Правая часть закона Фарадая (3.6) определяется соотношением (3.10). Подставляя в выражение (3.6) формулы (3.21) и (3.10), получаем

$$-\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k}+\sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{эп}\,p}R_p+\sum_{q=1}^{q_1}\frac{1}{C_q}\int_0^t I_{C_q}dt=-\sum_{n=1}^{n_1} L_n\frac{dI_n}{dt}-\sum_{m=1}^{m_1} M_m\frac{dI_m}{dt},$$

или, опуская часть индексов,

$$\sum_{k=1}^{k_1} U_{\text{э}k}=\sum_{p=1}^{p_1} I_pR_p+\sum_{q=1}^{q_1}\frac{1}{C_q}\int_0^t I_q\,dt+\sum_{n=1}^{n_1} L_n\frac{dI_n}{dt}+\sum_{m=1}^{m_1} M_m\frac{dI_m}{dt}. \qquad (3.22)$$

Это соотношение представляет собой *второй закон Кирхгофа для цепи с сосредоточенными постоянными*, по которому сумма э. д. с. сторонних источников тока в замкнутой электрической цепи равна сумме падений напряжения на ее элементах.

ГЛАВА 4

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 4.1. Теорема Пойнтинга для мгновенных значений векторов поля

Рассмотрим первое и второе уравнения Максвелла для мгновенных значений векторов поля, определяемые уравнениями (2.5) и (2.6).

Умножая уравнение (2.5) скалярно на вектор $\mathbf{E}$, а (2.6) — на вектор $\mathbf{H}$ и вычитая первое произведение из второго, получаем

$$\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\mathbf{J}_\text{м}\mathbf{H}-\gamma_\text{м}H^2-$$
$$-\mu_a\frac{\partial H}{\partial t}H-\mathbf{J}_\text{э}\mathbf{E}-\gamma_\text{э}E^2-\varepsilon_\text{а}\frac{\partial E}{\partial t}E. \qquad (4.1)$$

В приложении I приводится векторное тождество $\operatorname{div}[\mathbf{ab}]=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$, в левой части которого находится дивергенция векторного произведения вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$.

На основании векторного тождества уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}]+\mathbf{J}_\text{м}\mathbf{H}+\gamma_\text{м}H^2+\mu_\text{а}\frac{\partial H}{\partial t}H+\mathbf{J}_\text{э}\mathbf{E}+\gamma_\text{э}E^2+\varepsilon_\text{а}\frac{\partial E}{\partial t}E=0. \qquad (4.2)$$

Полученное уравнение называют *теоремой Пойнтинга в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов поля.*

Проинтегрируем выражение (4.2) по объему V_1, содержащему все источники сторонних токов, учтенные при написании уравнений Максвелла:

$$\int_{V_1} \operatorname{div}[\mathbf{EH}]\,dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{м}}\mathbf{H}\,dV + \int_{V_1} \gamma_{\text{м}} H^2\,dV + \int_{V_1} \mu_{\text{а}} \frac{\partial H}{\partial t} H\,dV +$$
$$+ \int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{э}}\mathbf{E}\,dV + \int_{V_1} \gamma_{\text{э}} E^2\,dV + \int_{V_1} \varepsilon_{\text{а}} \frac{\partial E}{\partial t} E\,dV = 0. \tag{4.3}$$

На основании теоремы Остроградского—Гаусса (2.1) и учитывая, что векторное произведение

$$[\mathbf{EH}] = \mathbf{\Pi} \tag{4.4}$$

представляет собой вектор, уравнение (4.3) после перегруппировки членов можно записать в виде

$$\oint_{S_1} \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S} + \int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{м}}\mathbf{H}\,dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{э}}\mathbf{E}\,dV + \int_{V_1} \gamma_{\text{м}} H^2\,dV + \int_{V_1} \gamma_{\text{э}} E^2\,dV +$$
$$+ \int_{V_1} \mu_{\text{а}} \frac{\partial H}{\partial t} H\,dV + \int_{V_1} \varepsilon_{\text{а}} \frac{\partial E}{\partial t} E\,dV = 0. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) называют *теоремой Пойнтинга в интегральной форме для мгновенных значений векторов поля, а вектор* $\mathbf{\Pi}$ — *мгновенным значением вектора Пойнтинга.*

Необходимо определить физический смысл выражения (4.5). Для этого выясним единицы измерения входящих в него интегралов:

$$\begin{gathered} \mathbf{E} \longrightarrow \text{В/м}, \quad \mathbf{H} \longrightarrow \text{А/м}, \\ \mathbf{\Pi} \longrightarrow \frac{\text{В}\cdot\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Таким образом, единицей измерения вектора Пойнтинга является ватт на квадратный метр. Другими словами, вектор Пойнтинга представляет собой плотность мощности, или мощность электромагнитного поля, проходящую через поверхность в один квадратный метр, находящуюся в плоскости, параллельной плоскости, в которой расположены векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Интеграл $\oint_{S_1} \mathbf{\Pi}\,d\mathbf{S}$, измеряемый в ваттах, можно трактовать как мощность электромагнитного поля, проходящую через замкнутую поверхность S_1, охватывающую объем V_1, в котором сосредоточены все сторонние источники поля.

Мощность источников поля характеризуется интегралами $\int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{м}}\mathbf{H}\,dV$ и $\int_{V_1} \mathbf{J}_{\text{э}}\mathbf{E}\,dV$.

Первый интеграл представляет собой мощность, создаваемую сторонними магнитными токами, а второй интеграл — сторонними электрическими токами. Эти интегралы берут по всему объему V_1, однако они будут отличны от нуля только в пределах объемов, в которых существуют плотности токов $\mathbf{J}_{\text{м}}$ и $\mathbf{J}_{\text{э}}$. Возможна ситуация, когда поле создается либо сторонними магнитными, либо сторонними электрическими токами. Тогда один из интегралов обращается в нуль.

Интегралы $\int\limits_{V_1} \gamma_м H^2 dV$ и $\int\limits_{V_1} \gamma_э E^2 dV$ отличны от нуля, если среда обладает магнитной и электрической проводимостями. Эти интегралы можно рассматривать как мощности, расходуемые на нагревание среды за счет магнитных и электрических потерь. При наличии магнитной и электрической проводимостей возникают токи и соответственно расходуется мощность источников. В практических случаях иногда можно пренебречь магнитными потерями или электрическими потерями (или теми и другими), как например, в случае достаточно совершенных диэлектриков.

Интеграл

$$\int\limits_{V_1} \mu_а \frac{\partial H}{\partial t} H\, dV = P_м \tag{4.7}$$

характеризует мощность магнитного поля, сосредоточенную в объеме V_1, или мощность, затраченную на образование магнитного поля, а интеграл

$$\int\limits_{V_1} \varepsilon_а \frac{\partial E}{\partial t} E\, dV = P_э \tag{4.8}$$

— мощность электрического поля, сосредоточенную в объеме V_1, или мощность, затраченную на образование электрического поля.

Полную мощность электромагнитного поля, сосредоточенную в объеме V_1, можно представить как сумму мощностей $P_м$ и $P_э$:

$$P = \int\limits_{V_1} \mu_а \frac{\partial H}{\partial t} H\, dV + \int\limits_{V_1} \varepsilon_а \frac{\partial E}{\partial t} E\, dV. \tag{4.9}$$

Таким образом, в выражение (4.5) входит сумма мощностей источников поля, мощностей потерь, мощностей магнитного и электрического полей, сосредоточенных в объеме V_1, и мощности, выходящей за пределы этого объема через поверхность S_1. Эта сумма равна нулю, что позволяет рассматривать выражение в качестве уравнения баланса мгновенных мощностей в пространстве, ограниченном поверхностью S_1. Теорема Пойнтинга (4.5) представляет собой одно из важнейших уравнений электродинамики, с помощью которого можно производить различные практические расчеты. Так, например, знание вектора Пойнтинга позволяет определить мощность, перехватываемую параболоидами радиотелескопов. Представляет большой интерес определение энергии электромагнитного поля, сосредоточенной в объеме V_1, и энергии потерь в среде, что позволяет, например, рассчитать добротность объемных резонаторов (колебательных контуров, используемых на сверхвысоких частотах).

Энергию электромагнитного поля, запасенную в объеме V_1, или энергию, затраченную на образование этого поля, можно найти интегрированием по времени выражений (4.7), (4.8), определяющих мощности магнитного и электрического полей:

$$W_{м} = \int_0^t P_{м}\,dt = \int_0^t \int_{V_1} \mu_{а} \frac{\partial H}{\partial t} H\,dV\,dt. \qquad (4.10)$$

Выражение $\frac{\partial H}{\partial t}\,dt = dH$ представляет собой дифференциал поля H. Интеграл по времени при этом переходит в интеграл по полю H. Допуская, что в момент времени $t=0$ поле отсутствовало, а в момент времени t равнялось H, выражение для магнитной энергии можно записать в форме

$$W_{м} = \int_{V_1} \int_0^H \mu_{а} H\,dH\,dV.$$

Осуществив внутреннее интегрирование по переменной H, получаем

$$W_{м} = \int_{V_1} \frac{\mu_{а} H^2}{2}\,dV. \qquad (4.11)$$

Аналогичные рассуждения справедливы в отношении энергии электрического поля, мощность которого определяется формулой (4.8):

$$W_{э} = \int_0^t P_{э}\,dt = \int_0^t \int_{V_1} \varepsilon_{а} \frac{\partial E}{\partial t} E\,dV\,dt,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}\,dt = dE,$$

$$W_{э} = \int_{V_1} \int_0^E \varepsilon_{а} E\,dE\,dV, \qquad (4.12)$$

$$W_{э} = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_{а} E^2}{2}\,dV. \qquad (4.13)$$

Выражения (4.11) и (4.13) дают значение энергии магнитного и электрического полей, сосредоточенной в объеме V_1. Подынтегральные выражения представляют собой объемные плотности магнитной $\Delta W_{м}$ и электрической $\Delta W_{э}$ энергий:

$$\Delta W_{м} = \frac{\mu_{а} H^2}{2}, \qquad (4.14)$$

$$\Delta W_{э} = \frac{\varepsilon_{а} E^2}{2}. \qquad (4.15)$$

В системе МКСА энергии $W_{м}$ и $W_{э}$ измеряются в джоулях:

$$W_{м} \to \text{Дж}, \quad W_{э} \to \text{Дж}, \qquad (4.16)$$

а плотности этих энергий — в джоулях на кубический метр:

$$\Delta W_{м} \to \text{Дж/м}^3, \quad \Delta W_{э} \to \text{Дж/м}^3. \qquad (4.17)$$

Полная энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме V_1, равна сумме энергий $W_м$ и $W_э$:

$$W = W_м + W_э = \int\limits_{V_1} \left(\frac{\tilde{\mu}_a H^2}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_a E^2}{2} \right) dV. \qquad (4.18)$$

§ 4.2. Теорема Пойнтинга для комплексных амплитуд векторов поля

В основу рассуждений положим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля (2.12), (2.13).

Раскрывая значения $\tilde{\varepsilon}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ с помощью формул (1.159), (1.161), получаем

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_э + \gamma_a \dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \qquad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = - \dot{\mathbf{J}}_м - \gamma_м \dot{\mathbf{H}} - j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \qquad (4.20)$$

Пусть $\dot{\mathbf{H}}^*$, $\dot{\mathbf{J}}_э^*$, $\dot{\mathbf{E}}^*$ обозначают сопряженные значения комплексных амплитуд векторов $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{J}}_э$, $\dot{\mathbf{E}}$, т. е. такие их значения, у которых знаки перед мнимыми частями комплексных амплитуд заменены на обратные.

Тогда уравнение (4.19) для сопряженных комплексных амплитуд приобретет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = \dot{\mathbf{J}}_э^* + \gamma_э \dot{\mathbf{E}}^* - j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}^*. \qquad (4.21)$$

В соответствии с правилами перехода к сопряженным значениям знак перед последним слагаемым в правой части уравнения (4.19) заменен на обратный.

Далее, умножая уравнение (4.20) скалярно на вектор $\dot{\mathbf{H}}^*$, а уравнение (4.21) — на вектор $\dot{\mathbf{E}}$ и вычитая из первого произведения второе, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = - \dot{\mathbf{J}}_м \dot{\mathbf{H}}^* - \gamma_м \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^* - j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^* -$$
$$- \dot{\mathbf{J}}_э^* \dot{\mathbf{E}} - \gamma_э \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}}. \qquad (4.22)$$

В силу векторного тождества $\dot{\mathbf{H}}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* = \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]$, а также того обстоятельства, что произведение комплексной величины на ее сопряженное значение дает квадрат амплитуды модуля $\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^* = |\dot{\mathbf{H}}|^2$, $\dot{\mathbf{E}}^*\dot{\mathbf{E}} = |\dot{\mathbf{E}}|^2$, выражение (4.22) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] + \dot{\mathbf{J}}_м \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{J}}_э^* \dot{\mathbf{E}} + \gamma_м |\dot{\mathbf{H}}|^2 + \gamma_э |\dot{\mathbf{E}}|^2 + j\omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 - j\omega\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 = 0. \qquad (4.23)$$

По аналогии с уравнением (4.2) уравнение (4.23) называют *теоремой Пойнтинга в дифференциальной форме для комплексных амплитуд векторов поля.*

Интегрируя полученное уравнение по объему V_1, включающему источники сторонних электрических и магнитных токов, и используя теорему Остроградского—Гаусса (2.1), на основании которой

$$\int_{V_1} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S},$$

представим уравнение (4.23) в интегральной форме:

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_\text{м}\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_\text{э}^*\dot{\mathbf{E}}\,dV + \int_{V_1} \gamma_\text{м}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV + \\ + \int_{V_1} \gamma_\text{э}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV + \int_{V_1} j\omega\mu_\text{а}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV - \int_{V_1} j\omega\varepsilon_\text{а}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV = 0. \qquad (4.24)$$

Первый, второй и третий интегралы в уравнении (4.24) представляют собой в общем случае комплексные величины, т. е. их можно выразить суммой действительной и мнимой частей. В силу того что проводимости $\gamma_\text{м}$ и $\gamma_\text{э}$—действительные величины и квадраты модулей $|\dot{\mathbf{H}}|^2$ и $|\dot{\mathbf{E}}|^2$—также действительные величины, четвертый и пятый интегралы являются действительными. Величины ω, $\mu_\text{а}$, $|\dot{\mathbf{H}}|^2$, $\varepsilon_\text{а}$, $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ являются также действительными. Следовательно, последние два интеграла представляют собой мнимые величины.

Выражение (4.24) по аналогии с (4.5) можно рассматривать в качестве уравнения баланса мощностей в пространстве, но не мгновенных, а комплексных, активных и реактивных. В развернутой форме это выражение, поделенное на два (что имеет, как увидим далее, определенный смысл), записывается как

$$\oint_{S_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + j\oint_{S_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + \\ + \int_{V_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{м}\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + j\int_{V_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{м}\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + \\ + \int_{V_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{э}^*\dot{\mathbf{E}}\,dV + j\int_{V_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{э}^*\dot{\mathbf{E}}\,dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2}\gamma_\text{м}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV + \int_{V_1} \frac{1}{2}\gamma_\text{э}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV + \int_{V_1} \frac{1}{2}j\omega\mu_\text{а}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV - \\ - \int_{V_1} \frac{1}{2}j\omega\varepsilon_\text{а}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV = 0. \qquad (4.25)$$

Разделяя действительные и мнимые части, найдем отдельно баланс активных и реактивных мощностей в пространстве:

$$\oint_{S_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + \int_{V_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{м}\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + \int_{V_1} \operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{э}^*\dot{\mathbf{E}}\,dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2}\gamma_\text{м}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV + \int_{V_1} \frac{1}{2}\gamma_\text{э}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV = 0, \qquad (4.26)$$

$$\oint_{S_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + \int_{V_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{м}\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + \int_{V_1} \operatorname{Im}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_\text{э}^*\dot{\mathbf{E}}\,dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2}\omega\mu_\text{а}|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV - \int_{V_1} \frac{1}{2}\omega\varepsilon_\text{а}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV = 0. \qquad (4.27)$$

Рассмотрим более подробно один из интегралов, входящих в выражение (4.26), в частности интеграл $\int\limits_{V_1} \gamma_э |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV$.

В этом интеграле $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ представляет собой *квадрат модуля комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля.* Составим сходный интеграл: $\int\limits_{V_1} \gamma_э \mathbf{E}^2 dV$, в котором $\mathbf{E}^2$ представляет собой *квадрат мгновенного значения вектора* $\mathbf{E}$. Допустим, что вектор $\mathbf{E}$ изменяется по закону $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E)$. Тогда

$$\int\limits_{V_1} \gamma_э \mathbf{E}^2 dV + \int\limits_{V_1} \gamma_э E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2} dV.$$

Полученное соотношение характеризует мгновенную мощность, теряемую в объеме V_1 на нагревание среды за счет удельной электрической проводимости $\gamma_э$. Усредненную за период мощность можно получить путем следующего интегрирования:

$$P_{ср} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_{V_1} \gamma_э \mathbf{E}^2 dV\, dt = \frac{1}{\omega T} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{V_1} \gamma_э \mathbf{E}^2 dV d(\omega t),$$

$$\omega = 2\pi f, \quad T = 1/f,$$

$$P_{ср} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{V_1} \gamma_э \mathbf{E}^2 dV d(\omega t),$$

$$P_{ср} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{V_1} \gamma_э E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2} dV d(\omega t) = \int\limits_{V_1} \frac{\gamma_э E_m^2}{2} dV.$$

В рассматриваемом случае комплексная амплитуда $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j\varphi_E}$, $|\dot{\mathbf{E}}| = \mathbf{E}_m$. Квадрат модуля комплексной амплитуды $|\dot{\mathbf{E}}|^2 = E_m^2$. Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_э |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV = \int\limits_{V_1} \frac{\gamma_э E_m^2}{2} dV$$

представляет собой усредненную за период колебаний мощность, теряемую на нагревание среды.

Интеграл $\oint\limits_{S_1} \mathrm{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S}$ можно рассматривать как активную, усредненную за период колебаний мощность, проходящую через замкнутую поверхность S_1, а интегралы $\int\limits_{V_1} \mathrm{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_м \dot{\mathbf{H}}^* dV$ и $\int\limits_{V_1} \mathrm{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_э^* \dot{\mathbf{E}} dV$ — соответственно как усредненные активные мощности, отдаваемые источниками сторонних магнитных и электрических токов в объем V_1. Наконец, интеграл $\int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_м |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV$ можно рассматривать в качестве усредненной за период колебаний активной мощности, возникающей при наличии удельной магнитной проводимости, или мощности потерь в веществе при воздействии на него магнитного поля.

В ряде случаев, когда магнитная проницаемость вещества является действительной величиной, в соответствии с выражением (1.161) следует полагать $\gamma_м = 0$, т. е. указанная мощность потерь отсутствует.

Первый интеграл в выражении (4.27) характеризует усредненную за период колебаний реактивную мощность, проходящую через поверхность S_1, второй и третий интегралы — усредненные реактивные мощности источников сторонних магнитного и электрического токов. Эти мощности сходны с реактивной мощностью в теории цепей, возникающей при отсутствии согласования сопротивлений источников с входными сопротивлениями питаемых ими устройств.

Интегралы $\int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \omega\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 dV$, $\int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \omega\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 dV$ представляют собой усредненные мощности, затраченные на создание магнитного и электрического полей в объеме V_1. По аналогии с выражением (4.4) векторное произведение

$$\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}} \tag{4.28}$$

называют *комплексным вектором Пойнтинга*, который состоит из действительной и мнимой частей.

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}}_д, \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{\Pi}}_м. \tag{4.30}$$

Дж. Пойнтинг опубликовал свою работу [13] в 1884 г. В 1874 г. Н. А. Умов [14] ввел понятие потока энергии. Он определил плотность потока энергии как произведение плотности переносимой энергии $\Delta W = dW/dV$ на вектор скорости $\mathbf{v}$. Эта функция носит название *мгновенного значения вектора Умова*:

$$\Delta W \mathbf{v} = \mathbf{У}.$$

Н. А. Умов вывел важные соотношения для сил давления, вызываемых потоком энергии. Однако он не занимался вопросом переноса энергии электромагнитного поля в отличие от Пойнтинга. Следует четко представлять, что вектор Пойнтинга и вектор Умова — в общем случае не одно и то же. Эти векторы могут быть равны, если определить долю общей плотности энергии ΔW, участвующей в переносе и составляющей поток электромагнитного поля. Обозначая эту долю ΔW_1, получим

$$\mathbf{У}_1 = \Delta W_1 \mathbf{v} = \mathbf{\Pi}.$$