ГЛАВА 5

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

§ 5.1. Постановка вопроса

В предыдущих главах были обоснованы электродинамические уравнения, являющиеся математическим выражением экспериментальных фактов. В данной главе определяются условия, при выполнении которых решение этих уравнений, полученное каким-либо методом, можно считать единственным. Обычно теорема единственности сначала доказывается для ограниченного объема V_1, окруженного замкнутой поверхностью S_1, а затем распространяется на неограниченный объем.

§ 5.2. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для ограниченного объема

Теорема может быть доказана при соблюдении следующих условий:

1) в начальный момент времени $t=0$ заданы значения векторов поля $\mathbf{E}(0)$ и $\mathbf{H}(0)$ в пределах всего ограниченного объема V_1;

2) на поверхности S_1, ограничивающей рассматриваемый объем V_1, заданы значения тангенциальных к S_1 составляющие поля $\mathbf{E}_\tau(t)$ либо $\mathbf{H}_\tau(t)$ в интервале времени t, в течение которого изучаются электродинамические процессы.

Доказательство теоремы проводится от противного. Пусть имеются два различных решения уравнений Максвелла для полей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, удовлетворяющих уравнениям (2.5) и (2.6). Запишем эти уравнения для каждого из двух решений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1=\mathbf{J}_э+\gamma_э\mathbf{E}_1+\varepsilon_a\frac{\partial\mathbf{E}_1}{\partial t}, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1=-\mathbf{J}_м-\gamma_м\mathbf{H}_1-\mu_a\frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial t}, \tag{5.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_2=\mathbf{J}_э+\gamma_э\mathbf{E}_2+\varepsilon_a\frac{\partial\mathbf{E}_2}{\partial t}, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2=-\mathbf{J}_м-\gamma_м\mathbf{H}_2-\mu_a\frac{\partial\mathbf{H}_2}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Уравнение для первого и второго решений записаны для одного и того же объема V_1. Векторы поля, соответствующие первому и второму решениям, создаются одними и теми же сторонними токами. Вследствие этого параметры среды и возбуждающие токи в записанных уравнениях одни и те же.

В силу справедливости принципа суперпозиции для линейной среды уравнениям (2.5) и (2.6) должно удовлетворять третье, разностное решение:

$$\mathbf{E}_3=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2,\quad \mathbf{H}_3=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2. \tag{5.5}$$

Вычитая почленно из уравнения (5.1) уравнение (5.3) и из уравнения (5.2) уравнение (5.4), а также учитывая, что разность роторов двух векторов равна ротору разности этих векторов, получаем следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\gamma_э(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)+\varepsilon_а\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=\gamma_м(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)-\mu_а\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2),$$

или окончательно после подстановки в них выражения (5.5)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_з=\gamma_э\mathbf{E}_з+\varepsilon_а\frac{\partial\mathbf{E}_з}{\partial t}, \tag{5.6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_з=-\gamma_м\mathbf{H}_з-\mu_а\frac{\partial\mathbf{H}_з}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Как следует из уравнений (5.6), (5.7), третье решение не имеет источников поля и не может быть физически реализовано. Рассмотрим вопрос более строго.

Поскольку в уравнениях Максвелла (5.6), (5.7) отсутствуют сторонние токи, их не будет и в теореме Пойнтинга (4.5), записанной для третьего решения:

$$\oint\limits_{S_1}[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]\,d\mathbf{S}+\int\limits_V\gamma_м H_з^2\,dV+\int\limits_V\gamma_э E_з^2\,dV+$$
$$+\int\limits_{V_1}\mu_а\frac{\partial H_з}{\partial t}H_з\,dV+\int\limits_{V_1}\varepsilon_а\frac{\partial E_з}{\partial t}E_з\,dV=0. \tag{5.8}$$

Произведение $[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]d\mathbf{S}$ представляет собой проекцию вектора Пойнтинга на направление нормали к поверхности S_1, умноженную на элемент площади dS. Проекция вектора $[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]$ на нормаль к поверхности S_1, или нормальная к S_1 составляющая вектора Пойнтинга, создается тангенциальными к этой поверхности составляющими векторов $\mathbf{E}_{\tau з}$ и $\mathbf{H}_{\tau з}$. В силу условия 2), положенного в основу доказательства теоремы единственности на поверхности S_1, значения тангенциальных составляющих вектора $\mathbf{E}_\tau$ либо $\mathbf{H}_\tau$ заданы однозначно, следовательно,

$$\mathbf{E}_{\tau1}=\mathbf{E}_{\tau2}=\mathbf{E}_\tau,$$

или

$$\mathbf{H}_{\tau1}=\mathbf{H}_{\tau2}=\mathbf{H}_\tau,$$

$$\mathbf{E}_{\tau з}=\mathbf{E}_{\tau1}-\mathbf{E}_{\tau2}=0, \tag{5.9}$$

или

$$\mathbf{H}_{\tau з}=\mathbf{H}_{\tau1}-\mathbf{H}_{\tau2}=0. \tag{5.10}$$

Таким образом, при соблюдении условия (5.9) либо (5.10) произведение

$$[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]\,d\mathbf{S}=0 \tag{5.11}$$

и теорема Пойнтинга (5.8) могут быть записаны таким образом:

$$\int\limits_{V_1}\gamma_м H_з^2\,dV+\int\limits_{V_1}\gamma_э E_з^2\,dV+\int\limits_{V_1}\mu_а\frac{\partial H_з}{\partial t}H_з\,dV+\int\limits_{V_1}\varepsilon_а\frac{\partial E_з}{\partial t}E_з\,dV=0. \tag{5.12}$$

В соответствии с выражением (4.9) последние два интеграла представляют собой мощность магнитного и электрического полей, сосредоточенную в объеме V_1. Эту мощность можно представить как производную по времени от энергии электромагнитного поля W_3, накопленной в объеме V_1:

$$P = \partial W_3/\partial t. \qquad (5.13)$$

Тогда уравнение (5.12) может быть записано в виде

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = -\int\limits_{V_1} \gamma_{\text{м}} H_3^2 dV - \int\limits_{V_1} \gamma_{\text{э}} E_3^2\, dV. \qquad (5.14)$$

Интегралы в правой части при наличии поля H_3, E_3 существенно положительны. Следовательно, для справедливости равенства (5.14) необходимо выполнение условия

$$\partial W_3/\partial t < 0 \qquad (5.15)$$

либо

$$\partial W_3/\partial t = 0. \qquad (5.16)$$

В последнем случае поля H_3, E_3 не существует. По условию 1) доказательства теоремы в начальный момент времени в пределах всего объема V_1 однозначно заданы поля $\mathbf{E}(0)$ и $\mathbf{H}(0)$. Другими словами, в начальный момент времени

$$\mathbf{E}_1(0) = \mathbf{E}_2(0) = \mathbf{E}(0), \ \ \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{H}_2(0) = \mathbf{H}(0),$$

т. е. в начальный момент времени поля, соответствующего третьему решению, не существует:

$$\mathbf{E}_3(0) = \mathbf{E}_1(0) - \mathbf{E}_2(0) = 0, \quad \mathbf{H}_3(0) = \mathbf{H}_1(0) - \mathbf{H}_2(0) = 0. \qquad (5.17)$$

В начальный момент времени энергия электромагнитного поля, соответствующая третьему решению, равна нулю в силу соотношений (5.17). Дальнейшее уменьшение энергии невозможно, следовательно, невозможно соблюдение неравенства (5.15).

Таким образом, приходим к заключению о справедливости неравенства (5.16), что приводит к условию

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{H}_3 = 0, \qquad (5.18)$$

или с учетом соотношений (5.5)

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \qquad (5.19)$$

При соблюдении условий 1) и 2) возможно существование только одного электромагнитного поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла. Таким образом, теорему единственности решения уравнений Максвелла для ограниченного объема V_1 можно считать доказанной.

§ 5.3. Теорема единственности решения уравнений Максвелла для неограниченного объема

В случае неограниченного объема нельзя требовать выполнение условия 2), так как поверхность S_1 находится на бесконечно удаленном расстоянии и задание тангенциальных к этой поверхности составляющих поля невозможно. Условие 2) необходимо для доказательства равенства нулю интеграла $\oint\limits_{S_1}[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]d\mathbf{S}$ в теореме Пойнтинга (5.8). Условие 1) может быть задано (обычно в форме нулевого условия, т. е. отсутствия поля в начальный момент времени). Равенство нулю первого интеграла в уравнении (5.8) при неограниченном объеме V_1 сводится к предельному соотношению:

$$\lim_{S_1\to\infty}\oint\limits_{S_1}[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]\,d\mathbf{S}=0. \tag{5.20}$$

Так как площадь S_1 растет пропорционально второй степени расстояния r, то это равенство может быть соблюдено, если убывание векторов поля с расстоянием происходит по закону

$$\mathbf{E}(r)=\mathbf{E}/r^k,\quad \mathbf{H}(r)=\mathbf{H}/r^k, \tag{5.21}$$

где

$$k>1. \tag{5.22}$$

При этом следует предположить, что все источники поля находятся на конечном расстоянии от начала координат.

При выполнении условий 1) и (5.21), (5.22) доказательство теоремы единственности для неограниченного объема V_1 не отличается от доказательства, проведенного для ограниченного объема. Как будет показано далее, в свободном пространстве без потерь, в котором

$$\gamma_м=\gamma_э=0, \tag{5.23}$$

векторы поля убывают пропорционально первой степени расстояния. С учетом соотношения (5.23) теорема Пойнтинга (5.8) в этом случае записывается в виде

$$\partial W_з/\partial t=-\oint\limits_{S_1}[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]\,d\mathbf{S}. \tag{5.24}$$

Так как все источники поля расположены в пределах объема V_1, то электромагнитное поле распространяется в направлении к поверхности S_1, и, следовательно, интеграл в правой части положителен или равен нулю. Как указывалось, при соблюдении условия 1) доказательства теоремы производная энергии по времени не может быть отрицательна. Следовательно, справедливо равенство $\partial W_з/\partial t=0$, и рост энергии $W_з$, соответствующий третьему решению, от первоначального нулевого значения невозможен. Третьего решения не существует.

Для среды с потерями, как будет показано в дальнейшем, соблюдаются условия (5.21), (5.22) и теорема единственности также доказывается.

Можно предложить еще один ход рассуждений, пригодный в том случае, когда электромагнитные процессы рассматриваются в ограниченном, не бесконечно большом интервале времени. При этом поле, распространяющееся в пространстве с ограниченной световой скоростью, за ограниченный интервал времени не сможет достигнуть бесконечно удаленной поверхности S_1. Таким образом, если время не бесконечно велико, $\oint\limits_{S_1} [\mathbf{E}_з \mathbf{H}_з] d\mathbf{S} = 0$.

ГЛАВА 6
ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

§ 6.1. Постановка вопроса

Электродинамические уравнения Максвелла представляют собой при заданных сторонних токах и параметрах среды систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Эти уравнения можно решать либо путем исключения одного из двух неизвестных векторов поля с последующим решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, либо непосредственно. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, записанное для мгновенных значений какого-либо из векторов поля, называют *волновым уравнением*, а для комплексных амплитуд — уравнением Гельмгольца.

В этой главе рассматривается методика получения волновых уравнений и уравнений Гельмгольца для векторов поля.

§ 6.2. Волновые уравнения для векторов поля

Система уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля записывается в форме соотношений (2.5), (2.6).

Для исключения какого-либо из векторов поля, например $\mathbf{E}$, берут ротор от обеих частей уравнения (2.5), меняя порядок дифференцирования в последнем члене:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \gamma_э \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon_а \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{6.1}$$

При этом параметры среды полагают постоянными, не зависящими от координат.

В приложении I приводится векторное тождество $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, где ∇^2 — оператор Лапласа.