ГЛАВА 8
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

§ 8.1. Постановка вопроса

При решении практических задач приходится постоянно сталкиваться с ситуацией, когда параметры среды скачкообразно изменяются от одних значений до других. Подобная ситуация возникает при введении в однородную среду диэлектрических, полупроводящих и металлических поверхностей, при передаче электромагнитных волн с помощью волноводов, при решении задачи радиолокации и во многих других случаях. Следует ожидать, что скачкообразное изменение параметров среды может повлечь за собой такое же изменение векторов поля, что в свою очередь вызовет появление бесконечно больших производных этих векторов по координатам. При этом значение роторов векторов поля, входящих в уравнения Максвелла, станут бесконечно большими и непосредственное использование этих уравнений для решения электродинамических задач будет затруднено.

Очевидно, необходимо знать законы поведения векторов поля на границе раздела двух сред, так называемые граничные условия. Эти законы выводят из уравнений электродинамики с помощью следующего приема. Границу раздела двух сред полагают обладающей некоторой малой толщиной, в пределах которой происходит не скачкообразный, а непрерывный переход от параметров первой среды к параметрам второй среды. Такое же непрерывное изменение происходит и с векторами поля. При этих допущениях проводят анализ процесса, используя имеющиеся уравнения электродинамики. Далее, устремляя толщину границы раздела к нулю, осуществляют предельный переход и получают граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границе раздела.

Поскольку любой вектор поля, произвольно ориентируемый относительно границы раздела, можно представить в виде суммы нормальной к границе и тангенциальной к ней составляющих, анализ осуществляют раздельно для нормальных и тангенциальных составляющих поля, что существенно облегчает задачу.

§ 8.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля

Рассмотрим границу раздела двух сред, первая из которых обладает параметрами $\tilde{\mu}_{a1}$, $\tilde{\varepsilon}_{a1}$, а вторая — параметрами $\tilde{\mu}_{a2}$, $\tilde{\varepsilon}_{a2}$. Допустим, что толщина границы раздела равна Δd (рис. 8.1).

В этой границе выделим небольшой объем высотой Δd с площадью верхнего и нижнего оснований ΔS. Пусть единичной нормалью к верхнему основанию является $\mathbf{1}_{n1}$, а единичной нормалью к нижнему основанию $\mathbf{1}_{n2}$. В основу рассуждений положим интегральное соотношение (1.165).

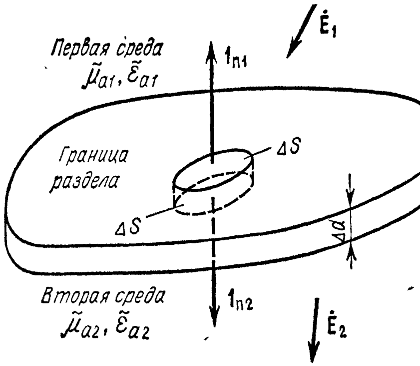

Рис. 8.1

В качестве поверхности S_1 возьмем замкнутую поверхность, ограничивающую объем, расположенный в границе. Значение вектора $\dot{\mathbf{E}}$ в первой среде полагаем равным $\dot{\mathbf{E}}_1$, значение вектора $\dot{\mathbf{E}}$ во второй среде — $\dot{\mathbf{E}}_2$. В силу малости площадей оснований ΔS считаем, что в пределах этих оснований векторы $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$ можно считать неизменными.

При этих условиях выражение (1.165) может быть записано в форме

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (\tilde{\varepsilon}_{a1} \dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\varepsilon}_{a2} \dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2})\, \Delta S + \psi_{E6} = \dot{Q}_э,$$

где ψ_{E6} — доля потока, проходящего через боковую часть поверхности S_1.

При $\Delta d \to 0$ $\psi_{E6} \to 0$, и для бесконечно тонкой границы раздела справедливо соотношение

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (\tilde{\varepsilon}_{a1} \dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\varepsilon}_{a2} \dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2})\, \Delta S = \dot{Q}_э.$$

При выбранном на рис. 8.1 направлении векторов $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$ можно написать

$$\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} = -\dot{E}_{1n}, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2} = \dot{E}_{2n}.$$

Тогда

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (-\tilde{\varepsilon}_{a1} \dot{E}_{1n} + \tilde{\varepsilon}_{a2} \dot{E}_{2n})\, \Delta S = \dot{Q}_э,$$

откуда

$$-\tilde{\varepsilon}_{a1} \dot{E}_{1n} + \tilde{\varepsilon}_{a2} \dot{E}_{2n} = \dot{Q}_э / \Delta S = \dot{\sigma}_э. \tag{8.1}$$

Легко определить единицы измерения $\dot{\sigma}_э$:

$$\dot{\sigma}_э \to \text{Кл/м}^2. \tag{8.2}$$

Величину $\dot{\sigma}_э$ называют *комплексной амплитудой поверхностной плотности сторонних электрических зарядов.*

Выражение (8.1) является граничным условием для векторов $\dot{\mathbf{E}}_{1n}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{2n}$.

Если на границе раздела нет поверхностной плотности электрических зарядов ($\dot{\sigma}_э = 0$), то

$$\tilde{\varepsilon}_{a2} \dot{E}_{2n} = \tilde{\varepsilon}_{a1} \dot{E}_{1n}, \tag{8.3}$$

или

$$\dot{E}_{2n}/\dot{E}_{1n}=\tilde{\varepsilon}_{a1}/\tilde{\varepsilon}_{a2}. \quad (8.4)$$

В общем случае нормальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$ при переходе через границу раздела испытывают скачкообразные изменения.

Применяя свойство перестановочной двойственности электродинамических уравнений в выражении (8.1):

$$\dot{E}_{1n}\to\dot{H}_{1n},\ \dot{E}_{2n}\to\dot{H}_{2n},\ \tilde{\varepsilon}_{a1}\to-\tilde{\mu}_{a1},$$
$$\tilde{\varepsilon}_{a2}\to-\tilde{\mu}_{a2},\ \dot{Q}_{э}\to-\dot{Q}_{м},\ \dot{\sigma}_{э}\to-\dot{\sigma}_{м},$$

получим следующие граничные условия для нормальных составляющих векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$:

$$-\tilde{\mu}_{a1}\dot{H}_{1n}+\tilde{\mu}_{a2}\dot{H}_{2n}=\dot{Q}_{м}/\Delta S=\dot{\sigma}_{м}. \quad (8.5)$$

Определим единицу измерения $\dot{\sigma}_{м}$:

$$\dot{\sigma}_{м}\to\frac{В\cdot с}{м^2}. \quad (8.6)$$

Величину $\dot{\sigma}_{м}$ называют *комплексной амплитудой поверхностной плотности сторонних магнитных зарядов.*

При отсутствии на границе раздела поверхностной плотности магнитных зарядов ($\dot{\sigma}_{м}=0$) выражение (8.5) записывается в виде

$$\dot{H}_{2n}/\dot{H}_{1n}=\tilde{\mu}_{a1}/\tilde{\mu}_{a2}. \quad (8.7)$$

В общем случае нормальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ при переходе через границу раздела испытывают скачкообразные изменения.

§ 8.3. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля

Рассмотрим боковую часть граничной поверхности толщиной Δd (рис. 8.2). В основу рассуждений положим интегральное соотношение (1.160).

В качестве контура обхода l_1 выберем малый контур со сторонами Δd и Δh. Введем тангенциальные к границе раздела единичные векторы $\mathbf{1}_{\tau1}$ и $\mathbf{1}_{\tau2}$ и нормальный к плоскости контура обхода единичный вектор $\mathbf{1}_n$. Кроме того, введем единичный вектор $\mathbf{1}_{n1}$, направленный в сторону первой среды и нормальный к границе раздела. В силу малости контура обхода положим неизменными векторы $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ в пределах сторон Δh контура обхода. Запишем выражение (1.160) при принятых допущениях:

$$\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}\,d\mathbf{l}=(\dot{\mathbf{H}}_1\mathbf{1}_{\tau1}+\dot{\mathbf{H}}_2\mathbf{1}_{\tau2})\,\Delta h+\Psi_{\Delta d}=(\dot{\mathbf{J}}_{э}+j\omega\tilde{\varepsilon}_{a}\dot{\mathbf{E}})\,\Delta d\,\Delta h\mathbf{1}_n,$$

где $\Psi_{\Delta d}$—доля интеграла при обходе сторон Δd контура обхода.

При $\Delta d \to 0$ $\Psi_{\Delta d} \to 0$ и интеграл

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{l} = (\dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{1}_{\tau 1} + \dot{\mathbf{H}}_2 \mathbf{1}_{\tau 2})\, \Delta h = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega \tilde{\varepsilon}_а \dot{\mathbf{E}})\, \Delta d\, \Delta h \mathbf{1}_n.$$

При принятых на рис. 8.2 направлениях векторов поля можно написать равенства

$$\dot{\mathbf{H}}_1 \mathbf{1}_{\tau 1} = \dot{H}_{1\tau}, \quad \dot{\mathbf{H}}_2 \mathbf{1}_{\tau 2} = -\dot{H}_{2\tau},$$

где $\dot{H}_{1\tau}$, $\dot{H}_{2\tau}$ — тангенциальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_2$.

Раскрывая выражение для $\tilde{\varepsilon}_а$ с помощью формулы (1.159), получаем

$$\dot{H}_{1\tau} - \dot{H}_{2\tau} = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega \varepsilon_а \dot{\mathbf{E}} + \gamma_э \dot{\mathbf{E}})\, \Delta d \mathbf{1}_n. \tag{8.8}$$

Функция $j\omega\varepsilon_а \dot{\mathbf{E}}$ всегда конечна в силу ограниченности частоты $\tilde{\omega}$ и вектора $\dot{\mathbf{E}}$, поэтому

$$\lim_{\Delta d \to 0} (j\omega\varepsilon_а \dot{\mathbf{E}})\, \Delta d \mathbf{1}_n = 0.$$

При конечных значениях вектора плотности тока $\dot{\mathbf{J}}_э$ и проводимости $\gamma_э$, что соответствует всем возможным средам, за исключением идеальной металлической среды, справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_э + \gamma_э \dot{\mathbf{E}})\, \Delta d \mathbf{1}_n = 0$$

и граничные условия для тангенциальных составляющих векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ записываются в форме

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}. \tag{8.9}$$

Тангенциальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_2$ при переходе через границу раздела не испытывают изменений. В идеально проводящей среде вследствие поверхностного эффекта (см. § 7.5) плотности стороннего электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_э$ и тока проводимости $\gamma_э \dot{\mathbf{E}}$ возрастают до бесконечности:

$$\lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_э + \gamma_э \dot{\mathbf{E}})\, \Delta d \mathbf{1}_n = \dot{\nu}_э + \dot{\nu}_{эп} = \dot{\nu}_{э\Sigma}. \tag{8.10}$$

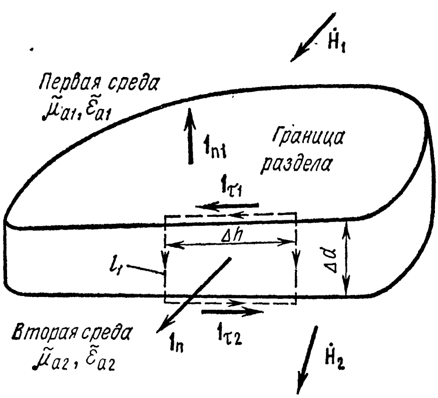

Рис. 8.2

Здесь $\dot{\nu}_э$ — комплексная амплитуда плотности поверхностного стороннего электрического тока; $\dot{\nu}_{эп}$ — комплексная амплитуда плотности поверхностного электрического тока проводимости; $\dot{\nu}_{э\Sigma}$ — комплексная амплитуда плотности суммарного поверхностного электрического тока.

Легко установить единицы измерения плотностей поверхностных токов:

$$\dot{\nu}_{э},\ \dot{\nu}_{эп},\ \dot{\nu}_{э\Sigma} \to \frac{А \cdot м}{м^2} = \frac{А}{м}. \tag{8.11}$$

Для идеальной металлической среды, как было показано в § 7.5, поле в металле равно нулю, что соответствует выражению

$$\dot{H}_{2\tau} = 0. \tag{8.12}$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих (8.8) в случае, если вторая среда является идеальным металлом, записываются таким образом:

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{\nu}_{э} + \dot{\nu}_{эп} = \dot{\nu}_{э\Sigma}. \tag{8.13}$$

Если стороннего электрического тока нет, то справедливо соотношение

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{\nu}_{эп}. \tag{8.14}$$

Учитывая, что ток и созданное им поле связаны правилом правоходового винта, выражение (8.13) можно записать в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [(\dot{\boldsymbol{\nu}}_{э} + \dot{\boldsymbol{\nu}}_{эп})\,\mathbf{1}_{n1}] = [\dot{\boldsymbol{\nu}}_{э\Sigma}\mathbf{1}_{n1}] \tag{8.15}$$

и при отсутствии стороннего тока

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [\dot{\boldsymbol{\nu}}_{эп}\mathbf{1}_{n1}]. \tag{8.16}$$

Использование перестановок вида

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} \to \dot{\mathbf{E}}_{1\tau},\ \dot{\mathbf{H}}_{2\tau} \to \dot{\mathbf{E}}_{2\tau},\ \dot{\nu}_{э} \to -\dot{\nu}_{м},$$
$$\dot{\nu}_{эп} \to -\dot{\nu}_{мп},\ \dot{\nu}_{э\Sigma} \to -\dot{\nu}_{м\Sigma},$$

где

$$\dot{\nu}_{м} = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_{м}\,\Delta d\mathbf{1}_{n}), \tag{8.17}$$

$$\dot{\nu}_{мп} = \lim_{\Delta d \to 0} (\gamma_{м}\dot{\mathbf{H}}\,\Delta d\mathbf{1}_{n}), \tag{8.18}$$

дает граничные условия для тангенциальных составляющих векторов электрического поля $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$.

Для всех сред, за исключением воображаемых сред с бесконечной магнитной проводимостью $\gamma_{м}$ и случая введения в расчет плотности стороннего тока $\dot{\nu}_{м}$, справедливы граничные условия, получаемые в результате перестановок вида (8.9):

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}. \tag{8.19}$$

Тангенциальные составляющие электрического поля при переходе через границу раздела не испытывают изменений.

При введении в расчет стороннего магнитного тока и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью $\gamma_м$ (что является удобным искусственным допущением для полного применения принципа перестановочной двойственности) в результате перестановок вида (8.13) можно записать соотношение

$$\dot{E}_{1\tau} = -\dot{\nu}_м - \dot{\nu}_{мп} = -\dot{\nu}_{м\Sigma}. \qquad (8.20)$$

Если, как часто бывает, сторонний магнитный ток в расчет не введен и среда обладает конечной магнитной и бесконечно большой электрической проводимостями ($\gamma_э \to \infty$), то

$$\dot{E}_{1\tau} = 0, \qquad (8.21)$$

поскольку при $\gamma_э \to \infty$ $\dot{E}_{2\tau} = 0$ и поля во второй среде нет.

У поверхности идеального металла не может быть тангенциальных составляющих электрического поля при отсутствии стороннего магнитного тока.

Таким образом, если вторая среда представляет собой идеальный металл, у ее поверхности существуют только нормальная составляющая поля $\dot{\mathbf{E}}$ и тангенциальная составляющая поля $\dot{\mathbf{H}}$. Вектор Пойнтинга (4.28) ориентирован при этом вдоль границы раздела первой среды с идеальной металлической средой.

Аналогично соотношению (8.14) граничные условия для металла (8.18) при введении в расчет сторонних магнитных токов и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью можно записать в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = [\mathbf{1}_{n1}(\dot{\mathbf{v}}_м + \dot{\mathbf{v}}_{мп})] = [\mathbf{1}_{n1}\dot{\mathbf{v}}_{м\Sigma}]. \qquad (8.22)$$

ГЛАВА 9

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД КАК ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ 9.1. Постановка вопроса

Пространство, состоящее из двух сред с различными параметрами, разделенных плоской границей раздела, является простейшей неоднородной средой со скачкообразным изменением свойств. Электродинамические задачи для таких сред решают с помощью граничных условий, выведенных в гл. 8.

Подобные задачи называют граничными или краевыми. Простейшей краевой задачей, рассматриваемой в настоящей главе, является падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред.