

Аналогично из уравнения (2.13) находим

$$\operatorname{div}(\vec{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \frac{j}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{J}_m. \quad (2.26)$$

Подставляя в формулы (2.25), (2.26) выражения для  $\operatorname{div} \mathbf{J}_a$  и  $\operatorname{div} \mathbf{J}_m$  из уравнений непрерывности (2.17), (2.18), получаем соотношения (2.14), (2.15).

Таким же образом может быть доказана несамостоятельность уравнений (2.7), (2.8).

### ГЛАВА 3

## ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ КАК СЛЕДСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### § 3.1. Вывод первого закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики

Основными законами электротехники являются закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в узловой точке цепи равна нулю. Второй закон Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма э. д. с. сторонних источников в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжений на ее элементах.

Покажем, что эти законы являются следствием основных уравнений электродинамики. В основу рассуждений положим уравнение (1.132). Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получаем

$$\oint_{S_1} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \gamma_a \mathbf{E} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial Q_a}{\partial t}. \quad (3.1)$$

С учетом соотношений (1.129), (1.114), (1.53), (1.54) выражение (3.1) можно записать в виде

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_{ан} + \mathbf{J}_a) d\mathbf{S} = 0. \quad (3.2)$$

Рассматривая узловую точку электрической цепи, состоящую из  $n$  проводников (рис. 3.1), и пренебрегая токами смещения между проводниками, уравнение (3.2) можно записать таким образом:

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_{ан} + \mathbf{J}_a) d\mathbf{S} = 0. \quad (3.3)$$

В этом случае  $S_1$  — замкнутая поверхность, окружающая узловую точку.

Плотности токов проводимости и токов источников существуют в пространстве там, где расположены проводники. В силу этого интеграл по замкнутой поверхности можно представить как сумму интегралов по площади поперечного сечения проводников. При этом уравнение (3.3) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{n_1} \int_{S_k} \mathbf{J}_{\text{ан}k} d\mathbf{S} + \sum_{p=1}^{n_2} \int_{S_p} \mathbf{J}_{\text{э}p} d\mathbf{S} = 0, \quad (3.4)$$

где

$$n_1 + n_2 = n.$$

Каждый из интегралов представляет собой ток  $I_m$ , протекающий по проводнику. Тогда вместо соотношения (3.4) можно записать

$$\sum_{m=1}^n I_m = 0. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) является *первым законом Кирхгофа, выведенным на основании уравнений электродинамики.*

### § 3.2. Вывод второго закона Кирхгофа на основании уравнений электродинамики

Разность потенциалов  $U$ , возникающая на концах проводящего витка при пересечении площади витка переменным во времени магнитным потоком  $\Phi_B$ , выражается соотношением (1.133). С учетом формулы (1.5), считая контур  $l_1$  замкнутым, получаем

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим в качестве замкнутого контура  $l_1$  замкнутую электрическую цепь с сосредоточенными постоянными. В этом случае поток  $\Phi_B$  может создаваться за счет тока  $I_n$  в индуктивностях  $L_n$  замкнутой цепи, а также за счет токов  $I_m$  в других замкнутых цепях, связанных с рассматриваемой цепью взаимными индуктивностями  $M_m$ . Если число витков в катушках отлично от единицы, то поток  $\Phi_B$  следует заменить потокоцеплением  $\Psi_B$ .

В теории цепей индуктивность  $L_n$  определяют как коэффициент пропорциональности между током  $I_n$  в катушке и потоком вектора  $\mathbf{B}$ , сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi_{BL} = L_n I_n. \quad (3.7)$$

Взаимную индуктивность  $M_m$  определяют как коэффициент пропорциональности между током  $I_m$  в другой цепи, индуктивно связанной с катушкой в данной цепи, и потоком вектора  $\mathbf{B}$ , сцепленным с витками этой катушки:

$$\Psi_{BM} = M_m I_m. \quad (3.8)$$

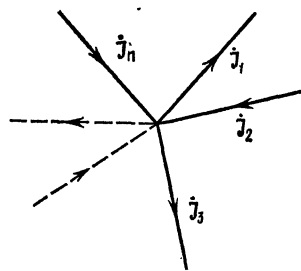


Рис. 3.1

В рассматриваемой цепи может быть несколько индуктивностей и взаимных индуктивностей, связывающих ее с другими цепями. Общий поток, сцепленный со всеми индуктивными элементами, представляет собой сумму частных потоков, поэтому можно записать

$$\Psi_B = \sum_{n=1}^{n_1} L_n I_n + \sum_{m=1}^{m_1} M_m I_m. \quad (3.9)$$

Соответственно частную производную  $\partial\Phi_B/\partial t$ , входящую в правую часть выражения (3.6) для цепи с сосредоточенными постоянными, можно заменить производной  $\partial\Psi_B/\partial t$ , которая с учетом выражения (3.9) записывается в виде

$$\frac{d\Psi_B}{dt} = \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \quad (3.10)$$

Подчеркнем еще раз, что  $L_n$ —индуктивности, входящие в замкнутый контур  $l_1$  (замкнутую цепь);  $M_m$ —взаимные индуктивности, связывающие контур  $l_1$  с токами  $I_m$  в других контурах.

Интеграл по замкнутому контуру  $l_1$  в левой части выражения (3.6) можно представить суммой интегралов, определяющих разности потенциалов на активных сопротивлениях и емкостях контура  $l_1$ .

Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в цепи связан с вектором плотности тока проводимости  $\mathbf{J}_{\text{эл}}$  в контуре соотношением (1.114). Определяя  $\mathbf{E}$  из этого соотношения и подставляя его в интеграл  $\int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , получаем

$$\int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эл}}}{\gamma_{\text{э}}} d\mathbf{l}. \quad (3.11)$$

Умножим и разделим дробь, стоящую под интегралом, на площадь поперечного сечения элементов цепи, обладающих активной проводимостью:

$$\int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эл}}}{\gamma_{\text{э}}} d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{эл}} S}{\gamma_{\text{э}} S} \mathbf{1}_l dl. \quad (3.12)$$

Здесь  $\mathbf{1}_l$ —единичный вектор (орт), совпадающий по направлению с вектором  $d\mathbf{l}$  и, очевидно, с единичной нормалью к площади поперечного сечения.

Поэтому

$$\mathbf{1}_l S = \mathbf{S},$$

и ток проводимости в цепи

$$I_{\text{эл}} = \mathbf{J}_{\text{эл}} \mathbf{S}.$$

Тогда интегральное соотношение (3.11) может быть записано в форме

$$\int_{l_\gamma} \mathbf{E} dl = \frac{I_{\text{эп}}}{\gamma_{\text{э}} S} \int_{l_\gamma} dl = \frac{I_{\text{эп}} l_\gamma}{\gamma_{\text{э}} S}. \quad (3.13)$$

Под длиной  $l_\gamma$  понимают длину элементов цепи, обладающих активной проводимостью  $\gamma_{\text{э}}$ . В соответствии с (1.112) выражение (3.13) приобретает вид

$$U_R = \int_{l_\gamma} \mathbf{E} dl = I_{\text{эп}} R. \quad (3.14)$$

Таким образом, найдена часть интеграла по замкнутому контуру  $l_1$ , соответствующая разности потенциалов  $U_R$  на элементах цепи, обладающих активной проводимостью. Если таких участков несколько, то вместо выражения (3.14) получим

$$\sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{\gamma p}} \mathbf{E}_p dl = \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{эп } p} R_p. \quad (3.15)$$

Плотность тока смещения  $J_c$  в конденсаторах, включенных в контур  $l_1$ , определяется соотношением (1.129), которое с учетом формулы (1.19) можно записать таким образом:

$$\mathbf{J}_c = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

откуда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \mathbf{J}_c dt.$$

При этом интеграл  $\int_{l_1} \mathbf{E} dl$  запишется в виде

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_{l_c} \int_0^t \mathbf{J}_c dt dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \mathbf{J}_c dl dt,$$

где  $l_c$  — длина пути токов смещения, или расстояние между обкладками конденсатора.

Умножив и разделив это выражение на площадь обкладок конденсатора  $S_c$ , получаем

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \frac{\mathbf{J}_c S_c}{S_c} dl dt = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_c} \frac{\mathbf{J}_c S_c \mathbf{1}_l}{S_c} dl dt. \quad (3.16)$$

Здесь  $\mathbf{1}_l$  — единичный вектор (орт), направленный вдоль пути  $dl$ ;  $\mathbf{J}_c S_c \mathbf{1}_l = I_c$  — ток, протекающий через конденсатор.

Тогда вместо выражения (3.16) получим

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a S_c} \int_0^t \int_{l_c} I_c dl dt = \frac{l_c}{\varepsilon_a S_c} \int_0^t I_c dt,$$

где

$$\frac{l_c}{\varepsilon_a S_c} = \frac{1}{C};$$

$C$  — емкость конденсатора.

Следовательно, падение напряжения на конденсаторе равно

$$\int_{l_c} \mathbf{E} dl = U_c = \frac{1}{C} \int_0^t I_c dt. \quad (3.17)$$

При включении в электрическую цепь нескольких конденсаторов выражение следует записать в виде

$$\sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q dl = \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq} dt. \quad (3.18)$$

Помимо падения напряжений на индуктивных катушках, резисторах и конденсаторах в электрическую цепь входят сторонние разности потенциалов  $U_{\text{э}}$ , создаваемые источниками. При этом, как обычно, справедливо соотношение

$$\int_{l_{\text{э}}} \mathbf{E}_{\text{э}} dl = U_{\text{э}}. \quad (3.19)$$

При наличии нескольких источников создаваемые ими разности потенциалов необходимо просуммировать:

$$\sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{\text{э}k}} \mathbf{E}_{\text{э}k} dl = \sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k}. \quad (3.20)$$

Таким образом, в формировании контурного интеграла  $\oint_{l_1} \mathbf{E} dl$  в левой части закона Фарадея (3.6) в общем случае участвуют выражения (3.15), (3.18), (3.20). В процессе суммирования разности потенциалов, создаваемые сторонними источниками, следует брать с обратными знаками:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{\text{э}k}} \mathbf{E}_{\text{э}k} dl + \sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{\text{ч}p}} \mathbf{E}_p dl + \sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q dl.$$

Подставляя значения интегралов из формул (3.15), (3.18), (3.20), получаем

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} dl = - \sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{э}np} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq} dt. \quad (3.21)$$

Правая часть закона Фарадея (3.6) определяется соотношением (3.10). Подставляя в выражение (3.6) формулы (3.21) и (3.10), получаем

$$-\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{э}p} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{C_q} dt = -\sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} - \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt},$$

или, опуская часть индексов,

$$\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k} = \sum_{p=1}^{p_1} I_p R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_q dt + \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \quad (3.22)$$

Это соотношение представляет собой *второй закон Кирхгофа для цепи с сосредоточенными постоянными*, по которому сумма э. д. с. сторонних источников тока в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжения на ее элементах.

## ГЛАВА 4

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

#### § 4.1. Теорема Пойнтинга для мгновенных значений векторов поля

Рассмотрим первое и второе уравнения Максвелла для мгновенных значений векторов поля, определяемые уравнениями (2.5) и (2.6).

Умножая уравнение (2.5) скалярно на вектор  $\mathbf{E}$ , а (2.6)—на вектор  $\mathbf{H}$  и вычитая первое произведение из второго, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = & -\mathbf{J}_m \mathbf{H} - \gamma_m H^2 - \\ & -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H - \mathbf{J}_s \mathbf{E} - \gamma_s E^2 - \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В приложении I приводится векторное тождество  $\operatorname{div} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ , в левой части которого находится дивергенция векторного произведения вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$ .

На основании векторного тождества уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\operatorname{div} [\mathbf{EH}] + \mathbf{J}_m \mathbf{H} + \gamma_m H^2 + \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H + \mathbf{J}_s \mathbf{E} + \gamma_s E^2 + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E = 0. \quad (4.2)$$

Полученное уравнение называют *теоремой Пойнтинга в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов поля*.

Проинтегрируем выражение (4.2) по объему  $V_1$ , содержащему все источники сторонних токов, учтенные при написании уравне-