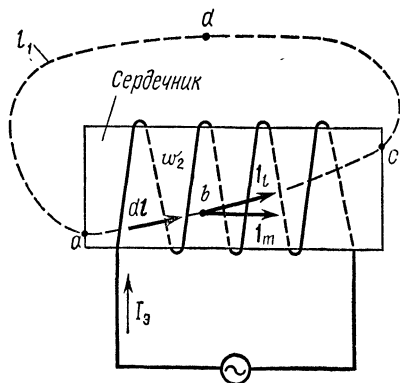


Рис. 1.6

шение dI'_3 равно нулю. Если dl перпендикулярно линиям тока, то это отношение будет максимальным. Введем обозначение

$$\left(\frac{dI'_3}{dl}\right)_{\max} = M. \quad (1.65)$$

Пусть направление dl , при котором производная dI'_3/dl максимальна, характеризуется единичным вектором $\mathbf{1}_m$. Если ориентация контура обхода не совпадает с направлением $\mathbf{1}_m$ и характеризуется единичным вектором $\mathbf{1}_l$, то производная dI'_3/dl может быть получена путем проекции ее максимального значения M , соответствующего направлению $\mathbf{1}_m$, на новое направление $\mathbf{1}_l$. Эта проекция характеризуется скалярным произведением векторов $\mathbf{1}_l$ и $\mathbf{1}_m$. Следовательно, $dI'_3/dl = M\mathbf{1}_l\mathbf{1}_m$.

Обозначив

$$M\mathbf{1}_m = \mathbf{M}, \quad (1.66)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности вещества, получим

$$\frac{dI'_3}{dl} = \mathbf{M}\mathbf{1}_l,$$

или

$$dI'_3 = \mathbf{M}\mathbf{1}_l dl = \mathbf{M}dl. \quad (1.67)$$

Ток I'_3 найдем интегрированием выражения (1.67) на участке ac контура обхода, находящемся в веществе:

$$I'_3 = \int_{ac} \mathbf{M}dl.$$

На участке cda контура обхода нет вещества и вектор \mathbf{M} равен нулю. Следовательно,

$$\int_{cda} \mathbf{M}dl = 0.$$

Прибавляя этот интеграл к интегралу на участке ac , не изменим интеграл на участке ac . Тогда можно записать

$$I'_3 = \int_{ac} \mathbf{M}dl + \int_{cda} \mathbf{M}dl.$$

Объединяя участки ac и cda контура обхода, получаем интеграл по замкнутому контуру l_1 :

$$I'_3 = \oint_{l_1} \mathbf{M}dl. \quad (1.68)$$

Таким образом, влияние вещества на процесс формирования магнитного поля можно свести к появлению дополнительного тока I'_3 помимо первичного тока I_3 , создавшего первичное поле, которое вызвало внутренние процессы в веществе. Для оценки магнитного

поля, возникающего под влиянием тока в веществе, можно использовать соотношение (1.64) при условии добавления к току I_2 , протекающему по катушке с числом витков ω_2 , «одновиткового» тока I_3 . При этом выражение (1.64) запишется в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} dl = \mu_0 \omega_2 I_2 + \mu_0 I_3 = \mu_0 \omega_2 I_2 + \mu_0 \oint_{l_1} \mathbf{M} dl.$$

Объединяя интегралы, получаем

$$\oint_{l_1} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) dl = \omega_2 I_2. \quad (1.69)$$

Введем обозначение

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H}, \quad (1.70)$$

где \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля.

По аналогии с вектором электрического смещения, или вектором электрической индукции \mathbf{D} , вектор \mathbf{H} в силу сходности рассуждений целесообразно было бы назвать вектором магнитного смещения или вектором магнитной индукции, а вектор \mathbf{B} — вектором напряженности магнитного поля. К сожалению, установившуюся терминологию изменить невозможно.

С учетом обозначения (1.70) выражение (1.69) можно переписать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = \omega_2 I_2, \quad (1.71)$$

или при $\omega_2 = 1$

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = I_2. \quad (1.72)$$

Это выражение носит название *закона полного тока*. Под I_2 понимают ток, протекающий через некоторую площадку, охватываемую контуром интегрирования l_1 .

Определим единицу измерения напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{H} \rightarrow \text{А/м}. \quad (1.73)$$

Выражение (1.70) представляет собой математическую связь между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} , называемую *вторым материальным уравнением среды*. Это уравнение записывается по-разному для различных сред, и на нем следует остановиться подробно. Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны рассуждениям, приведенным при выводе первого материального уравнения среды (см. § 1.3).

Для однородной линейной изотропной среды и монохроматического поля вектор намагниченности вещества \mathbf{M} полагают пропорциональным вектору напряженности поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (1.74)$$

Коэффициент пропорциональности χ_m называют *магнитной восприимчивостью вещества*.

Выражения (1.65) и (1.74) позволяют определить единицы измерения вектора намагниченности вещества и магнитной восприимчивости:

$$\mathbf{M} \rightarrow \text{А/м}, \quad (1.75)$$

$$\chi_m \rightarrow \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{А}} = 1. \quad (1.76)$$

Таким образом, χ_m является безразмерной величиной. Подставив выражение (1.74) в формулу (1.70), получим

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mathbf{H} \mu_0 (1 + \chi_m). \quad (1.77)$$

Введя обозначение

$$\mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_a, \quad (1.78)$$

где μ_a называют *абсолютной магнитной проницаемостью вещества*, можно записать

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1.79)$$

Коэффициент пропорциональности μ_a измеряется на основании соотношения (1.78) в тех же единицах, что и магнитная постоянная:

$$\mu_a \rightarrow \text{Гн/м}. \quad (1.80)$$

Аналогично относительной диэлектрической проницаемости введем относительную магнитную проницаемость:

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0, \quad (1.81)$$

которая является также безразмерной величиной. В реальных средах относительная магнитная проницаемость может быть действительной или комплексной величиной и колебаться в пределах от единицы до десятков тысяч. Запись второго материального уравнения для различных сред в значительной степени аналогична записи первого материального уравнения.

Так, для монохроматического поля и неоднородной линейной изотропной среды магнитная проницаемость в общем случае становится функцией обобщенных криволинейных координат ξ, η, ζ :

$$\mu_a = \mu_a(\xi, \eta, \zeta)$$

и второе материальное уравнение записывается таким образом:

$$\mathbf{B} = \mu_a(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{H}. \quad (1.82)$$

Для монохроматического поля и однородной нелинейной изотропной среды магнитная проницаемость является функцией поля:

$$\mu_a = \mu_a(H)$$

и второе материальное уравнение записывается таким образом:

$$\mathbf{B} = \mu_a(H) \mathbf{H}. \quad (1.83)$$

Для монохроматического поля и однородной линейной анизотропной среды справедливы соотношения вида (1.23)

$$\left. \begin{aligned} B_{\xi} &= \mu_{a11} H_{\xi} + \mu_{a12} H_{\eta} + \mu_{a13} H_{\zeta}, \\ B_{\eta} &= \mu_{a21} H_{\xi} + \mu_{a22} H_{\eta} + \mu_{a23} H_{\zeta}, \\ B_{\zeta} &= \mu_{a31} H_{\xi} + \mu_{a32} H_{\eta} + \mu_{a33} H_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{B} = (\mu_a) \mathbf{H}, \quad (1.85)$$

где (μ_a) — тензор абсолютной магнитной проницаемости:

$$(\mu_a) = \begin{pmatrix} \mu_{a11} & \mu_{a12} & \mu_{a13} \\ \mu_{a21} & \mu_{a22} & \mu_{a23} \\ \mu_{a31} & \mu_{a32} & \mu_{a33} \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

В общем случае в анизотропной среде каждая из составляющих вектора \mathbf{B} изменяется в своем масштабе по отношению к соответствующей составляющей вектора \mathbf{H} , что в конечном счете приводит к несовпадению ориентаций векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} .

Для монохроматического поля и недиспергирующей среды справедливы формы записи второго материального уравнения, перечисленные ранее.

Если спектр частот поля дискретен и среда обладает частотной зависимостью (диспергирующая среда), то второе материальное уравнение сходно по форме с первым материальным уравнением (1.27):

$$\mathbf{B} = \mu_a(\omega_0) \dot{H}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mu_a(\omega_1) H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \mu_a(\omega_2) H_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \mu_a(\omega_n) H_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (1.87)$$

Для непрерывного спектра частот и диспергирующей среды можно использовать преобразование Фурье или Лапласа. В первом случае справедливо соотношение вида (1.32)

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.88)$$

Здесь

$$\mathbf{G}_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.89)$$

и соответственно

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.90)$$

Во втором случае могут быть записаны соотношения видов (1.38) и (1.33)

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{H}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-pt} dt, \quad (1.92)$$

где p определяется выражением (1.34).

Если абсолютная магнитная проницаемость μ_a изменяется по заданному временному закону

$$\mu_a = \mu_a(t) \quad (1.93)$$

и среда не обладает дисперсией, то для однородной линейной изотропной среды будет справедливо соотношение

$$\mathbf{B} = \mu_a(t) \mathbf{H}. \quad (1.94)$$

Среда при этом называется параметрической. Сложнее, когда абсолютная магнитная проницаемость не только изменяется во времени, но и является функцией частоты:

$$\mu_a = \mu_a(t, \omega). \quad (1.95)$$

При определении вида второго материального уравнения среды может быть использовано преобразование Фурье либо Лапласа, аналогично тому, как это было сделано при выводе первого материального уравнения. Получаемые при этом соотношения аналогичны (1.47) и (1.50):

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(t, \omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.96)$$

или

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(t, p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp. \quad (1.97)$$

Здесь $\mathbf{G}_H(\omega)$ и $\mathbf{H}(p)$ вычисляются с помощью соотношений (1.89) и (1.92).

В § 1.3 было выведено первое уравнение непрерывности, представляющее собой математическую связь вектора плотности электрического тока \mathbf{J}_a с объемной плотностью электрического заряда ρ_a . В основу вывода была положена обобщенная теорема Гаусса, связывающая поток вектора \mathbf{D} с зарядом Q_a . В случае магнитных векторов поток вектора \mathbf{B} определяется соотношением (1.60). В теореме Гаусса поток вектора \mathbf{D} записывается через замкнутую поверхность S_1 . Записав аналогичный поток вектора \mathbf{B} , следует приравнять его нулю в силу замкнутости магнитных силовых линий и того факта, что пока не известны отдельно существующие положительные или отрицательные магнитные полюса, которые можно было бы рассматривать в качестве положительных или отрицательных магнитных зарядов Q_m . Тем не менее, иногда при расчетах целесообразно искусственно вводить сторонние магнитные заряды Q_m . Термин «сторонний» означает, что этот заряд вводится дополнительно со стороны и является источником поля. Концепция магнитного заряда и связанного с ним стороннего магнитного тока, как будет показано в дальнейшем, приводит к так называемому принципу перестановочной двойственности электродинамических уравнений, позволяющему существенно облегчить решение ряда электродинамических задач. Исходя из этих соображений, выражение для потока вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность S_1 следует записывать в двух формах:

без учета магнитных зарядов

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (1.98)$$

при введении магнитных зарядов

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_m, \quad (1.99)$$

Равенства (1.98) и (1.99) справедливы тогда, когда в среде можно не учитывать так называемых магнитных потерь, характеризующихся магнитной проводимостью, которая будет введена в дальнейшем. При наличии магнитной проводимости эти формулы изменятся.

На основании (1.58) магнитная индукция B измеряется в веберах на квадратный метр.

С помощью соотношений (1.99) и (1.58) можно установить единицу измерения магнитного заряда:

$$Q_M \rightarrow \frac{B \cdot c}{M^2} \cdot M^2 = B \cdot c = \text{Вб}. \quad (1.100)$$

Магнитный заряд Q_M связан с его объемной плотностью ρ_M соотношением вида (1.51):

$$Q_M = \int_{V_1} \rho_M dV. \quad (1.101)$$

Найдем единицу измерения объемной плотности магнитного заряда:

$$\rho_M \rightarrow \frac{B \cdot c}{M^3} = \frac{\text{Вб}}{M^3}. \quad (1.102)$$

Формулу (1.99) с учетом (1.101) можно записать как

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_M dV. \quad (1.103)$$

Искусственно допуская введение в электродинамику сторонних магнитных зарядов, следует признать и существование стороннего магнитного тока I_M , связанного с зарядом соотношением вида (1.53):

$$I_M = - \frac{\partial Q_M}{\partial t} = - \int_{V_1} \frac{\partial \rho_M}{\partial t} dV. \quad (1.104)$$

Определим единицу измерения магнитного тока:

$$I_M \rightarrow \frac{B \cdot c}{c} = B. \quad (1.105)$$

Поскольку сторонний магнитный ток измеряется в вольтах, правильнее было бы назвать его сторонним напряжением, однако сохраним принятую ранее терминологию.

Магнитный ток связан с плотностью тока J_M соотношением вида (1.54)

$$I_M = \oint_{S_1} \mathbf{J}_M d\mathbf{S}. \quad (1.106)$$

Отсюда можно найти единицу измерения плотности магнитного тока

$$J_M \rightarrow B/M^2. \quad (1.107)$$

С учетом (1.106) соотношение (1.104) может быть записано следующим образом:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} = - \int_{V_1} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} dV. \quad (1.108)$$

Это выражение называют *вторым уравнением непрерывности в интегральной форме*, связывающим плотность стороннего магнитного тока \mathbf{J}_m с объемной плотностью стороннего магнитного заряда ρ_m .

§ 1.6. Электрическая проводимость среды. Закон Ома в дифференциальной и интегральной формах. Сторонний электрический ток. Ток смещения. Обобщенный закон полного тока

В правой части выражения (1.72), определяющего закон полного тока, записывается ток I_s . В соответствии с приведенным ранее обоснованием под этим током следует понимать ток генератора, протекающий по проводнику и создающий магнитное поле. Однако такое представление не является единственно возможным. Если переменное во времени магнитное поле создано каким-либо источником тока и в пространстве, где существует магнитное поле, имеются проводники, то в последних, как показывает опыт, возникают токи проводимости. Эти токи в свою очередь создают магнитное поле, взаимодействующее с первичным полем. В результате получается суммарное поле, являющееся результатом действия токов генераторов и токов, существующих в проводящей среде. Соотношение (1.72) потому и называют законом полного тока, что в нем фигурирует суммарное магнитное поле, созданное всеми токами, существующими в рассматриваемой части пространства. Эти токи целесообразно разделять. Токи, создаваемые генераторами, условились называть сторонними электрическими токами или токами возбуждения, а токи, создаваемые полем в проводящей среде — токами проводимости.

Можно записать следующие соотношения, связывающие сторонний электрический ток I_s с вектором его плотности \mathbf{J}_s и ток проводимости $I_{\text{эл}}$ — с вектором его плотности $\mathbf{J}_{\text{эл}}$:

$$I_s = \int_{S_1} \mathbf{J}_s d\mathbf{S}, \quad (1.109)$$

$$I_{\text{эл}} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{эл}} d\mathbf{S}. \quad (1.110)$$

Так как ток $I_{\text{эл}}$ создается полем, нагляднее выразить его через поле с помощью закона Ома:

$$I_{\text{эл}} = U/R, \quad (1.111)$$

где U — разность потенциалов на концах проводящего участка среды; R — сопротивление проводящего участка, равное

$$R = \frac{l}{S\gamma_s} \quad (1.112)$$

(l — длина проводящего участка, м; S — сечение проводящего участка, м^2 ; γ_a — удельная электрическая проводимость среды, См/м).

Подставив выражение (1.112) в (1.111), получаем

$$I_{\text{эп}} = \frac{U}{l} S \gamma_a.$$

В электродинамике приходится иметь дело с величинами, изменяющимися от точки к точке рассматриваемого пространства. В силу этого полученное соотношение лучше выразить в дифференциальной форме:

$$dI_{\text{эп}} = \frac{dU}{dl} dS \gamma_a.$$

Здесь $dI_{\text{эп}}$ — бесконечно малый ток, протекающий через бесконечно малое сечение dS в результате существования на бесконечно малой длине dl проводящего участка бесконечно малой разности потенциалов dU .

Поделив обе части этого выражения на dS , получаем

$$\frac{dI_{\text{эп}}}{dS} = J_{\text{эп}} = \frac{dU}{dl} \gamma_a. \quad (1.113)$$

Разность потенциалов U можно выразить с помощью формулы (1.5):

$$U = \int_{l_1} \mathbf{E} dl_1$$

(l_1 — единичный вектор, ориентированный вдоль длины dl).

Следовательно, $dU/dl = \mathbf{E} l_1$.

Тогда вместо (1.113) получим

$$J_{\text{эп}} = \mathbf{E} l_1 \gamma_a.$$

Умножая обе части этого выражения скалярно на орт l_1 , находим

$$J_{\text{эп}} l_1 = J_{\text{эп}} = \mathbf{E} l_1 \gamma_a,$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эп}} = \gamma_a \mathbf{E}. \quad (1.114)$$

Соотношение (1.114) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно связывает вектор плотности тока электрической проводимости $\mathbf{J}_{\text{эп}}$ с вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} через удельную электрическую проводимость среды γ_a .

Соотношение (1.114) можно рассматривать как *третье материальное уравнение среды*. Аналогично первому и второму материальным уравнениям его можно записать по-разному для различных сред.

Для неоднородной среды имеем выражение вида (1.82):

$$\mathbf{J}_{\text{эп}} = \gamma_a (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{E}. \quad (1.115)$$

Для нелинейной среды справедлива формула, аналогичная (1.83):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}} = \gamma_{\text{э}}(E) \mathbf{E}, \quad (1.116)$$

а для анизотропной среды — соотношения вида (1.84), (1.85), (1.86):

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{эл}\xi} &= \gamma_{\text{эл}11} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}12} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}13} E_{\zeta}, \\ J_{\text{эл}\eta} &= \gamma_{\text{эл}21} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}22} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}23} E_{\zeta}, \\ J_{\text{эл}\zeta} &= \gamma_{\text{эл}31} E_{\xi} + \gamma_{\text{эл}32} E_{\eta} + \gamma_{\text{эл}33} E_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

или в сокращенной векторной форме

$$\mathbf{J}_{\text{эл}} = (\gamma_{\text{э}}) \mathbf{E}, \quad (1.118)$$

где $(\gamma_{\text{э}})$ — тензор удельной электрической проводимости:

$$(\gamma_{\text{э}}) = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{эл}11} & \gamma_{\text{эл}12} & \gamma_{\text{эл}13} \\ \gamma_{\text{эл}21} & \gamma_{\text{эл}22} & \gamma_{\text{эл}23} \\ \gamma_{\text{эл}31} & \gamma_{\text{эл}32} & \gamma_{\text{эл}33} \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

В случае дискретного спектра частот и наличия частотной зависимости $\gamma_{\text{э}} = \gamma_{\text{э}}(\omega)$ третье материальное уравнение среды приобретает вид, сходный с (1.87):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{эл}} &= \gamma_{\text{э}}(\omega_0) \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_{\text{э}}(\omega_1) \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ &+ \gamma_{\text{э}}(\omega_2) \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \gamma_{\text{э}}(\omega_n) \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \end{aligned} \quad (1.120)$$

В случае непрерывного спектра частот и частотной зависимости $\gamma_{\text{э}}$ справедливы соотношения вида (1.88), (1.89) или (1.91), (1.92):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{э}}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.121)$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{\text{э}}(p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.122)$$

В этих соотношениях $G_E(\omega)$, $\mathbf{E}(p)$ и p находят соответственно с помощью выражений (1.28), (1.33) и (1.34).

Для параметрической среды характерны формулы вида (1.96) или (1.97):

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{\text{э}}(t, \omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.123)$$

или

$$\mathbf{J}_{\text{эл}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{\gamma}_{\text{э}}(t, p) \mathbf{E}(p) e^{pt} dp. \quad (1.124)$$

С учетом соотношений (1.110) и (1.114) можно записать следующее выражение для тока проводимости:

$$I_{\text{эл}} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\text{эл}} d\mathbf{S} = \int_{S_1} \gamma_{\text{э}} \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1.125)$$

Выражение (1.125) является законом Ома в интегральной форме в случае изменяющихся параметров среды и поля.

Приведенные рассуждения применимы к средам, обладающим проводимостью. Однако, по опытным данным, при подведении к об-

кладкам конденсатора переменного напряжения в цепи конденсатора проходит ток, создающий магнитное поле так же, как и ток проводимости. Экспериментально доказана справедливость закона полного тока (1.72) в случае замены тока I_0 током, протекающим в цепи конденсатора. Этот ток получил название *тока смещения*.

Ампер установил закон, исследуя токи в проводниках и поля, создаваемые этими токами. Фарадей проанализировал результаты воздействия переменных во времени полей на проводящие цепи.

Заслуга Максвелла заключается в том, что он наряду с понятием тока проводимости ввел понятие тока смещения. Дадим математическую формулировку этого понятия.

Продифференцируем выражение (1.15) по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.126)$$

Поскольку вектор \mathbf{D} измеряется в Кл/м², единицей измерения производной $\partial \mathbf{D} / \partial t$ является Кл/(м²·с.). Но Кл/с = А и А/м² является единицей измерения плотности тока. Таким образом,

$$\partial \mathbf{D} / \partial t \rightarrow \text{А/м}^2.$$

Эту производную можно рассматривать как некоторую плотность тока. Составные части этой плотности тока, определяемые выражением (1.126), позволяют сделать следующие выводы. Выражение $dQ'_3 = \mathbf{P} dS \mathbf{1}_n$ представляет собой математическую связь вектора поляризованности вещества \mathbf{P} с зарядом dQ'_3 , прошедшим через поверхность dS в результате процесса поляризации. Переписав это выражение в форме $dQ'_3/dS = \mathbf{P} \mathbf{1}_n$ и умножив скалярно обе части на $\mathbf{1}_n$, получаем

$$\frac{dQ'_3}{dS} \mathbf{1}_n = \mathbf{P}.$$

Производная

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dQ'_3}{dS} \right) \mathbf{1}_n = \frac{d}{dS} \left(\frac{\partial Q'_3}{\partial t} \right) \mathbf{1}_n.$$

Производная $\partial Q'_3 / \partial t = I'_3$ представляет собой ток I'_3 , созданный в результате смещения в диэлектрике зарядов Q'_3 . Этот ток называют *током смещения в диэлектрике*. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{dI'_3}{dS} \mathbf{1}_n = \mathbf{J}'_3 \mathbf{1}_n = \mathbf{J}'_3, \quad (1.127)$$

где \mathbf{J}'_3 — плотность тока смещения в диэлектрике.

Таким образом, второе слагаемое в выражении (1.126) есть плотность тока смещения в диэлектрике, возникающая в результате процесса поляризации.

Следовательно, если между обкладками конденсатора заключен диэлектрик, то в нем возникает ток смещения, способный создать магнитное поле. Опыт показывает, что магнитное поле создается и в том случае, когда диэлектрика между пластинами нет и они поме-

щены в вакуум. В соответствии с теорией Максвелла при этом возникает ток смещения в вакууме, вектор плотности которого

$$\mathbf{J}'_{\text{эв}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.128)$$

Этот ток создается фотонами.

Полная плотность тока смещения

$$\mathbf{J}_c = \partial \mathbf{D} / \partial t. \quad (1.129)$$

Таким образом, в общем случае магнитное поле определяется тремя токами: сторонним электрическим током I_s (1.109), током проводимости $I_{\text{эп}}$ (1.125) и током смещения, определяемым по формуле

$$I_c = \int_{S_1} \mathbf{J}_c d\mathbf{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.130)$$

Если в процессе формирования магнитного поля участвуют все три тока, то закон полного тока (1.72) следует записать в расширенной форме:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_s d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_s \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.131)$$

Это выражение дает математическую связь между сторонним током, создавшим поле, и векторами поля. В силу того что вектор \mathbf{D} с помощью материальных уравнений среды может быть определен через вектор \mathbf{E} , уравнение (1.131) при известной плотности тока и параметрах среды является уравнением, в котором неизвестны два вектора поля: \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для его решения необходимо второе уравнение, связывающее эти векторы.

§ 1.7. Теорема Гаусса для вещества в случае проводящей среды

В § 1.3 было показано, что теорема Гаусса для вещества (1.16) справедлива в случае непроводящей среды — идеального диэлектрика. При выводе этой теоремы помимо стороннего электрического заряда, создающего поле, были учтены заряды, возникающие за счет токов смещения. Для проводящей среды должны быть учтены также заряды, возникающие за счет токов проводимости. В основу рассуждений положено выражение (1.16).

При наличии проводимости γ_s в среде, ограниченной замкнутой поверхностью S_1 , в которой находится сторонний заряд Q_s , создающий поле, за пределы этой поверхности будет вытекать ток проводимости $I_{\text{эп}}$, определяемый выражением (1.125). В результате этого сторонний заряд Q_s , внесенный в поверхность S_1 в момент времени $t=0$, будет уменьшаться по закону

$$Q_s - \int_0^t I_{\text{эп}} dt = Q_s - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_s \mathbf{E} dt d\mathbf{S}.$$

Подставив это выражение в правую часть теоремы Гаусса (1.16) вместо заряда Q_3 , получаем

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_3 - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt d\mathbf{S}.$$

Далее, объединяя поверхностные интегралы

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_3 \mathbf{E} dt \right) d\mathbf{S} = Q_3, \quad (1.132)$$

находим соотношение, являющееся *теоремой Гаусса для вещества в случае проводящей среды*. Если среда не является однородной линейной анизотропной или поле носит спектральный характер, то ток проводимости следует записывать с учетом третьего материального уравнения, выражающего связь плотности тока проводимости с вектором \mathbf{E} в каждом конкретном случае.

§ 1.8. Закон электромагнитной индукции Фарадея.

Сторонний магнитный ток. Магнитная проводимость среды.

Закон электромагнитной индукции в расширенной форме.

Перестановочная двойственность интегральных уравнений электродинамики

В 1831 г. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, заключающееся в том, что переменное во времени магнитное поле, пересекающее плоскость проводящего витка, создает на его концах разность потенциалов. Фарадей установил, что разность потенциалов пропорциональна скорости изменения потока вектора магнитной индукции \mathbf{B} . Выразим это математически:

$$U = - \partial \Phi_B / \partial t, \quad (1.133)$$

где U — разность потенциалов на концах проводящего витка; Φ_B — поток вектора \mathbf{B} через площадь витка S_1 .

Знак «минус» означает, что возникающая разность потенциалов порождает в витке ток такого направления, при котором создаваемый этим током вокруг витка вторичный магнитный поток направлен против первичного (внешнего) магнитного потока. Суммарный магнитный поток при этом уменьшается, что можно считать следствием включения дополнительной разности потенциалов в цепь внешнего источника, создающего первичное поле. Знак этой разности потенциалов должен быть противоположен знаку напряжения источника, создающего первичное магнитное поле.

Используя выражения (1.5) и (1.60), соотношение (1.133) можно записать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.134)$$

Интеграл в левой части взят по замкнутому контуру l_1 , так как виток считается замкнутым. В интеграле в правой части площадь S_1 представляет собой площадь замкнутого витка. Полученное соотношение дает математическую связь между векторами электрического и магнитного полей, которая существует в динамических, т. е. изменяющихся во времени полях. Это соотношение называется *законом электромагнитной индукции Фарадея*. Совместно с выражением (1.131) и уравнениями среды (1.19), (1.79) оно образует систему уравнений, связывающих электрические и магнитные векторы со сторонними электрическими токами.

Сравнивая математическую форму выражений (1.131) и (1.134), можно заметить схожесть двух соотношений в случае, когда электрическая проводимость среды γ_a равна нулю и отсутствует сторонний электрический ток, определяемый плотностью \mathbf{J}_a .

В § 1.5 было сказано о целесообразности введения в электродинамику в некоторых случаях искусственных сторонних магнитных зарядов Q_m (1.99). Если такие заряды введены в расчет, то на основании формулы (1.104) следует учитывать сторонние магнитные токи I_m , связанные с плотностью \mathbf{J}_m соотношением (1.106).

Так как ток I_m измеряется в вольтах, то введение сторонних магнитных зарядов можно рассматривать как введение некоторого внешнего стороннего напряжения дополнительно к разности потенциалов, определяемой интегралом $\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$.

Это напряжение, создаваемое внешними источниками, существует в той части пространства, где предполагается наличие стороннего магнитного тока I_m , который, как указывалось, было бы правильнее назвать сторонним напряжением. В этом случае, его следует учесть в законе электромагнитной индукции, сложив с разностью потенциалов, создаваемой за счет изменяющегося во времени магнитного поля. Тогда выражение (1.134) принимает вид

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} + I_m = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S},$$

или

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} = - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.135)$$

В дальнейшем станет ясно, как практически реализуется введение магнитного тока и когда этим понятием целесообразно пользоваться.

Выражение (1.135) можно записать в ином виде:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.136)$$

Используя материальные уравнения среды (1.19), (1.79), можно записать законы полного тока и электромагнитной индукции (1.131),

(1.136) в другой форме:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_a \mathbf{E} d\mathbf{S} + \int_{S_1} \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (1.137)$$

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.138)$$

Принимая $\gamma_a = 0$ и сравнивая оба выражения, можно заметить, что при $\gamma_a = 0$ переход от одного к другому осуществляется путем замены вектора \mathbf{H} на вектор \mathbf{E} и обратно, плотности тока \mathbf{J}_a на плотность тока \mathbf{J}_m , взятую со знаком «минус», и обратно, абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a на абсолютную проницаемость μ_a , взятую со знаком «минус». При проведении таких перестановок уравнение (1.137) (при $\gamma_a = 0$) переходит в (1.138) и, наоборот, уравнение (1.138) — в (1.137). Это свойство электродинамических уравнений называют *перестановочной двойственностью*.

Если $\gamma_a \neq 0$, то перестановочная двойственность справедлива при условии добавления в уравнение (1.138) члена — $\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} d\mathbf{S}$.

При этом следовало бы добавить еще одну перестановку: электрическую проводимость γ_a заменить на магнитную проводимость γ_m , взятую с обратным знаком, и обратно.

Учитывая, что введенный интеграл измеряется в вольтах, $\mathbf{H} \rightarrow \text{А/м}$, $d\mathbf{S} \rightarrow \text{м}^2$, определим единицу измерения γ_m :

$$\gamma_m \rightarrow \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Ом}}{\text{м}}. \quad (1.139)$$

Величину γ_m называют *удельной магнитной проводимостью*, хотя правильнее было бы назвать ее удельным магнитным сопротивлением.

Величина γ_m введена в уравнение (1.138) формально с целью записи закона электромагнитной индукции в форме, сходной с законом полного тока, что позволило бы переходить от одного уравнения к другому с помощью принципа перестановочной двойственности. Как будет определено в дальнейшем, физический γ_m характеризует потери в веществе при воздействии на него магнитного поля.

Если допустить существование интеграла

$$\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} d\mathbf{S},$$

то закон электромагнитной индукции следовало бы записать в виде

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} - \int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.140)$$

Введем обозначение

$$\int_{S_1} \gamma_m \mathbf{H} d\mathbf{S} = \mathbf{J}_{мп}. \quad (1.141)$$

Этот интеграл можно рассматривать в соответствии с используемой терминологией как ток магнитной проводимости.

Введем понятие вектора плотности тока магнитной проводимости:

$$\mathbf{J}_{мп} = \gamma_{м} \mathbf{H}. \quad (1.142)$$

Тогда

$$I_{мп} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{мп} d\mathbf{S}. \quad (1.143)$$

Выражение (1.142) представляет собой *четвертое материальное уравнение среды*. Так же как соотношение (1.114) для плотности тока электрической проводимости, оно справедливо в случае однородной линейной, изотропной среды, не обладающей дисперсией.

Для других сред можно записать соотношения, полученные из формул (1.115) — (1.124) путем перестановок: $\gamma_{э} \rightarrow -\gamma_{м}$,

$$J_{эп} \rightarrow -J_{мп}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H},$$

Для неоднородной среды

$$\mathbf{J}_{мп} = \gamma_{м} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{H}. \quad (1.144)$$

Для нелинейной среды

$$\mathbf{J}_{мп} = \gamma_{м}(H) \mathbf{H}. \quad (1.145)$$

Для анизотропной среды

$$\left. \begin{aligned} J_{мп\xi} &= \gamma_{м11} H_{\xi} + \gamma_{м12} H_{\eta} + \gamma_{м13} H_{\zeta}, \\ J_{мп\eta} &= \gamma_{м21} H_{\xi} + \gamma_{м22} H_{\eta} + \gamma_{м23} H_{\zeta}, \\ J_{мп\zeta} &= \gamma_{м31} H_{\xi} + \gamma_{м32} H_{\eta} + \gamma_{м33} H_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.146)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{J}_{мп} = (\gamma_{м}) \mathbf{H}, \quad (1.147)$$

где $(\gamma_{м})$ — тензор удельной магнитной проводимости:

$$(\gamma_{м}) = \begin{pmatrix} \gamma_{м11} & \gamma_{м12} & \gamma_{м13} \\ \gamma_{м21} & \gamma_{м22} & \gamma_{м23} \\ \gamma_{м31} & \gamma_{м32} & \gamma_{м33} \end{pmatrix} \quad (1.148)$$

В случае дискретного спектра частот и наличия частотной зависимости $\gamma_{м} = \gamma_{м}(\omega)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{мп} &= \gamma_{м}(\omega_0) \mathbf{H}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_{м}(\omega_1) \mathbf{H}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ &+ \gamma_{м}(\omega_2) \mathbf{H}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + \gamma_{м}(\omega_n) \mathbf{H}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \end{aligned} \quad (1.149)$$

Для непрерывного спектра частот и частотной зависимости $\gamma_{м}$ имеем

$$\mathbf{J}_{мп}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{м}(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.150)$$

или

$$\mathbf{J}_{мп}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{м}(p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp, \quad (1.151)$$

где $G_H(\omega)$, $\mathbf{H}(p)$ и p находят соответственно из формул (1.89), (1.92), (1.34).

Для параметрической среды четвертое материальное уравнение записывается в виде

$$J_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\text{м}}(t, \omega) G_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.152)$$

или

$$J_{\text{мп}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{\text{м}}(t, p) H(p) e^{pt} dp. \quad (1.153)$$

Уравнения (1.137) и (1.140) представляют собой обобщенные законы полного тока и электромагнитной индукции. Они являются основой для дальнейшего анализа электродинамических процессов.

§ 1.9. Вид интегрального соотношения $\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_{\text{м}}$ в случае среды, обладающей магнитной проводимостью

В § 1.5 было показано, что выражение (1.99) справедливо в отсутствие магнитной проводимости $\gamma_{\text{м}}$. При наличии магнитной проводимости должно быть учтено уменьшение магнитного заряда $Q_{\text{м}}$ вследствие существования токов магнитной проводимости, как это было сделано в § 1.7. Этот ток для замкнутой поверхности определяется формулой (1.141).

Предполагая, что все процессы начались в момент времени $t=0$, вместо заряда $Q_{\text{м}}$ в правой части выражения (1.99) следует поставить соотношение

$$Q_{\text{м}} - \int_0^t I_{\text{мп}} dt = Q_{\text{м}} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt d\mathbf{S}.$$

При этом выражение (1.99) записывается в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = Q_{\text{м}} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt d\mathbf{S}.$$

Объединяя поверхностные интегралы, получаем

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt \right) d\mathbf{S} = Q_{\text{м}}. \quad (1.154)$$

Если среда не является однородной, линейной и изотропной или поле носит спектральный характер, то ток проводимости следует записывать с учетом четвертого материального уравнения среды для каждого конкретного случая.

В отсутствие сторонних магнитных токов и при условии $Q_{\text{м}}=0$ выражение (1.154) приобретает вид

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_{\text{м}} \mathbf{H} dt \right) d\mathbf{S} = 0. \quad (1.155)$$

§ 1.10. Комплексные амплитуды векторов поля, зарядов и токов.

Уравнения электродинамики для комплексных амплитуд в интегральной форме. Интегральные уравнения электродинамики в случае спектральных сигналов

Выражения закона полного тока и закона электромагнитной индукции (1.137), (1.140) является сложными интегро-дифференциальными соотношениями, поэтому следует добиваться их упрощения. В теории электрических цепей существенное упрощение расчетов дает введение комплексного метода, который может быть с успехом использован и в электродинамике. Предположим, что среда линейна и векторы поля создаются монохроматическим током, т. е. током, колеблющимся с частотой ω . Плотность монохроматического тока

$$\mathbf{J}_a = J_{am} \cos(\omega t + \varphi_{J_a}),$$

или в другой форме

$$\mathbf{J}_a = \operatorname{Re} \left\{ \left(\mathbf{J}_{am} e^{j\varphi_{J_a}} \right) e^{j\omega t} \right\}.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{J}_{am} e^{j\varphi_{J_a}} = \mathbf{j}_a, \quad (1.156)$$

где \mathbf{j}_a — комплексная амплитуда плотности стороннего электрического тока.

Тогда

$$\mathbf{J}_a = \operatorname{Re} (\mathbf{j}_a e^{j\omega t}).$$

Таким образом, для получения мгновенного значения вектора плотности стороннего электрического тока при известном значении его комплексной амплитуды достаточно умножить комплексную амплитуду на $e^{j\omega t}$ и взять действительную часть этого произведения. Аналогично могут быть представлены все функции, входящие в уравнения электродинамики:

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= \operatorname{Re} (\dot{Q}_a e^{j\omega t}), & Q_m &= \operatorname{Re} (\dot{Q}_m e^{j\omega t}), \\ \rho_a &= \operatorname{Re} (\dot{\rho}_a e^{j\omega t}), & \rho_m &= \operatorname{Re} (\dot{\rho}_m e^{j\omega t}), \\ \mathbf{J}_a &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{J}}_a e^{j\omega t}), & \mathbf{J}_m &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{J}}_m e^{j\omega t}), \\ \mathbf{E} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), & \mathbf{H} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}), \\ \mathbf{D} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}), & \mathbf{B} &= \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}). \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

Производные по времени векторов поля записываются в виде

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = \operatorname{Re} (j\omega \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = \operatorname{Re} (j\omega \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}). \quad (1.158)$$

Подставляя значения производной вектора \mathbf{E} и функций, входящих в уравнение (1.137), получаем

$$\operatorname{Re} \oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} dl = \operatorname{Re} \int_{S_1} \mathbf{j}_a e^{j\omega t} dS + \operatorname{Re} \int_{S_1} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} dS + \operatorname{Re} \int_{S_1} j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} dS.$$

Заменяя равенство действительных частей равенством комплексных величин, можно отбросить знак вещественности Re и далее все выражение сократить на множитель $e^{j\omega t}$. В результате получаем закон полного тока для комплексных амплитуд функций:

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a dS + \int_{S_1} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} dS + \int_{S_1} j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}} dS.$$

Объединяя третий и четвертый интегралы, получаем

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a dS + \int_{S_1} (j\omega \epsilon_a + \gamma_a) \dot{\mathbf{E}} dS,$$

или

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a dS + \int_{S_1} j\omega \left(\epsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} dS.$$

Вводя обозначение

$$\epsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} = \tilde{\epsilon}_a, \quad (1.159)$$

где $\tilde{\epsilon}_a$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, запишем закон полного тока в форме

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_a dS + \int_{S_1} j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} dS. \quad (1.160)$$

Аналогичные преобразования можно сделать и в отношении закона электромагнитной индукции (1.140):

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m dS - \int_{S_1} j\omega \left(\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}} dS.$$

Обозначив

$$\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} = \tilde{\mu}_a, \quad (1.161)$$

где $\tilde{\mu}_a$ — комплексная абсолютная магнитная проницаемость среды, получаем закон электромагнитной индукции в виде

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_m dS - \int_{S_1} j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} dS. \quad (1.162)$$

Сравнивая законы полного тока и электромагнитной индукции для мгновенных значений функций и для комплексных амплитуд, нетрудно видеть, что введение комплексных амплитуд существенно упрощает математическую запись в силу того, что дифференцирова-

ние функций по времени в комплексном методе заменяется умножением на $j\omega$. Соответственно интегрирование можно заменить делением на $j\omega$. На основании этого соотношения (1.132) и (1.154) в случае использования комплексных амплитуд можно записать следующим образом:

$$\oint_{S_1} \left(\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_a \dot{\mathbf{E}} \right) d\mathbf{S} = \dot{Q}_a,$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a \dot{\mathbf{H}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_m \dot{\mathbf{H}} \right) d\mathbf{S} = \dot{Q}_m,$$

или

$$\oint_{S_1} \left(\epsilon_a - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S} = \dot{Q}_a, \quad (1.163)$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = \dot{Q}_m. \quad (1.164)$$

С учетом формул (1.159) и (1.161) выражения (1.163) и (1.164) можно переписать в виде

$$\oint_{S_1} \bar{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S} = \dot{Q}_a, \quad (1.165)$$

$$\oint_{S_1} \bar{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S} = \dot{Q}_m. \quad (1.166)$$

Так же легко записываются уравнения среды для комплексных амплитуд:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (1.167)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (1.168)$$

Первое и второе уравнения непрерывности (1.55) и (1.108) для комплексных амплитуд значительно упрощаются, так как производные по времени заменяются множителем $j\omega$:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_a d\mathbf{S} = - \int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_a dV, \quad (1.169)$$

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_m d\mathbf{S} = - \int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_m dV. \quad (1.170)$$

Когда сторонние токи не являются монохроматическими, использование комплексных амплитуд также возможно. При этом, если среда линейная, следует различать два основных случая:

1. Сторонние токи представляют собой сумму составляющих дискретного частотного спектра.

При решении задачи уравнения электродинамики записывают для каждой из составляющих дискретного частотного спектра. Для диспергирующей среды в эти уравнения вводят параметры среды, соответствующие рассматриваемой частотной гармонике.

Основные интегральные уравнения электродинамики при этом приобретают вид

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n} dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_{\varepsilon\omega_n} dS + \int_{S_1} j\omega_n \tilde{\varepsilon}_a(\omega_n) \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n} dS, \quad (1.171)$$

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n} dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_{M\omega_n} dS - \int_{S_1} j\omega_n \tilde{\mu}_a(\omega_n) \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n} dS. \quad (1.172)$$

Здесь $\dot{\mathbf{E}}_{\omega_n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\omega_n}$, $\mathbf{J}_{\varepsilon\omega_n}$, $\mathbf{J}_{M\omega_n}$ — комплексные амплитуды гармонических составляющих; $\tilde{\varepsilon}_a(\omega_n)$, $\tilde{\mu}_a(\omega_n)$ — комплексные абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости на частоте, соответствующей рассматриваемой гармонике. Решение задачи сводится к суперпозиции гармонических составляющих:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \sum_{n=0}^m \dot{\mathbf{E}}_{\omega_n}, \quad \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = \sum_{n=0}^m \dot{\mathbf{H}}_{\omega_n}, \quad (1.173)$$

где m — число учитываемых гармоник.

2. Частотный спектр сторонних токов непрерывен.

При этом может быть использовано либо преобразование Фурье, либо преобразование Лапласа. Покажем запись уравнений электродинамики на примере преобразования Фурье.

Как известно, в случае непрерывного спектра векторы поля можно определить с помощью формул (1.29) и (1.90).

Аналогично можно представить векторы плотностей сторонних токов:

$$\mathbf{J}_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.174)$$

$$\mathbf{J}_M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.175)$$

Здесь $\mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega)$, $\mathbf{G}_{J_M}(\omega)$ — векторы спектральных плотностей сторонних электрического и магнитного токов.

Далее, подставляя соотношения (1.29), (1.90), (1.174), (1.175) в выражения законов полного тока (1.137) и электромагнитной индукции (1.138), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega dl &= \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_{\varepsilon}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS + \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\varepsilon}(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) \times \\ &\times e^{j\omega t} d\omega dS + \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega \} dS, \\ \oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} d\omega dl &= - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega dS &- \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \{ \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \} dS. \end{aligned}$$

Сокращая на 2л, меняя местами внутренний и внешний интегралы и дифференцируя по времени, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} dl d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_3}(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_3(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j\omega t} dl d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} \times \\ \times dS d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) e^{j\omega t} dS d\omega.$$

Поскольку внешнее интегрирование правой и левой частей этих уравнений осуществляется по одной и той же переменной и в одинаковых пределах, подынтегральные выражения можно объединить и внешний интеграл отбросить. Это позволяет сократить уравнения на множитель $e^{j\omega t}$.

В результате законы полного тока и электромагнитной индукции для спектральных составляющих функций записываются в виде

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) dl = \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_3}(\omega) dS + \int_{S_1} \gamma_3(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) dS + \int_{S_1} j\omega \varepsilon_a(\omega) \mathbf{G}_E(\omega) dS, \quad (1.176)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) dl = - \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) dS - \int_{S_1} \gamma_M(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) dS - \int_{S_1} j\omega \mu_a(\omega) \mathbf{G}_H(\omega) dS. \quad (1.177)$$

Объединяя второй и третий интегралы в правых частях полученных уравнений и используя соотношения (1.159), (1.161), находим

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_H(\omega) dl = \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_3}(\omega) dS + \int_{S_1} j\omega \tilde{\varepsilon}_a \mathbf{G}_E(\omega) dS, \quad (1.178)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{G}_E(\omega) dl = - \int_{S_1} \mathbf{G}_{J_M}(\omega) dS - \int_{S_1} j\omega \tilde{\mu}_a \mathbf{G}_H(\omega) dS. \quad (1.179)$$

Сравнивая эти уравнения с (1.171), (1.172), нетрудно заметить их сходство. Разница лишь в том, что уравнения (1.171), (1.172) записаны для комплексных амплитуд функций, а уравнения (1.178), (1.179) — для спектральных составляющих этих функций.

После определения спектральных составляющих функции $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ можно найти с помощью обратного преобразования Фурье (1.29), (1.90).

Аналогично получают интегральные соотношения для изображений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в случае использования преобразования Лапласа:

$$\oint_{I_1} \mathbf{H}(p) dl = \int_{S_1} \mathbf{J}_3(p) dS + \int_{S_1} p \tilde{\varepsilon}_a(p) \mathbf{E}(p) dS, \quad (1.180)$$

$$\oint_{I_1} \mathbf{E}(p) dl = - \int_{S_1} \mathbf{J}_M(p) dS - \int_{S_1} p \tilde{\mu}_a(p) \mathbf{H}(p) dS. \quad (1.181)$$

Переход от изображений $\mathbf{H}(p)$, $\mathbf{E}(p)$ к векторам поля осуществляется с помощью преобразования (1.35) для вектора $\mathbf{E}(t)$ и преобразования для вектора $\mathbf{H}(t)$ вида

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{H}(p) e^{pt} dp. \quad (1.182)$$

ГЛАВА 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 2.1. Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса

Полученные в гл. 1 интегральные уравнения дают возможность решать различные электродинамические задачи. В ряде случаев эти задачи проще решить с помощью дифференциальных уравнений. При выборе формы записи уравнений электродинамики необходимо исходить из конкретной задачи. Следует предпочесть интегральную или дифференциальную форму записи уравнений в зависимости от того, какая из этих форм обеспечивает более легкое решение задачи. Переход от интегральных уравнений к дифференциальным может быть осуществлен с помощью двух теорем векторного анализа, теоремы Остроградского — Гаусса и теоремы Стокса [4], [5].

Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Остроградского — Гаусса связывает интеграл от вектора \mathbf{a} по замкнутой поверхности S_1 с интегралом от дивергенции этого вектора по объему V_1 , ограниченному замкнутой поверхностью S_1 :

$$\oint_{S_1} \mathbf{a} dS = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a} dV. \quad (2.1)$$

Напомним, что математическая операция дивергенции вектора (см. приложение I) определяется пределом

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{a} dS}{\Delta V}. \quad (2.2)$$

В числителе этого выражения записывается поток вектора \mathbf{a} через малую замкнутую поверхность ΔS , в знаменателе — малый объем ΔV , находящийся внутри замкнутой поверхности ΔS . Предельным переходом малый объем ΔV стягивается в точку. Таким образом, дивергенция вектора определяется характером потока вектора \mathbf{a} , записанного в числителе. Этот поток может быть положительным, равен нулю или отрицателен. Соответственно дивергенция \mathbf{a} может быть положительна, равна нулю или отрицательна.

В зависимости от принятой системы координат $\operatorname{div} \mathbf{a}$ может иметь различную математическую форму. В приложении I дан вывод $\operatorname{div} \mathbf{a}$ в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат ξ ,