Для среды с потерями, как будет показано в дальнейшем, соблюдаются условия (5.21), (5.22) и теорема единственности также доказывается.

Можно предложить еще один ход рассуждений, пригодный в том случае, когда электромагнитные процессы рассматриваются в ограниченном, не бесконечно большом интервале времени. При этом поле, распространяющееся в пространстве с ограниченной световой скоростью, за ограниченный интервал времени не сможет достигнуть бесконечно удаленной поверхности S_1. Таким образом, если время не бесконечно велико, $\oint\limits_{S_1}[\mathbf{E}_з\mathbf{H}_з]dS=0$.

ГЛАВА 6
ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

§ 6.1. Постановка вопроса

Электродинамические уравнения Максвелла представляют собой при заданных сторонних токах и параметрах среды систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными векторами **E** и **H**. Эти уравнения можно решать либо путем исключения одного из двух неизвестных векторов поля с последующим решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, либо непосредственно. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, записанное для мгновенных значений какого-либо из векторов поля, называют *волновым уравнением*, а для комплексных амплитуд —уравнением Гельмгольца.

В этой главе рассматривается методика получения волновых уравнений и уравнений Гельмгольца для векторов поля.

§ 6.2. Волновые уравнения для векторов поля

Система уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля записывается в форме соотношений (2.5), (2.6).

Для исключения какого-либо из векторов поля, например **E**, берут ротор от обеих частей уравнения (2.5), меняя порядок дифференцирования в последнем члене:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{J}_э+\gamma_э\operatorname{rot}\mathbf{E}+\varepsilon_а\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{6.1}$$

При этом параметры среды полагают постоянными, не зависящими от координат.

В приложении I приводится векторное тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\nabla^2\mathbf{a}$, где ∇^2 —оператор Лапласа.

Применяя это тождество в уравнении (6.1), получаем

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \gamma_э \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Далее подставляем в это уравнение значение $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ из второго уравнения Максвелла (2.6):

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \gamma_э \left(- \mathbf{J}_м - \gamma_м \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \\ + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(- \mathbf{J}_м - \gamma_м \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right).$$

Группируя члены, меняя знаки на обратные и раскрывая скобки, находим

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \gamma_э \gamma_м \mathbf{H} - \gamma_э \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_м \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} = \\ = - \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \gamma_э \mathbf{J}_м + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_м}{\partial t},$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - (\gamma_э \mu_a + \gamma_м \varepsilon_a) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_э \gamma_м \mathbf{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} = \\ = - \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \gamma_э \mathbf{J}_м + \varepsilon_э \frac{\partial \mathbf{J}_м}{\partial t}. \qquad (6.2)$$

Используя перестановки (2.20), получаем уравнение для вектора $\mathbf{E}$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - (\gamma_э \mu_a + \gamma_м \varepsilon_a) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \gamma_э \gamma_м \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = \\ = \operatorname{rot} \mathbf{J}_м + \gamma_м \mathbf{J}_э + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_э}{\partial t}. \qquad (6.3)$$

Решение уравнений (6.2) и (6.3) дает возможность при заданных параметрах среды и сторонних токах определить векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$. Эти уравнения записаны с учетом всех потенциально возможных факторов, определяющих электродинамический процесс. Обращает внимание большая сложность правых частей этих уравнений. В дальнейшем будут показаны пути упрощения правых частей, определяющих возбуждение векторов поля.

Для среды без потерь уравнения существенно упрощаются

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} = - \operatorname{rot} \mathbf{J}_э + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_м}{\partial t}, \qquad (6.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{J}_м + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_э}{\partial t}. \qquad (6.5)$$

При отсутствии потерь могут быть легко найдены выражения для $\operatorname{div} \mathbf{H}$ и $\operatorname{div} \mathbf{E}$. При $\gamma_э = \gamma_м = 0$ соотношения (2.7) и (2.8) с учетом формул (1.19) и (1.79) записываются в виде

$$\operatorname{div} (\varepsilon_a \mathbf{E}) = \rho_э,$$
$$\operatorname{div} (\mu_a \mathbf{H}) = \rho_м,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_а}\rho_э, \qquad (6.6)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_а}\rho_м. \qquad (6.7)$$

Из уравнений непрерывности (2.10) и (2.11) следует, что

$$\rho_э=-\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{J}_э\,dt, \qquad (6.8)$$

$$\rho_м=-\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{J}_м\,dt, \qquad (6.9)$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=-\frac{1}{\varepsilon_а}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{J}_э\,dt, \qquad (6.10)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=-\frac{1}{\mu_а}\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{J}_м\,dt. \qquad (6.11)$$

Подставляя значения $\operatorname{div}\mathbf{H}$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}$ в уравнения (6.4), (6.5), получаем волновые уравнения:

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu_а\varepsilon_а\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\mu_а}\int_0^t \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{J}_м\,dt-\operatorname{rot}\mathbf{J}_э+\varepsilon_а\frac{\partial\mathbf{J}_м}{\partial t}, \qquad (6.12)$$

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu_а\varepsilon_а\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_а}\int_0^t \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{J}_э\,dt+\operatorname{rot}\mathbf{J}_м+\mu_а\frac{\partial\mathbf{J}_э}{\partial t}. \qquad (6.13)$$

Уравнения (6.2), (6.3), (6.12), (6.13) используют в случаях, когда задана система токов и требуется определить векторы поля. Если исследуются процессы распространения электромагнитных волн в среде с заданными параметрами и сторонние токи, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, то правые части указанных уравнений обращаются в нуль.

Уравнения (6.12) и (6.13) при этом записываются в форме известных простейших волновых уравнений:

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu_а\varepsilon_а\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0, \qquad (6.14)$$

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu_а\varepsilon_а\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0. \qquad (6.15)$$

В случае статического поля ($\partial/\partial t=0$) волновые уравнения переходят в уравнения Лапласа:

$$\nabla^2\mathbf{H}=0, \qquad (6.16)$$

$$\nabla^2\mathbf{E}=0. \qquad (6.17)$$

Представленные уравнения записаны в общей форме, пригодной для любой системы координат. В конкретной системе координат оператор Лапласа, приложенный к вектору **a**, определяют с помощью тождества $\nabla^2\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

В конкретной системе координат вычисляют операторы $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, что позволяет найти $\nabla^2\mathbf{a}$. В приложении I дана формула для $\nabla^2\mathbf{a}$, записанная в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат. Подставляя значение коэффициентов Лямэ, можно получить выражения для $\nabla^2\mathbf{a}$ в любой из конкретных систем координат.

§ 6.3. Уравнения Гельмгольца для векторов поля

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля записывается в виде соотношений (2.12), (2.13).

Подвергая первое уравнение операции ротора, находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}.$$

Подставляя значение $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}$ из второго уравнения, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а(-\dot{\mathbf{J}}_м - j\omega\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}}),$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э - j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{J}}_м + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{H}}.$$

Используя тождество $\nabla^2\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} - \nabla^2\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э - j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{J}}_м + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{H}},$$

или после группировки членов

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{H}} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{J}}_м. \tag{6.18}$$

С помощью выражения (2.15) можно раскрыть вид $\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}}$:

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_а}\dot{\rho}_м, \tag{6.19}$$

а из уравнения непрерывности (2.18) найти $\dot{\rho}_м$:

$$\dot{\rho}_м = \frac{j}{\omega}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_м.$$

После подстановки $\dot{\rho}_м$ в выражение (6.19) получаем

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_а}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_м. \tag{6.20}$$

Подставляя значение $\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}}$ в уравнение (6.18) и группируя члены, получаем уравнение Гельмгольца для вектора $\dot{\mathbf{H}}$ в окончательной форме:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_а}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_м - \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{J}}_м. \tag{6.21}$$

Уравнение для вектора $\dot{\mathbf{E}}$ можно получить с помощью перестановок (2.19):

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \frac{i}{\omega\tilde{\varepsilon}_a}\,\mathrm{grad\,div}\,\dot{\mathbf{J}}_э + \mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{J}}_м + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э. \qquad (6.22)$$

Уравнения (6.21), (6.22) представляют собой уравнения Гельмгольца и являются неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка со сложной правой частью.

В случаях, когда исследуются процессы распространения электромагнитных волн и сторонние токи $\dot{\mathbf{J}}_э$ и $\dot{\mathbf{J}}_м$, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, неоднородные уравнения Гельмгольца переходят в однородные уравнения вида

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} = 0, \qquad (6.23)$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = 0. \qquad (6.24)$$

ГЛАВА 7
РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПРОСТЕЙШЕМ СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 7.1. Постановка вопроса

Однородные уравнения Гельмгольца (6.23) и (6.24) выведены в предположении, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, однородна, линейна и изотропна. Эти уравнения записаны в общей векторной форме и их решение можно проводить в любой системе координат. Для этого следует раскрыть оператор Лапласа ∇^2 в конкретной системе координат и представить векторные уравнения Гельмгольца системой скалярных уравнений. Наиболее простой вид оператор Лапласа имеет в декартовой системе координат, что определяет простоту скалярных уравнений, соответствующих уравнению Гельмгольца. Поэтому изучение методов решения уравнений Гельмгольца целесообразно начать, используя декартову систему координат.

§ 7.2. Определение вида скалярных уравнений, соответствующих уравнениям Гельмгольца в декартовой системе координат

В приложении I показан вид операции $\nabla^2\mathbf{a}$ в криволинейной системе координат. Подставляя коэффициенты Лямэ, соответствующие декартовой системе координат, получаем выражение для