Переход от изображений $\mathbf{H}(p)$, $\mathbf{E}(p)$ к векторам поля осуществляется с помощью преобразования (1.35) для вектора $\mathbf{E}(t)$ и преобразования для вектора $\mathbf{H}(t)$ вида

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mathbf{H}(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.182}$$

ГЛАВА 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 2.1. Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Стокса

Полученные в гл. 1 интегральные уравнения дают возможность решать различные электродинамические задачи. В ряде случаев эти задачи проще решить с помощью дифференциальных уравнений. При выборе формы записи уравнений электродинамики необходимо исходить из конкретной задачи. Следует предпочесть интегральную или дифференциальную форму записи уравнений в зависимости от того, какая из этих форм обеспечивает более легкое решение задачи. Переход от интегральных уравнений к дифференциальным может быть осуществлен с помощью двух теорем векторного анализа, теоремы Остроградского — Гаусса и теоремы Стокса [4], [5].

Теорема Остроградского — Гаусса. Теорема Остроградского — Гаусса связывает интеграл от вектора $\mathbf{a}$ по замкнутой поверхности S_1 с интегралом от дивергенции этого вектора по объему V_1, ограниченному замкнутой поверхностью S_1:

$$\oint_{S_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \oint_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV. \tag{2.1}$$

Напомним, что математическая операция дивергенции вектора (см. приложение I) определяется пределом

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \tag{2.2}$$

В числителе этого выражения записывается поток вектора $\mathbf{a}$ через малую замкнутую поверхность ΔS, в знаменателе — малый объем ΔV, находящийся внутри замкнутой поверхности ΔS. Предельным переходом малый объем ΔV стягивается в точку. Таким образом, дивергенция вектора определяется характером потока вектора $\mathbf{a}$, записанного в числителе. Этот поток может быть положителен, равен нулю или отрицателен. Соответственно дивергенция $\mathbf{a}$ может быть положительна, равна нулю или отрицательна.

В зависимости от принятой системы координат $\operatorname{div} \mathbf{a}$ может иметь различную математическую форму. В приложении I дан вывод $\operatorname{div} \mathbf{a}$ в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат ξ,

η, ζ и приведены ее математические выражения в наиболее часто употребляемых системах координат.

Теорема Стокса. Теорема Стокса связывает интеграл от вектора **a** по замкнутому контуру l_1 с интегралом от ротора этого вектора по поверхности S_1, ограниченной замкнутым контуром l_1:

$$\oint_{l_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}. \qquad (2.3)$$

Известно, что математическая операция ротора вектора (см. приложение I) определяется пределом

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta l} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{1}n. \qquad (2.4)$$

В числителе этого выражения записывается циркуляция вектора **a** по малому замкнутому контуру Δl; в знаменателе — малая поверхность ΔS, охватываемая замкнутым контуром Δl; $\mathbf{1}_n$ — единичная нормаль к поверхности ΔS, связанная правилом правоходового винта с направлением обхода контура Δl (при движении винта в направлении обхода контура направление единичной нормали должно совпадать с поступательным движением винта).

Запись $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ означает, что выражение (2.4) определяет составляющую ротора, ориентированную в направлении единичной нормали $\mathbf{1}_n$ к поверхности ΔS.

В зависимости от принятой системы координат математическое выражение $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ может быть различным. В приложении I дан вывод $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, ζ и приведены его математические выражения в наиболее часто употребляемых системах координат.

§ 2.2. Переход от интегральных уравнений электродинамики к дифференциальным. Применение принципа перестановочной двойственности к дифференциальным уравнениям электродинамики

В гл. 1 был выведен ряд интегральных уравнений, определяющих электродинамические процессы в различных случаях. Уравнения были выведены как для мгновенных значений функций, так и для их комплексных амплитуд. Используем эти соотношения для вывода дифференциальных уравнений электродинамики.

Переход от интегральных уравнений к дифференциальным — легко осуществить с помощью теорем Остроградского — Гаусса и Стокса. Применяя теорему Стокса (2.3) к интегралу $\oint\limits_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int\limits_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{S}$, можно записать соотношение (1.137) в виде

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_э\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_э \mathbf{E}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \varepsilon_а \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Интегрирование ведется по одной и той же произвольной поверхности S_1. Опуская интегралы, получаем дифференциальное уравнение (2.5), которое будет записано позднее.

Аналогично можно преобразовать выражение закона электромагнитной индукции (1.140), в результате чего получаем уравнение (2.6). Для преобразования уравнений (1.132), (1.154), (1.155), (1.55), (1.108) используют теорему Остроградского — Гаусса. Методику этого преобразования продемонстрируем на примере уравнения (1.132).

Представим заряд $Q_э$ в виде объемного интеграла от объемной плотности заряда $\rho_э$ так, как это сделано в формуле (1.51). Тогда соотношение (1.132) запишется таким образом:

$$\oint_{S_1}\left(\mathbf{D}+\int_0^t \gamma_э \mathbf{E}\,dt\right)d\mathbf{S}=\int_{V_1}\rho_э\,dV.$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса (2.1) для левой части выражения, получаем

$$\int_{V_1}\operatorname{div}\left(\mathbf{D}+\int_0^t \gamma_э \mathbf{E}\,dt\right)d\mathbf{S}=\int_{V_1}\rho_э\,dV.$$

Интегрирование осуществляется по одному и тому же произвольному объему V_1. Опуская интегралы, получаем соотношение (2.7). Аналогично преобразуются уравнения (1.154), (1.155), (1.55), (1.108).

В результате сделанных преобразований возникают дифференциальные уравнения электродинамики для мгновенных значений функций:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}_э+\gamma_э\mathbf{E}+\varepsilon_a\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mathbf{J}_м-\gamma_м\mathbf{H}-\mu_a\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{D}+\int_0^t \gamma_э\mathbf{E}\,dt\right)=\rho_э, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{B}+\int_0^t \gamma_м\mathbf{H}\,dt\right)=\rho_м, \tag{2.8}$$

или при $\rho_м=0$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{B}+\int_0^t \gamma_м\mathbf{H}\,dt\right)=0, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_э=-\partial\rho_э/\partial t, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_м=-\partial\rho_м/\partial t. \tag{2.11}$$

Аналогично могут быть получены дифференциальные соотношения электродинамики для комплексных амплитуд функций:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а \dot{\mathbf{E}}, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = - \dot{\mathbf{J}}_м - j\omega\tilde{\mu}_а \dot{\mathbf{H}}, \tag{2.13}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\varepsilon}_а \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_э, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_а \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_м, \tag{2.15}$$

или при $\rho_м = 0$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_а \dot{\mathbf{H}}) = 0, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_э = - j\omega\dot{\rho}_э, \tag{2.17}$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_м = - j\omega\dot{\rho}_м. \tag{2.18}$$

Уравнения (2.5) и (2.12) называются *первым уравнением Максвелла для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд*, уравнения (2.6) и (2.13)—*вторым уравнением Максвелла для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд.*

Соответственно уравнения (2.10) и (2.17) называются *первым уравнением непрерывности* для мгновенных значений и комплексных амплитуд, а уравнения (2.11) и (2.18)—*вторым уравнением непрерывности для мгновенных значений функций и их комплексных амплитуд.*

Так же, как и для интегральных уравнений, для дифференциальных уравнений электродинамики справедлив принцип перестановочной двойственности. Уравнение (2.12) переходит в (2.13) и, наоборот, уравнение (2.14)—в уравнение (2.15) и, наоборот, уравнение (2.17)—в уравнение (2.18) и, наоборот, уравнения среды (1.167)—в (1.168) и, наоборот, при осуществлении следующих перестановок:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{E}} \rightleftarrows \dot{\mathbf{H}}, \quad \dot{\mathbf{J}}_э \rightleftarrows -\dot{\mathbf{J}}_м, \\ \tilde{\varepsilon}_а \rightleftarrows -\tilde{\mu}_а, \quad \dot{\rho}_э \rightleftarrows -\dot{\rho}_м, \\ \varepsilon_а \rightleftarrows -\mu_а, \quad \dot{\mathbf{D}} \rightleftarrows -\dot{\mathbf{B}}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Аналогичный переход наблюдается в уравнениях, записанных для мгновенных значений электродинамических функций. При этом необходимы перестановки вида

$$\begin{gathered} \mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_э \rightleftarrows -\mathbf{J}_м, \\ \gamma_э \rightleftarrows -\gamma_м, \quad \varepsilon_а \rightleftarrows -\mu_а, \\ \mathbf{D} \rightleftarrows -\mathbf{B}, \quad \rho_э \rightleftarrows -\rho_м. \end{gathered} \tag{2.20}$$

§ 2.3. Дифференциальные уравнения электродинамики в случае квазистатических и статических полей

Написанные уравнения электродинамики выведены в общей форме, допускающей различные упрощения в конкретных случаях. Прежде всего рассмотрим случай квазистатических полей, когда частота колебаний настолько мала, что можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. При этом уравнения (2.5), (2.6) и (2.12), (2.13) записываются соответственно в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_э + \gamma_э \mathbf{E}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{J}_м - \gamma_м \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.21}$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_э + \gamma_э \dot{\mathbf{E}}, \quad \mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_м - j\omega\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{2.22}$$

В случае статических полей частоту колебаний следует полагать равной нулю и уравнения упрощаются еще больше:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_э + \gamma_э \mathbf{E}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{J}_м - \gamma_м \mathbf{H}. \tag{2.23}$$

Аналогично записываются уравнения для комплексных амплитуд.

Если проводимости среды $\gamma_э$ и $\gamma_м$ равны нулю, то электрическое и магнитное поле становятся полностью независимыми:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_э, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{J}_м. \tag{2.24}$$

Если магнитные токи не вводятся в расчет, то полагают

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

Подобный подход может быть использован при записи интегральных уравнений электродинамики.

Таким образом, общие уравнения электродинамики включают в себя как частные случаи уравнения, соответствующие квазистатическим и статическим полям.

§ 2.4. Несамостоятельность некоторых уравнений электродинамики

Рассматривая систему уравнений электродинамики, можно заметить, что помимо уравнений Максвелла, связывающих векторы **E** и **H** со сторонними токами, существуют уравнения (2.7), (2.8) для мгновенных значений векторов поля и уравнения (2.14), (2.15) для их комплексных амплитуд.

Для отыскания векторов поля **E** и **H** достаточно двух уравнений Максвелла, содержащих эти векторы. Возникает вопрос, не являются ли уравнения (2.7), (2.8), (2.14) и (2.15) лишними уравнениями, переопределяющими систему уравнений Максвелла. Покажем на примере уравнений для комплексных амплитуд, что уравнения (2.14), (2.15) могут быть получены из уравнений Максвелла (2.12), (2.13).

Подвергнем уравнение (2.12) операции дивергенции:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = \mathrm{div}\,\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\,\mathrm{div}(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}).$$

В приложении I приводится векторное тождество $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = 0$, в силу чего

$$\mathrm{div}(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \frac{j}{\omega}\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{J}}_э. \tag{2.25}$$

Аналогично из уравнения (2.13) находим

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu}_а \dot{\mathbf{H}}) = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_м. \qquad (2.26)$$

Подставляя в формулы (2.25), (2.26) выражения для $\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_э$ и $\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_м$ из уравнений непрерывности (2.17), (2.18), получаем соотношения (2.14), (2.15).

Таким же образом может быть доказана несамостоятельность уравнений (2.7), (2.8).

ГЛАВА 3
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ КАК СЛЕДСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 3.1. Вывод первого закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики

Основными законами электротехники являются закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в узловой точке цепи равна нулю. Второй закон Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма э. д. с. сторонних источников в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжений на ее элементах.

Покажем, что эти законы являются следствием основных уравнений электродинамики. В основу рассуждений положим уравнение (1.132). Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получаем

$$\oint_{S_1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \gamma_э \mathbf{E} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial Q_э}{\partial t}. \qquad (3.1)$$

С учетом соотношений (1.129), (1.114), (1.53), (1.54) выражение (3.1) можно записать в виде

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_с + \mathbf{J}_{эп} + \mathbf{J}_э) \, d\mathbf{S} = 0. \qquad (3.2)$$

Рассматривая узловую точку электрической цепи, состоящую из n проводников (рис. 3.1), и пренебрегая токами смещения между проводниками, уравнение (3.2) можно записать таким образом:

$$\oint_{S_1} (\dot{\mathbf{J}}_{эп} + \dot{\mathbf{J}}_э) \, d\mathbf{S} = 0. \qquad (3.3)$$

В этом случае S_1—замкнутая поверхность, окружающая узловую точку.