

Уравнение для вектора  $\dot{\mathbf{E}}$  можно получить с помощью перестановок (2.19):

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{grad div } \dot{\mathbf{J}}_a + \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_m + j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_a. \quad (6.22)$$

Уравнения (6.21), (6.22) представляют собой уравнения Гельмгольца и являются неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка со сложной правой частью.

В случаях, когда исследуются процессы распространения электромагнитных волн и сторонние токи  $\dot{\mathbf{J}}_a$  и  $\dot{\mathbf{J}}_m$ , возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, неоднородные уравнения Гельмгольца переходят в однородные уравнения вида

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (6.23)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (6.24)$$

## ГЛАВА 7

### РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПРОСТЕЙШЕМ СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

#### § 7.1. Постановка вопроса

Однородные уравнения Гельмгольца (6.23) и (6.24) выведены в предположении, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, однородна, линейна и изотропна. Эти уравнения записаны в общей векторной форме и их решение можно проводить в любой системе координат. Для этого следует раскрыть оператор Лапласа  $\nabla^2$  в конкретной системе координат и представить векторные уравнения Гельмгольца системой скалярных уравнений. Наиболее простой вид оператор Лапласа имеет в декартовой системе координат, что определяет простоту скалярных уравнений, соответствующих уравнению Гельмгольца. Поэтому изучение методов решения уравнений Гельмгольца целесообразно начать, используя декартову систему координат.

#### § 7.2. Определение вида скалярных уравнений, соответствующих уравнениям Гельмгольца в декартовой системе координат

В приложении I показан вид операции  $\nabla^2 a$  в криволинейной системе координат. Подставляя коэффициенты Лямэ, соответствующие декартовой системе координат, получаем выражение для

операции  $\nabla^2 \mathbf{a}$  в этой системе:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \mathbf{1}_x \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_y \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right).$$

Подставляя выражение для оператора Лапласа в уравнение (6.23) и представляя вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z, \quad (7.1)$$

получаем

$$\mathbf{1}_x \left( \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_y \left( \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left( \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} \right) + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a (\mathbf{1}_x \dot{H}_x + \mathbf{1}_y \dot{H}_y + \mathbf{1}_z \dot{H}_z) = 0. \quad (7.2)$$

Приравнивая нулю члены при одинаковых ортах, запишем систему скалярных уравнений для вектора  $\dot{\mathbf{H}}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

В этой системе налицо разделение функций, т. е. каждое скалярное уравнение содержит только одну составляющую вектора  $\dot{\mathbf{H}}$ . Заметим, что такое разделение возможно только в прямолинейной (декартовой) системе координат.

Система скалярных уравнений для вектора  $\dot{\mathbf{E}}$  записывается аналогично (7.3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

### § 7.3. Плоские волны

Системы скалярных уравнений (7.3) и (7.4) приобретают наиболее простой вид в случае плоских волн.

Плоской называют волну, распространяющуюся вдоль какой-либо линейной координаты и неизменную в каждый фиксированный момент времени в плоскости, перпендикулярной этой координате.

Строго плоских волн физически не существует, так как фронт такой волны, находящийся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, должен был бы простирается до бесконечности. В случае источника малых размеров реально существуют сферические волны, которые при больших значениях радиуса в пределах ограниченного участка волны можно рассматривать как плоские. При решении практических задач в ряде случаев представление электромагнитной волны плоской является разумной идеализацией и дает возможность получить ценные сведения о процессе. Допуская, что вектор Пойнтинга плоской волны ориентирован вдоль оси  $z$  декартовой системы координат:

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\Pi}_z, \quad (7.5)$$

можно утверждать, что он должен быть создан составляющими поля в плоскости  $xy$ . Составляющие поля, ориентированные вдоль оси  $z$ , должны отсутствовать. Подобное поле иногда называют поперечным электромагнитным полем или полем типа Т. Поскольку составляющие поля должны быть неизменными в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, т. е. в плоскости  $xy$ , производные по этим координатам должны быть равны нулю. Таким образом, можно записать следующие математические условия поставленной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_z = \dot{H}_z = 0, \quad \dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{H}_x, \dot{H}_y \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Системы скалярных уравнений (7.3) и (7.4) в частных производных превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{H}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_x = 0, \\ \frac{d^2 \dot{H}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{H}_y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_x = 0, \\ \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Решение любой пары уравнений, например (7.8), может быть записано в форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z}, \\ \dot{E}_y = B_1 e^{-\gamma z} + B_2 e^{\gamma z}, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

где

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} \quad (7.10)$$

— коэффициент распространения.

Если среда обладает электрическими или магнитными потерями, проницаемости  $\epsilon_a$  или  $\mu_a$  являются комплексными величинами и, следовательно, комплексен коэффициент распространения  $\gamma$ . Если первоначально было записано решение уравнений (7.8) и введены постоянные интегрирования  $A$  и  $B$ , то при записи решений уравнений (7.7) не следует вводить новых постоянных интегрирования в силу того, что векторы поля  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  связаны уравнениями Максвелла и решение уравнений (7.7) может быть записано с помощью известных решений для составляющих поля  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$ . Процесс отыскания решений для составляющих поля  $\dot{H}_x, \dot{H}_y$  базируется на уравнениях Максвелла (2.12), (2.13).

Принципиально для отыскания вектора  $\dot{\mathbf{H}}$  при известном векторе  $\dot{\mathbf{E}}$  можно использовать любое из этих уравнений. При использовании уравнения (2.12), в котором вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  находится под знаком дифференциального оператора — ротора, пришлось бы решать дифференциальное уравнение для определения вектора  $\dot{\mathbf{H}}$ . Применяя уравнение (2.13), необходимо взять только ротор известного решения, что сделать достаточно просто. Поэтому для отыскания вектора  $\dot{\mathbf{H}}$  по известному вектору  $\dot{\mathbf{E}}$  целесообразно применять второе уравнение Максвелла, а для отыскания вектора  $\dot{\mathbf{E}}$  по найденному вектору  $\dot{\mathbf{H}}$  — первое уравнение Максвелла.

В случае плоских волн сторонние токи отсутствуют и система уравнений Максвелла должна быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (7.11)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \quad (7.12)$$

Из уравнения (7.12) следует, что

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}. \quad (7.13)$$

В приложении I дано следующее выражение для ротора в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

С учетом соотношений (7.6) можно записать выражение для  $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}$ :

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{1}_x \frac{d\dot{E}_y}{dz} + \mathbf{1}_y \frac{d\dot{E}_x}{dz}.$$

Подставляя значение  $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}$  в (7.13), получаем формулу для вектора  $\dot{\mathbf{H}}$ :

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{d\dot{E}_y}{dz} - \mathbf{1}_y \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{d\dot{E}_x}{dz}. \quad (7.14)$$

Следует обратить внимание на то, что составляющая поля  $\dot{H}_x$  формируется за счет ортогональной к ней составляющей  $\dot{E}_y$ , а составляющая поля  $\dot{H}_y$  — ортогональной к ней составляющей  $\dot{E}_x$ . Составляющие поля  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{E}_y$  и  $\dot{H}_y$ ,  $\dot{E}_x$  образуют векторы Пойнтинга, направленные вдоль оси  $z$ , определяющие распространение электромагнитных волн в заданном направлении. Используя выражения (7.14) и (7.9), можно получить соотношение для составляющей поля  $\dot{H}_x$ :

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} (-j\gamma B_1 e^{-i\gamma z} + j\gamma B_2 e^{i\gamma z}).$$

Подставляя значение  $\gamma$  (7.10), получаем

$$\dot{H}_x = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_a/\tilde{\epsilon}_a}} (-B_1 e^{-i\gamma z} + B_2 e^{i\gamma z}).$$

Далее, вводя обозначение

$$Z_c = \sqrt{\tilde{\mu}_a/\tilde{\epsilon}_a}, \quad (7.15)$$

выражение для  $\dot{H}_x$  можно переписать в виде

$$\dot{H}_x = \frac{1}{Z_c} (-B_1 e^{-i\gamma z} + B_2 e^{i\gamma z}). \quad (7.16)$$

Аналогично находят соотношение для составляющей поля  $\dot{H}_y$ :

$$\dot{H}_y = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-i\gamma z} - A_2 e^{i\gamma z}). \quad (7.17)$$

Определим единицы измерения величины  $Z_c$ :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma_H \cdot M}{M \cdot \Phi}} = \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}}.$$

В силу того что  $\omega L \rightarrow \text{Ом} = \Gamma_H/\text{с}$  и  $\frac{1}{\omega C} \rightarrow \text{Ом} = \text{с}/\Phi$ ,

$$\Gamma_H = \text{Ом} \cdot \text{с} \text{ и } \Phi = \text{с}/\text{Ом}.$$

Следовательно,

$$Z_c \rightarrow \sqrt{\frac{\Gamma_H}{\Phi}} = \sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{Ом}}{\text{с}}} = \text{Ом}. \quad (7.18)$$

Величина  $Z_c$  измеряется в омах и называется *характеристическим сопротивлением среды*.

Подставив выражения (1.159) и (1.161) в формулу (7.15), получаем

$$Z_c = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a - j \frac{\gamma_M}{\omega}}{\epsilon_a - j \frac{\gamma_E}{\omega}}}. \quad (7.19)$$

Представив  $\tilde{\epsilon}_a$  и  $\tilde{\mu}_a$  в виде

$$\tilde{\epsilon}_a = |\tilde{\epsilon}_a| e^{-i\alpha_\epsilon}, \quad \tilde{\mu}_a = |\tilde{\mu}_a| e^{-i\alpha_\mu}, \quad (7.20)$$

где

$$|\tilde{\epsilon}_a| = \sqrt{\epsilon_a^2 + \left(\frac{\gamma_a}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\epsilon = \arctg \frac{\gamma_a}{\omega \epsilon_a}, \quad (7.21)$$

$$|\tilde{\mu}_a| = \sqrt{\mu_a^2 + \left(\frac{\gamma_\mu}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\mu = \arctg \frac{\gamma_\mu}{\omega \mu_a}, \quad (7.22)$$

находим

$$Z_c = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a| e^{-j\alpha_\mu}}{|\tilde{\epsilon}_a| e^{-j\alpha_\epsilon}}} = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}} e^{-j \frac{\alpha_\mu - \alpha_\epsilon}{2}}. \quad (7.23)$$

В среде с потерями волновое сопротивление является комплексной величиной. Углы  $\alpha_\mu$  и  $\alpha_\epsilon$  называются *углами магнитных и электрических потерь*.

Как следует из формул (7.9), (7.16), поведение плоских волн в значительной степени определяется коэффициентом распространения  $\gamma$ . С учетом выражений (7.10), (7.20) можно записать

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| e^{-j(\alpha_\mu + \alpha_\epsilon)}} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} e^{-j \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}}, \quad (7.24)$$

или

$$\gamma = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \left( \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} - j \sin \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \right). \quad (7.25)$$

Таким образом, в общем случае коэффициент распространения является комплексным. Как всякая комплексная величина, он может быть представлен суммой действительной и мнимой частей:

$$\gamma = \beta - j\alpha, \quad (7.26)$$

где

$$\beta = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \quad (7.27)$$

— фазовая постоянная, а

$$\alpha = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a|} \sin \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2} \quad (7.28)$$

— постоянная затухания, или амплитудная постоянная.

Смысл этих названий становится ясным после подстановки равенства (7.26) в какое-либо из выражений для составляющих поля, например в выражение для  $\dot{E}_x$  (7.9):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-j(\beta - j\alpha)z} + \\ &+ A_2 e^{j(\beta - j\alpha)z} = A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Из этого выражения следует, что коэффициент  $\alpha$  влияет на амплитуду составляющих поля, а коэффициент  $\beta$  определяет фазу колебания. Как видно из выражений (7.21), (7.22), для среды с потерями модули  $|\tilde{\epsilon}_a|$ ,  $|\tilde{\mu}_a|$  и углы потерь  $\alpha_\epsilon$ ,  $\alpha_\mu$  являются функциями частоты  $\omega$ . Следовательно, функцией частоты является коэффициент распространения  $\gamma$ .

Полученные решения для составляющих поля содержат два слагаемых с двумя постоянными интегрированиями. Математически это определяется тем, что решались дифференциальные уравнения второго порядка. Необходимо выяснить физический смысл каждого из слагаемых. Для этого целесообразно перейти от комплексных амплитуд к мгновенным значениям векторов поля. Такой переход может быть осуществлен с помощью формул (1.157). Положив в основу рассуждений выражение (7.29), получим

$$E_x(t) = \operatorname{Re}(\dot{E}_x e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t}) = \\ = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z). \quad (7.30)$$

Рассмотрим аргументы косинусов  $\omega t - \beta z$  и  $\omega t + \beta z$ . Зафиксируем время  $t = t_1$  и точку на оси  $z = z_1$ . Тогда первый аргумент или фаза примет значение  $\omega t_1 - \beta z_1$  и второй аргумент — соответственно  $\omega t_1 + \beta z_1$ . Давая времени  $t$  приращение  $dt$ , найдем, на какое расстояние  $dz$  переместятся точки с фазами  $\omega t_1 - \beta z_1$  и  $\omega t_1 + \beta z_1$ , т. е. потребуем соблюдения равенств:

$$\omega(t_1 + dt) - \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 - \beta z_1, \\ \omega(t_1 + dt) + \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 + \beta z_1.$$

Сокращая одинаковые члены, получаем

$$\omega dt - \beta dz = 0, \quad \omega dt + \beta dz = 0,$$

откуда

$$dz/dt = \omega/\beta \quad \text{и} \quad dz/dt = -\omega/\beta.$$

Производные  $dz/dt = v_\Phi$  представляют собой скорость перемещения фиксированного значения фазы вдоль оси  $z$ . Эту скорость называют *фазовой скоростью*. Фазовая скорость, соответствующая фазе  $\omega t - \beta z$ , определяется выражением

$$v_\Phi = \omega/\beta. \quad (7.31)$$

Эта скорость положительна, т. е. первое слагаемое в выражении (7.30) соответствует волне, распространяющейся в сторону положительных значений оси  $z$ . Это так называемая *падающая волна*. В среде с потерями амплитуда этой волны убывает по мере продвижения по закону  $e^{-\alpha z}$ .

Подставляя общее выражение для  $\beta$  (7.27) в формулу (7.31), получаем

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\epsilon + \alpha_\mu}{2}}},$$

или

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \frac{\alpha_\epsilon + \alpha_\mu}{2}}}. \quad (7.32)$$

Для среды с потерями знаменатель этого выражения зависит от частоты  $\omega$ .

Таким образом, в средах, обладающих дисперсией, фазовая скорость является функцией частоты.

Фазовая скорость, соответствующая фазе  $\omega t + \beta z$ , определяется выражением

$$v_{\phi} = -\omega/\beta. \quad (7.33)$$

Эта скорость отрицательна, т. е. второе слагаемое в выражении (7.30) соответствует волне, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси  $z$ . Это так называемая *отраженная волна*. Она возникает тогда, когда на пути падающей волны существует препятствие, отражающее всю волну или ее часть в обратном направлении. Если препятствия нет, то нет и отраженной волны. Постоянная интегрирования  $A_2$  при этом должна равняться нулю. Существует лишь одна падающая волна. При возникновении отраженной волны ее амплитуда  $A_2 e^{\alpha z_0}$ , где  $z_0$  — координата отражающего препятствия, определяется амплитудой падающей волны  $A_1 e^{-\alpha z_0}$  и условиями отражения. При этом справедливо соотношение

$$A_2 e^{\alpha z_0} = M^{\circ} A_1 e^{-\alpha z_0}. \quad (7.34)$$

Коэффициент  $M^{\circ}$ , который в общем случае является комплексной величиной, называют *коэффициентом отражения*.

В поглощающей среде амплитуда отраженной волны должна быть наибольшей у отражающего препятствия и уменьшается по мере удаления от него, т. е. по мере уменьшения координаты  $z$ . Это определяется множителем  $e^{\alpha z}$ , который имеет наибольшее значение при максимальном значении координаты  $z = z_0$ , соответствующем месту расположения отражающего препятствия. Указанный множитель уменьшается по мере уменьшения координаты  $z$ , т. е. по мере распространения отраженной волны в обратную сторону — к началу координат.

С помощью соотношения (7.34) постоянную интегрирования  $A_2$  можно выразить через постоянную  $A_1$ , если известен коэффициент отражения  $M^{\circ}$ . Тогда в выражении (7.30) для составляющей поля  $E_x$  остается неизвестной лишь одна постоянная интегрирования  $A_1$ , являющаяся амплитудной постоянной, которую принципиально невозможно определить, поскольку в исходные уравнения Гельмгольца не были введены сторонние токи.

## § 7.4. Групповая скорость

Как известно, с помощью монохроматического колебания нельзя передавать информацию. Передача информации неизбежно связана с модуляцией и спектром частот. Спектр частот может быть дискретным или непрерывным в зависимости от вида модуляции и сигнала. Скорость распространения группы электромагнитных волн, обладающих спектром частот, несущих передаваемую информацию, называют *групповой скоростью*.



**Групповая скорость в случае дискретного спектра частот.** В случае дискретного спектра частот комплексные амплитуды векторов поля содержат ряд различных частотных составляющих. Комплексная амплитуда вектора  $\dot{\mathbf{E}}_x$  падающей волны при этом с учетом выражения (7.29) записывается в виде формы

$$\dot{\mathbf{E}}_x = \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} e^{-j\beta_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} + \dots \\ \dots + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{-j\beta_n z} \quad (7.35)$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  — постоянные затухания и фазовые постоянные, определяемые формулами (7.27), (7.28) и соответствующие частотам дискретного спектра  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

Для перехода от комплексных амплитуд к мгновенным значениям векторов используют формулы вида (1.157). При этом выражение (7.35) переходит в соотношение

$$\mathbf{E}_x(t) = \text{Re} \{ \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega_1 t} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{j\omega_2 t} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{-j\beta_n z} e^{j\omega_n t} \} = \\ = \text{Re} \{ \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{j(\omega_n t - \beta_n z)} \}.$$

Выделяя в качестве множителя колебание основной частоты спектра  $\omega_0$ , получаем

$$\mathbf{E}_x(t) = \text{Re} \{ \llbracket e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \langle \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} \times \\ \times e^{j\{(\omega_1 - \omega_0)t - (\beta_1 - \beta_0)z\}} + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{j\{(\omega_2 - \omega_0)t - (\beta_2 - \beta_0)z\}} + \\ + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{j\{(\omega_n - \omega_0)t - (\beta_n - \beta_0)z\}} \rangle \rrbracket \}. \quad (7.36)$$

Вводя обозначение

$$\dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{j\{(\omega_1 - \omega_0)t - (\beta_1 - \beta_0)z\}} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{j\{(\omega_2 - \omega_0)t - (\beta_2 - \beta_0)z\}} + \dots + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{j\{(\omega_n - \omega_0)t - (\beta_n - \beta_0)z\}} = \dot{\mathbf{F}}, \quad (7.37)$$

получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_x = \text{Re} \{ \dot{\mathbf{F}} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \}. \quad (7.38)$$

Составляющие поля, несущие информацию, связаны с частотами спектра  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Эти составляющие заключены в векторе  $\dot{\mathbf{F}}$ . Определим скорость распространения этого вектора вдоль оси  $z$ .

Функцию  $\dot{\mathbf{F}}$  можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\beta_1 - \beta_0) \left( \frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} t - z \right)} + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\beta_2 - \beta_0) \left( \frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} t - z \right)} + \dots + \\ + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{j(\beta_n - \beta_0) \left( \frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} t - z \right)}, \quad (7.39)$$

где фазовая постоянная  $\beta$  определяется выражением (7.27).

В некотором приближении коэффициент  $\beta$  можно считать пропорциональным частоте  $\omega$ . Тогда при достаточно узком спектре может быть записано следующее приближенное равенство дробей:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\beta_1 - \beta_0} \approx \frac{\omega_2 - \omega_0}{\beta_2 - \beta_0} \approx \dots \approx \frac{\omega_n - \omega_0}{\beta_n - \beta_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \approx \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0, \beta=\beta_0}. \quad (7.40)$$

С некоторой степенью точности эти дроби можно приравнять производной  $d\omega/d\beta$ , взятой при  $\omega = \omega_0$ ,  $\beta = \beta_0$ . Легко определить единицы измерения этой производной:

$$\frac{d\omega}{d\beta} = \frac{m}{c}.$$

Производная  $d\omega/d\beta$  измеряется в тех же единицах, что и скорость. Вводя обозначение

$$\left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0, \beta=\beta_0} = v_{гр} \quad (7.41)$$

и используя его в выражении (7.39), получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x_0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x_1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\beta_1 - \beta_0)(v_{гр} t - z)} + \dot{\mathbf{E}}_{x_2} e^{-\alpha_2 z} e^{j(\beta_2 - \beta_0)(v_{гр} t - z)} + \dots + \dot{\mathbf{E}}_{x_n} e^{-\alpha_n z} e^{j(\beta_n - \beta_0)(v_{гр} t - z)}. \quad (7.42)$$

Зависимость функции  $\dot{\mathbf{F}}$ , заключающей в себе передаваемую информацию, от координаты  $z$  определяется разностью  $v_{гр} t - z$ .

Зафиксируем время  $t = t_1$  и точку на оси  $z = z_1$ . Тогда разность  $v_{гр} t - z$  получит определенное значение  $v_{гр} t_1 - z_1$ . Дадим времени  $t_1$  приращение  $dt$  и определим новое положение точки на оси  $z + dz$ , при котором значение разности останется прежним. Для этого составим равенство

$$v_{гр}(t_1 + dt) - (z_1 + dz) = v_{гр} t_1 - z_1,$$

откуда

$$v_{гр} dt = \widetilde{dz}, \quad dz/dt = v_{гр}. \quad (7.43)$$

Таким образом,  $v_{гр}$  определяет скорость перемещения фиксированных значений функции  $\dot{\mathbf{F}}$  вдоль оси  $z$ . Говоря иначе,  $v_{гр}$  определяет скорость перемещения вдоль оси  $z$  группы составляющих спектра частот, несущего информацию. Поэтому величина  $v_{гр}$  получила название групповой скорости.

Фазовая скорость определяется соотношением (7.31). Если среда не обладает дисперсией, то фазовая скорость не зависит от частоты  $\omega$ . При этом для частот спектра  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  справедливо соотношение

$$v_{\phi} = \text{const} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = \frac{\omega_1}{\beta_1} = \frac{\omega_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\omega_n}{\beta_n}, \quad (7.44)$$

откуда

$$\omega_0 = v_{\phi} \beta_0, \quad \omega_1 = v_{\phi} \beta_1, \quad \omega_2 = v_{\phi} \beta_2, \quad \dots, \quad \omega_n = v_{\phi} \beta_n. \quad (7.45)$$

Подставляя выражение (7.45) в (7.40), получаем

$$\frac{v_{\Phi}(\beta_1 - \beta_0)}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{v_{\Phi}(\beta_2 - \beta_0)}{\beta_2 - \beta_0} = \dots = \frac{v_{\Phi}(\beta_n - \beta_0)}{\beta_n - \beta_0} = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = v_{\text{гp}}.$$

Отсюда следует, что  $v_{\Phi} = v_{\text{гp}}$ , т. е. в среде, не обладающей дисперсией, групповая скорость равна фазовой скорости.

**Групповая скорость в случае непрерывного спектра частот.** В случае непрерывного спектра частот векторы поля могут быть представлены с помощью обратного преобразования Фурье (1.29). Для плоской волны аргумент  $\omega t$  в показателе степени заменяется на  $\omega t - \beta z$  и обратное преобразование Фурье записывается в форме

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega. \quad (7.46)$$

В случае диспергирующей среды фазовая постоянная  $\beta$  является функцией частоты  $\omega$ . В силу этого  $\beta$  может быть разложена в ряд относительно основной частоты  $\omega_0$ . Если спектр узкий, то в разложении можно ограничиться двумя первыми членами ряда:

$$\beta \approx \beta_0 + \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right) \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} (\omega - \omega_0). \quad (7.47)$$

Используя соотношение (7.41), получаем

$$\beta \approx \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}. \quad (7.48)$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{j(\omega t - \beta z)} &= e^{j\left(\omega_0 t - \omega_0 t + \omega t - \beta_0 z - \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}} z\right)} = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\left(\omega t - \omega_0 t - \frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}} z\right)} = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{v_{\text{гp}}}\right)} = \\ &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}(v_{\text{гp}} t - z)}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Подставим соотношение (7.49) в (7.46)

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гp}}}(v_{\text{гп}} t - z)} d\omega. \quad (7.50)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{\text{гп}}}(v_{\text{гп}} t - z)} d\omega = \mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z). \quad (7.51)$$

Тогда выражение (7.50) можно представить в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}.$$

Функция  $\mathbf{F}_1(v_{\text{гп}} t - z)$  играет роль амплитуды колебания, несущей информацию.

Точки фиксированного значения функции  $F_1(v_{гр}t - z)$  перемещаются вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_{гр}$ .

Таким образом, в случае дискретного и непрерывного спектров частот скорость передачи информации вдоль оси  $z$  равна групповой скорости, определяемой формулой (7.41).

### § 7.5. Распространение плоских волн в различных средах

Рассмотрим распространение плоских волн в трех характерных средах: вакууме, среде с потерями и металле.

**Распространение плоских волн в вакууме.** В вакууме  $\tilde{\mu}_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  Ф/м

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \beta, \quad \alpha = 0. \quad (7.52)$$

Таким образом, в вакууме плоская волна не испытывает затухания. Фазовая скорость

$$v_\phi = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c_0, \quad (7.53)$$

где  $c_0$  — скорость света в вакууме.

В вакууме фазовая скорость равна скорости света и не зависит от частоты, следовательно, вакуум является недиспергирующей средой. Групповая скорость

$$v_{гр} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \left. \frac{1}{d\beta/d\omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{d/d\omega (\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0})} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = v_\phi.$$

В вакууме, как и должно быть, в случае недиспергирующей среды групповая скорость равна фазовой скорости.

Если вакуум заменен идеальным диэлектриком с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ , то коэффициент распространения

$$\gamma = \beta = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}, \quad (7.54)$$

а фазовая и групповая скорости равны друг другу:

$$v_\phi = v_{гр} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu \epsilon}} = c. \quad (7.55)$$

Здесь  $c$  — скорость света в среде с параметрами  $\mu_a, \epsilon_a$ .

**Распространение плоских волн в среде с потерями.** Для среды с потерями справедливы соотношения (7.27), (7.28). Электромагнитная волна испытывает затухание, определяемое величиной потерь.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}}}. \quad (7.56)$$

Поскольку все величины в формуле (7.56) являются функциями частоты, фазовая скорость также является функцией частоты, что указывает на существование дисперсии.

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}}} = \frac{1}{d/d\omega \left( \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\epsilon}_a| \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\epsilon}{2}} \right)} \quad (\text{при } \omega = \omega_0). \quad (7.57)$$

Групповая скорость в этом случае не равна фазовой. Зависимость фазовой скорости от частоты приводит к различным скоростям распространения фазы составляющих частотного спектра, в результате чего сигнал в среде с потерями испытывает искажения.

В дальнейшем будет показана возможность существования электродинамических сред, не обладающих потерями, но являющихся диспергирующими.

**Распространение плоских волн в металлах.** Для хорошо проводящих металлов, даже при самых высоких частотах, используемых в настоящее время в радиотехнике, соблюдается неравенство

$$\gamma_a / \omega \gg \epsilon_a = \epsilon_0. \quad (7.58)$$

Покажем справедливость этого утверждения, взяв в качестве примера медь и колебание с длиной волны  $\lambda = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$ .

Для меди ( $\gamma_a \approx 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ )

$$\frac{\gamma_a}{\omega} = \frac{5 \cdot 10^7}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^{11}} = 2,65 \cdot 10^{-5} \gg \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}.$$

Таким образом, с большой степенью точности можно считать, что

$$\tilde{\epsilon}_a = -j \frac{\gamma_a}{\omega}. \quad (7.59)$$

Тогда постоянная распространения при  $\tilde{\mu}_a = \mu_a$ :

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_a \left( -j \frac{\gamma_a}{\omega} \right)} = \sqrt{-j \omega \mu_a \gamma_a}.$$

Так как  $-j = e^{-j \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2}$ , то

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a e^{-j \frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} e^{-j \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} \left( \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{\omega \mu_a \gamma_a} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}} (1 - j). \quad (7.60)$$

Для металлов справедливо равенство

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}}. \quad (7.61)$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \gamma_a}}. \quad (7.62)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left( \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_a}{2}} \right)} \quad (\text{при } \omega = \omega_0),$$

или после дифференцирования

$$v_{гр} = 2 \sqrt{\frac{2\omega_0}{\mu_a \gamma_a}}. \quad (7.63)$$

Таким образом, групповая скорость в два раза выше фазовой. При

$$\gamma_a \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (7.64)$$

В идеально проводящем металле затухание поля бесконечно велико, вследствие чего поле равно нулю. При

$$\gamma_a \rightarrow \infty \quad \mathbf{E}; \mathbf{H} \rightarrow 0. \quad (7.65)$$

На основании соотношения (7.58) в металле можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости и первое уравнение Максвелла (2.12) записать в виде

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{j}_a + j\omega \left( \epsilon_0 - j \frac{\gamma_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} \approx \mathbf{j}_a + \gamma_a \dot{\mathbf{E}}. \quad (7.66)$$

Рассматривая в качестве поля  $\dot{\mathbf{H}}$  составляющую  $\dot{\mathbf{H}}_y$  падающей волны (7.17), можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y &= 1y \frac{A_1}{Z_c} e^{-i\gamma z}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_y &= -1_x \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_y}{\partial z} = \frac{-1_x A_1}{Z_c} (-j) \gamma e^{-i\gamma z}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Подставляя значение  $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_y$  в уравнение (7.66), получаем

$$j \frac{A_1}{Z_c} \gamma e^{-i\gamma z} = j_{ax} + \gamma_a \dot{E}_x,$$

или

$$j \frac{A_1}{Z_c} (\beta - j\alpha) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x. \quad (7.68)$$

В правой части выражения (7.68) находится сумма плотностей стороннего электрического тока и тока проводимости. Плотности тока убывают, так же как и поле, по закону  $e^{-\alpha z}$ . Однако в силу того, что в левой части  $\alpha$  является множителем, невозможно сразу сказать, как будут изменяться плотности токов при стремлении  $\alpha$  к бесконечности в идеальном металле.

Для выяснения поведения плотностей токов преобразуем выражение (7.68). Прежде всего с помощью выражений (7.15) и (7.59) определим вид характеристического сопротивления  $Z_c$  для металлов:

$$Z_c = Z_m \sqrt{\frac{\bar{\mu}_a}{\bar{\epsilon}_a}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{-j \frac{\gamma_{\text{э}}}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j \mu_a \omega}{\gamma_{\text{э}}}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2 \gamma_{\text{э}}}} (1 + j). \quad (7.69)$$

С учетом выражений (7.69) и (7.61) соотношение (7.68) можно переписать в виде

$$j \frac{A_1}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2 \gamma_{\text{э}}}} (1 + j)} \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} (1 - j) e^{-\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} e^{-j\beta z} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x,$$

или

$$j \frac{A_1 (1 - j) e^{-j\beta z} \gamma_{\text{э}}}{(1 + j) e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} = j_{\text{эx}} + \gamma_{\text{э}} \dot{E}_x. \quad (7.70)$$

В случае идеального металла  $\gamma_{\text{э}}$  стремится к бесконечности. К бесконечности стремится числитель и знаменатель левой части выражения (7.70). Раскроем неопределенность в выражении

$e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}$  по правилу Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{\text{э}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} &= \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\gamma_{\text{э}}} (\gamma_{\text{э}})}{\frac{d}{d\gamma_{\text{э}}} e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z}} = \\ &= \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2}} \frac{1}{2 \sqrt{\gamma_{\text{э}}}}} = \lim_{\gamma_{\text{э}} \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt{\gamma_{\text{э}}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma_{\text{э}}}{2}} z} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2}}}. \end{aligned}$$

Применяя правило Лопиталья повторно, получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{\gamma_a}}{e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z} &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\gamma_a}(2\sqrt{\gamma_a})}{\frac{d}{d\gamma_a}\left(e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z\right)} = \\
 &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma_a}e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\frac{\omega\mu_a}{2}z^2\frac{1}{2\sqrt{\gamma_a}}} = \\
 &= \lim_{\gamma_a \rightarrow \infty} \frac{2}{e\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_a}{2}}z\frac{\omega\mu_a}{2}z^2} = 0. \quad (7.71)
 \end{aligned}$$

Таким образом, раскрытие неопределенности в левой части выражения (7.70) показывает, что плотности токов в идеальном металле стремятся к нулю при любом сколь угодно малом значении  $z$ , и при стремлении  $z$  к нулю плотности токов возрастают до бесконечности. Другими словами, в идеальном металле ток протекает в слое нулевой толщины и его плотность бесконечно велика. Это явление называют *поверхностным эффектом* или *скин-эффектом*.

Рассматривая распространение электромагнитного поля в реальных металлах, вводят понятие глубины проникновения поля в металл, под которой понимают расстояние, обеспечивающее затухание поля в  $e=2,718$  раз. Математически это условие можно выразить таким образом:  $e^{-\alpha d} = \frac{1}{e} = e^{-1}$ , откуда для глубины проникно-

вения  $d$  можно записать [см. выражение (7.61)]

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma_a}}. \quad (7.72)$$

## § 7.6. Поляризация плоских волн

Под поляризацией понимают закон изменения направления и величины вектора напряженности электрического поля в данной точке пространства за период колебания. Взяв за основу падающую волну, определим возможные случаи поляризации плоских волн.

На основании соотношений (7.9) запишем следующие выражения для составляющих поля падающей волны:

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-i\gamma z}, \quad \dot{E}_y = B_1 e^{-i\gamma z}.$$

Постоянные  $A_1$  и  $B_1$  могут быть комплексными величинами, т. е.

$$A_1 = |A_1| e^{i\varphi_x}, \quad B_1 = |B_1| e^{i\varphi_y}.$$

В среде с потерями коэффициент распространения является комплексным, вследствие чего составляющие поля записываются в виде



$$\dot{E}_x = |A_1| e^{i\varphi_x} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}, \quad \dot{E}_y = |B_1| e^{i\varphi_y} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, получаем

$$\begin{aligned} E_x(t) &= |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x), \\ E_y(t) &= |B_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Введем обозначения

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_y, \quad \psi = \omega t - \beta z. \quad (7.74)$$

Разделив выражения (7.73) на модули  $|A_1|$ ,  $|B_1|$  и используя обозначения (7.74), получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_x(t)}{|A_1|} &= e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x), \\ \frac{E_y(t)}{|B_1|} &= e^{-\alpha z} \cos\{(\psi + \varphi_x) - \varphi\} = \\ &= e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x) \cos \varphi + e^{-\alpha z} \sin(\psi + \varphi_x) \sin \varphi = \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \\ &+ e^{-\alpha z} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi \times \\ &\times \frac{E_y(t)}{|B_1|} - \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi = e^{-\alpha z} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2} e^{2\alpha z} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Возводя это выражение в квадрат, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \cos^2 \varphi = \\ = e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos \varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 - \\ - e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Составляющие  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$  вектора напряженности электрического поля можно рассматривать как координаты конца вектора  $\mathbf{E}(t)$  на плоскости  $xy$ . Положение этого вектора определяет характер поляризации поля. Упростим запись выражения (7.75) путем введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned} E_y(t) = y, \quad E_x(t) = x, \quad \frac{1}{|B_1|^2} = \alpha_1, \quad -\frac{1}{|B_1|} \cdot \frac{1}{|A_1|} \cos \varphi = \alpha_2, \\ \frac{1}{|A_1|^2} = \alpha_3, \quad -e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi = \alpha_4. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Тогда выражение (7.75) запишется как

$$\alpha_1 y^2 + 2\alpha_2 yx + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 = 0. \quad (7.77)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение кривой второго порядка в координатах  $y = E_y(t)$  и  $x = E_x(t)$ . Таким образом, в общем случае конец вектора  $\mathbf{E}(t)$  перемещается по кривой второго порядка. В аналитической геометрии показывается, что характер этой кривой определяется знаком детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 = \frac{1}{(|B_1| |A_1|)^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{(|B_1| |A_1|)^2}. \quad (7.78)$$

Если детерминант больше нуля, то кривая представляет собой эллипс или, в частном случае, окружность. Если детерминант равен нулю, то эллипс вырождается в прямую линию.

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) 0 < |\varphi| < \pi/2 \text{ или } 0 < |\varphi_x - \varphi_y| < \pi/2. \quad (7.79)$$

Детерминант больше нуля, конец вектора  $\mathbf{E}(t)$  перемещается по эллипсу, возникает эллиптическая поляризация. Составляющие  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$  вектора  $\mathbf{E}(t)$  изменяются, как видно из выражения (7.73), в результате изменения времени  $t$  и координаты  $z$ . И то и другое вызывает вращение вектора  $\mathbf{E}(t)$  по эллипсу (рис. 7.1 и 7.2). В поглощающей среде при  $\alpha \neq 0$  размеры эллипса по мере продвижения вдоль оси  $z$  уменьшаются.

$$2) |\varphi| = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{|B_1|} = \frac{1}{|A_1|}. \quad (7.80)$$

Уравнение (7.75) записывается в форме

$$E_y^2(t) + E_x^2(t) = |A_1|^2 e^{-2\alpha z}. \quad (7.81)$$

Это уравнение представляет собой уравнение окружности. В непоглощающей среде при  $\alpha = 0$  радиус окружности постоянен. В поглощающей среде радиус окружности, равный  $|A_1| e^{-\alpha z}$ , уменьшается с продвижением вдоль оси  $z$ . Возникает круговая поляризация, конец вектора  $\mathbf{E}(t)$  при изменении времени  $t$  и координаты  $z$  вра-

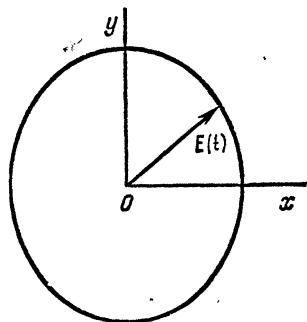


Рис. 7.1

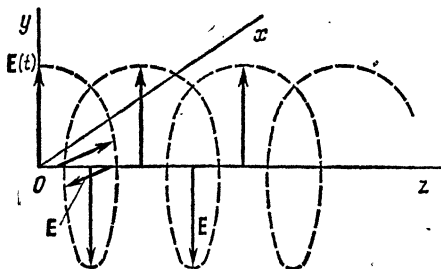


Рис. 7.2

щается по окружности.

$$3) \varphi = 0. \quad (7.82)$$

Уравнение (7.75) записывается в виде

$$\left( \frac{E_y(t)}{|B_1|} \right)^2 - 2 \frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} + \left( \frac{E_x(t)}{|A_1|} \right)^2 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_y(t)}{|B_1|} - \frac{E_x(t)}{|A_1|} \right)^2 &= 0, \\ E_y(t) &= \frac{|B_1|}{|A_1|} E_x(t). \end{aligned} \quad (7.83)$$

Это уравнение является уравнением прямой линии, наклон которой к осям определяется угловым коэффициентом  $\frac{|B_1|}{|A_1|}$ . При этом вектор  $\mathbf{E}(t)$  неподвижен в пространстве при изменении времени  $t$  и координаты  $z$ . Возникает линейная поляризация.

### § 7.7. Ортогональность векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$

Составляющие поля падающей плоской волны можно найти с помощью соотношений (7.9), (7.16), (7.17):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= A_1 e^{-i\nu z}, \quad \dot{E}_y = B_1 e^{-i\nu z}, \\ \dot{H}_x &= -\frac{B_1}{Z_c} e^{-i\nu z}, \quad \dot{H}_y = \frac{A_1}{Z_c} e^{-i\nu z}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Для поглощающей среды справедливы формулы (7.23), (7.26). Амплитуды  $A_1$  и  $B_1$  могут быть комплексными:

$$A_1 = |A_1| e^{i\varphi_A}, \quad B_1 = |B_1| e^{i\varphi_B}. \quad (7.85)$$

Тогда для комплексных амплитуд векторов  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  можно записать

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_x |A_1| e^{i\varphi_A} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} + \mathbf{1}_y |B_1| e^{i\varphi_B} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}, \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} = & -\mathbf{1}_x \frac{|B_1| e^{i\varphi_B}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{j \frac{\alpha \mu - \alpha \epsilon}{2}} + \\ & + \mathbf{1}_y \frac{|A_1| e^{i\varphi_A}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\epsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z} e^{j \frac{\alpha \mu - \alpha \epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Умножив комплексные амплитуды на  $e^{j\omega t}$  и взяв действительные части, получаем мгновенные значения векторов поля:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{1}_x |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) + \mathbf{1}_y |B_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B), \quad (7.88)$$

$$\mathbf{H}(t) = -\mathbf{1}_x \frac{|B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{1}_y \frac{|A_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \quad (7.89)$$

Для определения ортогональности векторов  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  достаточно написать их скалярное произведение. Если скалярное произведение равно нулю, то векторы ортогональны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= -\frac{|A_1| |B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) \times \\ &\times \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \frac{|A_1| |B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \times \\ &\times \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B) \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.90)$$

Так как  $\cos \psi_1 \cos \psi_2 = \frac{1}{2} \{ \cos(\psi_1 - \psi_2) + \cos(\psi_1 + \psi_2) \}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= \frac{|A_1| |B_1|}{2 \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \left\{ -\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) - \right. \\ &- \cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_A + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(\varphi_B - \varphi_A - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \\ &\left. + \cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_B + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) \right\}, \\ \mathbf{E}(t) \mathbf{H}(t) &= \frac{|A_1| |B_1|}{2 \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \left\{ -\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \cos\left(\varphi_B - \varphi_A - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Поскольку  $\cos$  является четной функцией, из выражения (7.91) следует, что скалярное произведение равно нулю и мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  ортогональны в следующих случаях:

- а) в среде нет потерь:  $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon = 0$ ;
- б) потери таковы, что  $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon$  и  $(\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon)/2 = 0$ ;
- в) фазы амплитуд одинаковы:  $\varphi_A = \varphi_B$ .