

Тангенциальные составляющие электрического поля при переходе через границу раздела не испытывают изменений.

При введении в расчет стороннего магнитного тока и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью γ_m (что является удобным искусственным допущением для полного применения принципа перестановочной двойственности) в результате перестановки вида (8.13) можно записать соотношение

$$\dot{E}_{1\tau} = -\dot{v}_m - \dot{v}_{mp} = -\dot{v}_{m\Sigma}. \quad (8.20)$$

Если, как часто бывает, сторонний магнитный ток в расчет не введен и среда обладает конечной магнитной и бесконечно большой электрической проводимостями ($\gamma_s \rightarrow \infty$), то

$$\dot{E}_{1\tau} = 0, \quad (8.21)$$

поскольку при $\gamma_s \rightarrow \infty$ $\dot{E}_{2\tau} = 0$ и поля во второй среде нет.

У поверхности идеального металла не может быть тангенциальных составляющих электрического поля при отсутствии стороннего магнитного тока.

Таким образом, если вторая среда представляет собой идеальный металл, у ее поверхности существуют только нормальная составляющая поля \dot{E} и тангенциальная составляющая поля \dot{H} . Вектор Пойнтинга (4.28) ориентирован при этом вдоль границы раздела первой среды с идеальной металлической средой.

Аналогично соотношению (8.14) граничные условия для металла (8.18) при введении в расчет сторонних магнитных токов и воображаемой среды с бесконечной магнитной проводимостью можно записать в векторной форме:

$$\dot{E}_{1\tau} = [I_{n1}(\dot{v}_m + \dot{v}_{mp})] = [I_{n1}\dot{v}_{m\Sigma}]. \quad (8.22)$$

ГЛАВА 9

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД КАК ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ 9.1. Постановка вопроса

Пространство, состоящее из двух сред с различными параметрами, разделенных плоской границей раздела, является простейшей неоднородной средой со скачкообразным изменением свойств. Электродинамические задачи для таких сред решают с помощью граничных условий, выведенных в гл. 8.

Подобные задачи называют граничными или краевыми. Простейшей краевой задачей, рассматриваемой в настоящей главе, является падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред.

§ 9.2. Вывод основных уравнений. Законы Снеллиуса. Коэффициенты отражения и преломления

Пусть плоская волна падает из первой среды с параметрами $\vec{\epsilon}_{a1}, \vec{\mu}_{a1}$ на плоскую границу раздела со второй средой, обладающей параметрами $\vec{\epsilon}_{a2}, \vec{\mu}_{a2}$. Плоскостью падения называют плоскость, содержащую нормаль к границе раздела и вектор Пойнтинга падающей волны. Угол падения φ представляет собой угол между вектором Пойнтинга падающей волны $\vec{\Pi}$ и нормалью к границе раздела.

При рассмотрении плоской волны, падающей на плоскую границу раздела, целесообразно использовать декартову систему координат (рис. 9.1).

Углом отражения φ_0 называют угол между вектором Пойнтинга отраженной волны $\vec{\Pi}_0$ и нормалью к границе раздела, углом преломления φ_n — угол между вектором Пойнтинга преломленной волны $\vec{\Pi}_n$ и нормалью к границе раздела.

Векторы \vec{E} и \vec{H} находятся в плоскости, перпендикулярной вектору Пойнтинга. Ориентация в этой плоскости вектора \vec{E} и ортогонального к нему вектора \vec{H} может быть произвольной. Вектор \vec{E} падающей волны всегда можно представить в виде суммы двух составляющих: находящейся в плоскости падения и перпендикулярной ей. Рассмотрев электродинамическую задачу для обоих указанных случаев, путем суперпозиции результатов можно получить решение для любого заданного расположения вектора \vec{E} (любой поляризации) и соответственно для любого расположения вектора \vec{H} , ортогонального к вектору \vec{E} .

Рассмотрим первый случай, когда вектор \vec{E} расположен в плоскости падения xz (рис. 9.1). Вектор \vec{H} ориентирован вдоль оси y . Оси распространения падающей, отраженной и преломленной волн обозначим соответственно n, n_0, n_n . Для анализа целесообразно взять тот вектор поля, который в заданной системе координат содержит меньше составляющих. В первом случае таким вектором является вектор \vec{H} , ориентированный вдоль оси y . В случае падающей волны, распространяющейся вдоль оси n , в соответствии с формулами (7.9), (7.16), (7.17) для вектора \vec{H} справедливо выражение

$$\dot{H}_y = C_1 e^{-i\gamma_1 n}. \quad (9.1)$$

Считая в силу однородности каждой из двух сред, что вектор \vec{H} в отраженной и преломленной волнах не изменяет ориентации вдоль оси y , а может изменить только амплитуду и фазу, можно записать следующие соотношения для

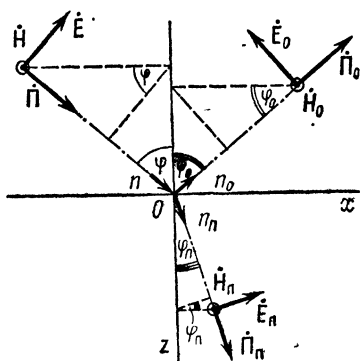


Рис. 9.1

этих векторов:

$$\dot{H}_{y_0} = C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 n_0}, \quad (9.2)$$

$$\dot{H}_{y_n} = C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 n_n}. \quad (9.3)$$

В соответствии с формулой (7.10)

$$\gamma_1 = \omega \sqrt{\bar{\mu}_{a1} \varepsilon_{a1}}, \quad (9.4)$$

$$\gamma_2 = \omega \sqrt{\bar{\mu}_{a2} \varepsilon_{a2}}. \quad (9.5)$$

Коэффициенты \dot{M}_{Hy}^0 и \dot{M}_{Hy}^n в общем случае являются комплексными коэффициентами отражения и преломления составляющих поля \dot{H}_y для первого случая ориентации вектора \dot{E} , находящегося в плоскости падения.

Задачей анализа электродинамического процесса является определение углов отражения φ_0 и преломления φ_n при заданном угле падения φ , а также коэффициентов отражения \dot{M}_{Hy}^0 и преломления \dot{M}_{Hy}^n .

Для решения поставленной задачи прежде всего необходимо перейти от осей n, n_0, n_n , для которых написаны выражения (9.1), (9.2), (9.3), к системе координат x, y, z . Точки, заданные в системе координат n, n_0, n_n , можно представить в декартовой системе координат с помощью формул:

$$\left. \begin{aligned} n &= z \cos \varphi + x \sin \varphi, \\ n_0 &= -z \cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0, \\ n_n &= z \cos \varphi_n + x \sin \varphi_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

При написании этих формул учитывалось, что фронт плоской волны в падающей и преломленной волнах распространяется в сторону положительных значений осей x и z , а в отраженной волне — в сторону положительных значений оси x и отрицательных значений оси z , чем и объясняется знак «минус» перед членом $z \cos \varphi_0$ во второй формуле (9.6). Подставляя выражения (9.6) в формулы (9.1), (9.2), (9.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_y &= C_1 e^{-i\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, \\ \dot{H}_{y_0} &= C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 (-z \cos \varphi_0 + x \sin \varphi_0)}, \\ \dot{H}_{y_n} &= C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 (z \cos \varphi_n + x \sin \varphi_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Для определения углов φ_0, φ_n и коэффициентов $\dot{M}_{Hy}^0, \dot{M}_{Hy}^n$ следует использовать граничные условия (8.9), которые предполагают равенство тангенциальных составляющих полного магнитного поля в первой и второй средах. Полное магнитное поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн. Во второй среде существует лишь поле преломленной волны. В рассматриваемом случае поля $\dot{H}, \dot{H}_0, \dot{H}_n$ ориентированы одинаково и являются тангенциальными по отношению к границе раздела. В силу этого

граничные условия (8.9) записываются в виде

$$\dot{H}_y + \dot{H}_{y0} = \dot{H}_{yn} \quad (\text{при } z = 0) \quad (9.8)$$

или

$$C_1 e^{-i\gamma_1 x \sin \varphi} + C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-i\gamma_1 x \sin \varphi_0} = C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-i\gamma_2 x \sin \varphi_n}.$$

Равенство возможно при соблюдении условий

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0, \quad \gamma_1 \sin \varphi = \gamma_2 \sin \varphi_n, \quad 1 + \dot{M}_{Hy}^0 = \dot{M}_{Hy}^n. \quad (9.9)$$

Из первых двух равенств (9.9) следуют так называемые законы Снеллиуса:

$$\varphi = \varphi_0, \quad (9.10)$$

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\mu_{a1} \tilde{\epsilon}_{a1}}{\mu_{a2} \tilde{\epsilon}_{a2}}}. \quad (9.11)$$

Для среды с потерями $\sin \varphi_n$ является комплексной величиной

$$\sin \varphi_n = a_1 - jb_1. \quad (9.12)$$

Если при этом в первой среде потерь нет и γ_1 — действительная величина, то в силу равенства $\gamma_1 \sin \varphi_0 = \gamma_2 \sin \varphi_n$ произведение $\gamma_2 \sin \varphi_n$ является также величиной действительной и вдоль оси x происходит изменение фазы колебаний. Затухание колебаний вдоль оси x отсутствует.

Из выражений (9.10), (9.11) можно определить углы отражения и преломления, а последнее равенство в выражении (9.9) является первым уравнением с двумя неизвестными коэффициентами \dot{M}_{Hy}^0 и \dot{M}_{Hy}^n . Для определения этих коэффициентов необходимо вывести второе уравнение, которое может быть получено из граничных условий (8.19). В рассматриваемом случае тангенциальной составляющей электрического поля является составляющая \dot{E}_x . Ее можно найти с помощью первого уравнения Максвелла (2.12), которое при отсутствии сторонних токов записывается в виде

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}. \quad (9.13)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \left\{ \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right) \right\}. \quad (9.14)$$

В нашем случае составляющие поля $\dot{H}_x = \dot{H}_z = 0$ и производная $\partial/\partial y = 0$.

Вследствие этого соотношение (9.14) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{1}_x \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} + \mathbf{1}_z \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (9.15)$$

В полях падающей, отраженной и преломленной волн существуют две составляющие электрического поля:

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}, \quad (9.16)$$

$$\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \quad (9.17)$$

При расчете составляющих \dot{E}_x в падающей и отраженной волнах следует полагать $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_{a1}$ и соответственно $\dot{H}_y = \dot{H}_y$ и $\dot{H}_y = \dot{H}_{y0}$.

При определении \dot{E} в преломленной волне полагают $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_{a2}$ и $\dot{H}_y = \dot{H}_{yп}$.

В соответствии с этим получается

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}\} = \frac{\gamma_1 \cos \varphi}{\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}.$$

Подставляя значение γ_1 из формулы (9.4), находим

$$\dot{E}_x = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 (z \cos \varphi + x \sin \varphi)}. \quad (9.18)$$

Аналогично, считая $\varphi_0 = \varphi$, можно написать

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x0} &= -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{Hy}^0 e^{-j\gamma_1 (-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}\} = \\ &= -\sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi \dot{M}_{Hy}^0 C_1 e^{-j\gamma_1 (-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{xp} &= -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_p + x \sin \varphi_p)}\} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}} \cos \varphi_p \dot{M}_{Hy}^п C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_p + x \sin \varphi_p)}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Граничные условия (8.17) запишутся аналогично условиям (9.8):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x + \dot{E}_{x0} &= \dot{E}_{xp}, \quad (9.21) \\ \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} - \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi \dot{M}_{Hy}^0 C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} &= \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}} \cos \varphi_p \dot{M}_{Hy}^п C_1 e^{-j\gamma_2 x \sin \varphi_p}. \end{aligned}$$

Разделив все члены уравнения на $\sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \cos \varphi C_1$ и учитывая равенство $e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi} = e^{-j\gamma_2 x \sin \varphi_p}$, получаем

$$1 - M_{Hy}^0 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\epsilon_{a2}\mu_{a1}}} \cdot \frac{\cos \varphi_p}{\cos \varphi} \dot{M}_{Hy}^п. \quad (9.22)$$

Это соотношение целесообразно выразить с помощью закона Снеллиуса (9.11) таким образом, чтобы в нем существовал только угол падения:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varphi_{\Pi}}{\cos \varphi} &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{\Pi}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2}}{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1}}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \sin^2 \varphi \frac{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Подстановка полученного выражения в уравнение (9.22) дает соотношение

$$1 - M_{Hy}^0 = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}^2 \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^{\Pi}. \quad (9.24)$$

Вторым уравнением, связывающим коэффициенты M_{Hy}^0 и M_{Hy}^{Π} , является соотношение (9.9). Решая эти уравнения совместно, можно найти выражения для коэффициентов преломления M_{Hy}^{Π} и отражения M_{Hy}^0 составляющих поля \dot{H}_y :

$$M_{Hy}^{\Pi} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}^2 \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}}, \quad (9.25)$$

$$M_{Hy}^0 = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}^2 \tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1} \tilde{\varepsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}} - 1, \quad (9.26)$$

которые сходны с известными в оптике формулами Френеля.

Был рассмотрен первый случай поляризации, когда вектор \dot{E} находится в плоскости падения. При этом были получены выражения коэффициентов преломления и отражения для составляющей поля \dot{H}_y .

При такой поляризации вектор \dot{E} обладает нормальной по отношению к границе раздела составляющей. Часто подобную поляризацию называют вертикальной.

Нетрудно получить выражения этих коэффициентов для второго случая поляризации (горизонтальной), когда вектор \dot{E} перпендикулярен плоскости падения. При этом вектор \dot{H} имеет две составляющие \dot{H}_x и \dot{H}_z , а вектор \dot{E} — одну составляющую \dot{E}_y .

Для определения коэффициентов преломления M_{Ey}^{Π} и отражения M_{Ey}^0 используем принцип перестановочной двойственности, на основании которого поле \dot{H}_y заменяется на поле \dot{E}_y и в выражениях

(9.25), (9.26) осуществляются перестановки вида $\tilde{\mu}_{a1} \leftrightarrow -\tilde{\epsilon}_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a2} \leftrightarrow \tilde{\epsilon}_{a2}$. Выражения для M_{Ey}^n и M_{Ey}^o записываются в форме

$$M_{Ey}^n = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}}, \quad (9.27)$$

$$M_{Ey}^o = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}}} - 1. \quad (9.28)$$

Легко найти коэффициенты преломления и отражения для других составляющих поля. Покажем вывод на примере составляющей электрического поля \dot{E}_x . Коэффициент отражения M_{Ex}^o определяется отношением \dot{E}_{x0}/\dot{E}_x при $z=0$.

Из выражений (9.18) и (9.19) следует, что

$$\left. \frac{\dot{E}_{x0}}{\dot{E}_x} \right|_{z=0} = M_{Ex}^o = - \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}} \cos \varphi M_{Hy}^o C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi}}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}} \cos \varphi C_1 e^{-j\gamma_1 x \sin \varphi}},$$

или

$$M_{Ex}^o = -M_{Hy}^o. \quad (9.29)$$

Аналогично коэффициент преломления M_{Ex}^n определяется отношением $\left. \frac{\dot{E}_{xn}}{\dot{E}_x} \right|_{z=0} = M_{Ex}^n$. Подставляя значения составляющих поля из формул (9.18) и (9.20), получаем

$$M_{Ex}^n = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} M_{Hy}^n.$$

Далее, используя соотношения (9.23) и (9.25), получаем соответственно

$$\begin{aligned} M_{Ex}^n &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^n = \\ &= \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} M_{Hy}^n, \\ M_{Ex}^n &= \frac{2}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}} + 1}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Аналогично могут быть найдены выражения коэффициентов отражения и преломления для других составляющих при различной поляризации поля.

§ 9.3. Угол полного преломления (угол Брюстера)

Рассмотрим выражение (9.26), определяющее коэффициент отражения для составляющей поля H_y в случае вертикальной поляризации.

Коэффициент M_{Hy}^0 равен нулю при соблюдении условия

$$\sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} = 1. \quad (9.31)$$

Полагая параметры двух сред заданными, определим значение угла падения $\varphi = \varphi_B$, называемого *углом Брюстера*, при котором выполняется равенство (9.31). Это равенство может быть записано в форме

$$\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\epsilon}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\epsilon}_{a1}^2 \sin^2 \varphi_B = \tilde{\epsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\epsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} \sin^2 \varphi_B,$$

откуда

$$\sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_{a2}(\tilde{\epsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\epsilon}_{a1}\tilde{\mu}_{a2})}{\tilde{\mu}_{a1}(\tilde{\epsilon}_{a2}^2 - \tilde{\epsilon}_{a1}^2)}}. \quad (9.32)$$

Выражение (9.32) позволяет определить условия, при которых возможно полное преломление падающей волны, когда коэффициент отражения равен нулю. С помощью формулы (9.32) этот процесс можно проанализировать для любых сред. Однако для простоты и наглядности ограничимся средами, лишенными потерь, в которых диэлектрические и магнитные проницаемости являются действительными величинами. При этом $\tilde{\epsilon}_{a1} = \epsilon_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a1} = \mu_{a1}$, $\tilde{\epsilon}_{a2} = \epsilon_{a2}$, $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

$$1. \mu_{a1} = \mu_{a2}, \epsilon_{a2}, \epsilon_{a1} > 0, \sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a2} + \epsilon_{a1}}}. \quad (9.33)$$

Угол Брюстера физически возможен. При $\epsilon_{a2} = \epsilon_{a1}$ возникает кажущееся противоречие; в силу того что обе среды одинаковы, отражение отсутствует при любом угле падения, а угол Брюстера получает определенное значение: $\varphi_B = 45^\circ$. Это следует понимать так, что по мере приближения ϵ_{a2} к ϵ_{a1} угол Брюстера стремится к 45° , при равенстве же диэлектрических и магнитных проницаемостей понятие угла Брюстера теряет смысл и полученные соотношения становятся неприменимыми.

$$2. \mu_{a1} \neq \mu_{a2}, \epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}, \sin \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2})}{\mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2)}}. \quad (9.34)$$

Знаменатель при этом больше нуля и для физического осуществления полного преломления необходимо соблюдение двух условий:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \epsilon_{a2}\mu_{a1} > \epsilon_{a1}\mu_{a2}, \\ & \text{б) } \epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2}) < \mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2). \end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\text{в) } \mu_{a1} \neq \mu_{a2}, \epsilon_{a2} < \epsilon_{a1}.$$

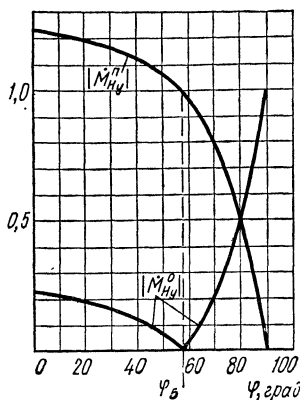


Рис. 9.2

Знаменатель в выражении (9.34) отрицателен и для физического осуществления полного преломления требуется соблюдение двух условий:

- а) $\epsilon_{a2}\mu_{a1} < \epsilon_{a1}\mu_{a2}$,
- б) $|\epsilon_{a2}(\epsilon_{a2}\mu_{a1} - \epsilon_{a1}\mu_{a2})| < |\mu_{a1}(\epsilon_{a2}^2 - \epsilon_{a1}^2)|$.

$$(9.36)$$

Аналогично могут быть получены условия полного преломления в случае горизонтальной поляризации.

Из приведенного анализа следует, что полное преломление возникает не во всех средах. Значение угла Брюстера φ_B является фиксированным. Если угол падения меньше или больше угла Брюстера, то полное преломление падающей волны исчезает. Сказанное иллюстрируется графиком рис. 9.2, построенным для модуля коэффициента M_{Hy}^o и коэффициента M_{Hy}^p в случае падения плоской волны с вектором \vec{E} , находящимся в плоскости падения из вакуума на среду с относительными магнитной и диэлектрической проницаемостями $\mu_2 = 1$ и $\epsilon_2 = 2,4$.

§ 9.4. Полное внутреннее отражение

При известных параметрах первой и второй сред и заданном угле падения угол преломления можно найти с помощью закона Снеллиуса (9.11). Рассматривая для простоты среды без потерь, получаем

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi \sqrt{\frac{\mu_{a1}\epsilon_{a1}}{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}}. \quad (9.37)$$

При соблюдении неравенства

$$\mu_{a1}\epsilon_{a1} > \mu_{a2}\epsilon_{a2} \quad (9.38)$$

всегда можно подобрать угол падения φ , при котором

$$\sin \varphi_n = 1 \text{ и } \varphi_n = \pi/2. \quad (9.39)$$

Выражение (9.37) позволяет легко определить угол падения, при котором соблюдаются условия (9.39). Этот угол называют *углом полного внутреннего отражения* $\varphi_{во}$:

$$\sin \varphi_{во} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}{\mu_{a1}\epsilon_{a1}}}. \quad (9.40)$$

Из формулы (9.37) следует, что при соблюдении неравенства (9.38) и увеличении угла падения φ до значения, при котором

$$\varphi > \varphi_{во}, \quad (9.41)$$

возникает неравенство

$$\sin \varphi_n > 1. \quad (9.42)$$

При этом становятся неясными поведение преломленной волны и весь процесс отражения и преломления. Задачей настоящего параграфа является анализ процессов отражения и преломления при углах падения, равных или превышающих угол полного внутреннего отражения $\varphi_{во}$. Если первая и вторая среды лишены потерь, то на основании формулы (9.37) $\sin \varphi_n$ — величина действительная. Выполнение неравенства (9.42) при действительных значениях угла φ_n невозможно. Будем считать этот угол комплексной величиной:

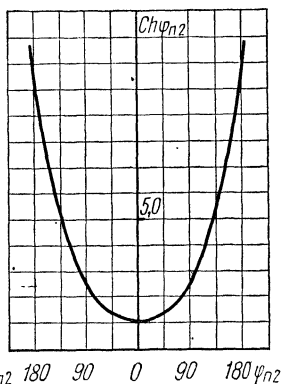


Рис. 9.3

$$\varphi_n = \varphi_{n1} + j\varphi_{n2}. \quad (9.43)$$

Тогда

$$\sin \varphi_n = \sin(\varphi_{n1} + j\varphi_{n2}) = \sin \varphi_{n1} \cos(j\varphi_{n2}) + \cos \varphi_{n1} \sin(j\varphi_{n2}).$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \cos(j\varphi_{n2}) &= \operatorname{ch} \varphi_{n2}, \\ \sin(j\varphi_{n2}) &= j \operatorname{sh} \varphi_{n2}. \end{aligned}$$

При этом

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi_{n1} \operatorname{ch} \varphi_{n2} + j \cos \varphi_{n1} \operatorname{sh} \varphi_{n2}.$$

Но, как указывалось, в случае сред с действительными параметрами величина $\sin \varphi_n$ должна быть действительной, что может быть достигнуто при $\varphi_{n1} = \pi/2$. Тогда

$$\cos \varphi_{n1} = 0, \quad \sin \varphi_{n1} = 1, \quad \varphi_n = \pi/2 + j\varphi_{n2}, \quad (9.44)$$

$$\sin \varphi_n = \sin(\pi/2 + j\varphi_{n2}) = \operatorname{ch} \varphi_{n2}. \quad (9.45)$$

На рис. 9.3 дан график $\operatorname{ch} \varphi_{n2}$. Как следует из графика, $\operatorname{ch} \varphi_{n2}$ может принимать любое положительное значение, начиная с единицы. Следовательно, если угол преломления определяется выражением (9.44), то возможно соблюдение неравенства (9.42). Необходимо выяснить, какому физическому процессу соответствуют полученные соотношения. При соблюдении неравенства (9.42)

$$\cos \varphi_n = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_n}$$

превращается в мнимую величину и это выражение может быть записано в форме

$$\cos \varphi_n = -j \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}. \quad (9.46)$$

Смысл знака «минус» перед корнем будет пояснен далее.

Подставляя выражение (9.46) в формулы для преломленного

поля (9.7), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \dot{H}_{yп} &= C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_n + x \sin \varphi_n)} = C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-j\gamma_2 (-j\sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z + \sin \varphi_n x)} = \\ &= C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-\gamma_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\gamma_2 \sin \varphi_n x}, \end{aligned} \quad (9.47)$$

из которого ясно, что в случае полного внутреннего отражения вдоль оси z возникает экспоненциальное затухание поля. Вдоль оси x происходит распространение волны. Из этого же выражения следует, что при выборе знака «плюс» перед корнем в выражении (9.46) возникает не затухание, а возрастание поля вдоль оси z , что невозможно в силу того, что продвижение вдоль оси z эквивалентно удалению от источников поля и дополнительные источники поля отсутствуют.

Таким образом, явление полного внутреннего отражения сопровождается возникновением своеобразной волны, распространяющейся вдоль границы раздела во второй среде и затухающей по экспоненте в направлении, перпендикулярном границе раздела. Волна как бы «прижимается» к первой среде, обладающей большим значением произведения $\mu_{a1}\epsilon_{a1}$. Волны такого типа, называемые *поверхностными*, имеют большое значение в радиотехнике.

Рассмотрим фазовую скорость поверхностной волны. Для этого найдем мгновенное значение составляющей магнитного поля во второй среде, комплексная амплитуда которой определяется формулой (9.47)

$$H_{yп}(t) = \text{Re}(\dot{H}_{yп} e^{i\omega t}) = \text{Re}(C_1 \dot{M}_{Hy}^п e^{-\gamma_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\gamma_2 \sin \varphi_n x} e^{i\omega t}).$$

Представим комплексный (в общем случае) коэффициент преломления в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\dot{M}_{Hy}^п = M_{1Hy}^п + jM_{2Hy}^п. \quad (9.48)$$

Для сред без потерь в силу справедливости выражение (7.54) можно написать

$$\gamma_2 = \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}. \quad (9.49)$$

С учетом формул (9.48) и (9.49) выражение для $H_{yп}(t)$ записывают в виде

$$\begin{aligned} H_{yп}(t) &= \text{Re} \left\langle C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} \left(M_{1Hy}^п + jM_{2Hy}^п \right) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_n x) + j \sin(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_n x) \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} H_{yп}(t) &= C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} \left\{ M_{1Hy}^п \cos(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_n x) - \right. \\ &\left. - M_{2Hy}^п \sin(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_n x) \right\}. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Зафиксируем фазу тригонометрических функций, давая времени t и координате x определенное значение:

$$\omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}} \sin \varphi_n x_1.$$

Далее найдем скорость перемещения этого фиксированного значения фазы вдоль оси x при изменении времени t . Для этого дадим времени t_1 приращение dt и соответственно координате x_1 — приращение dx . Новое значение фазы приравняем старому, аналогично тому, как это было сделано при определении фазовой скорости плоской волны в § 7.3:

$$\begin{aligned} \omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n x_1 &= \\ = \omega (t_1 + dt) - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n (x_1 + dx), \end{aligned}$$

или, сокращая одинаковые члены,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega dt - \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n dx, \\ \frac{dx}{dt} = v_{\varphi x} &= \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} \sin \varphi_n}, \end{aligned} \quad (9.51)$$

где $v_{\varphi x}$ — фазовая скорость волны в направлении координаты x ; $\frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}} = c$ — скорость света во второй среде.

При этом выражение (9.51) приобретет вид

$$v_{\varphi x} = c / \sin \varphi_n. \quad (9.52)$$

В случае полного внутреннего отражения справедливо соотношение (9.42) и, следовательно,

$$v_{\varphi x} < c. \quad (9.53)$$

Поверхностная волна обладает фазовой скоростью, меньшей скорости света. Подобные волны называют медленными волнами. Таким образом, поверхностная волна является волной медленной. Представляет интерес определение средних значений векторов Пойнтинга, ориентированных вдоль осей z и x во второй среде.

Вектор Пойнтинга определяется одной составляющей магнитного поля \dot{H}_{yn} (9.47) и двумя составляющими электрического поля \dot{E}_{xn} и \dot{E}_{zn} (9.16), (9.17). Применительно к рассматриваемому случаю эти формулы записываются в виде

$$\dot{E}_{xn} = -\frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yn}}{\partial z}, \quad (9.54)$$

$$\dot{E}_{zn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yn}}{\partial x}. \quad (9.55)$$

Подставляя значение \dot{H}_{yn} из выражения (9.47) и учитывая, что $\gamma_2 = \beta_2$, получаем

$$\dot{E}_{xn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} \beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x}, \quad (9.56)$$

$$\dot{E}_{zn} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{a2}} (-j) \beta_2 \sin \varphi_n C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x}. \quad (9.57)$$

Средние значения векторов Пойнтинга, ориентированных вдоль осей x и z , определяются соответственно выражениями:

$$\dot{\mathbf{I}}_{dx} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{zn} \dot{\mathbf{H}}_{yp}^*], \quad (9.58)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_{dz} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{xp} \dot{\mathbf{H}}_{yp}^*]. \quad (9.59)$$

Подставляя сюда значения $\dot{\mathbf{E}}_{xp}$, $\dot{\mathbf{E}}_{zn}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{yp}^*$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_{dx} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-\mathbf{1}_z \frac{\beta_2 \sin \varphi_n}{\omega \epsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{Hy}^n e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} \times \right. \\ &\times e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x} \mathbf{1}_y C_1 \dot{M}_{Hy}^{n*} e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{j\beta_2 \sin \varphi_n x} \left. \right] = \\ &= \mathbf{1}_x \frac{\beta_2 \sin \varphi_n}{2\omega \epsilon_{a2}} C_1^2 \left| \dot{M}_{Hy}^n \right|^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z}, \end{aligned} \quad (9.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_{dz} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{1}_x \frac{\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}}{j\omega \epsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{Hy}^n \times \right. \\ &\times e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{-j\beta_2 \sin \varphi_n x} \mathbf{1}_y C_1 \dot{M}_{Hy}^{n*} e^{-\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} e^{j\beta_2 \sin \varphi_n x} \left. \right] = \\ &= \mathbf{1}_z \operatorname{Re} \frac{\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1}}{j2\omega \epsilon_{a2}} C_1^2 \left| \dot{M}_{Hy}^n \right|^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_n - 1} z} = 0. \end{aligned} \quad (9.61)$$

Следовательно, существует действительная часть вектора Пойнтинга, ориентированного вдоль координаты x , что свидетельствует о распространении волны в этом направлении. Вектор Пойнтинга, ориентированный вдоль оси z , обладает только мнимой частью, его действительная часть равна нулю. Вдоль координаты z электромагнитная волна не распространяется, происходит пульсация мощности в этом направлении. Половину периода вектор Пойнтинга направлен в сторону положительных значений оси z , половину периода — в сторону отрицательных значений. Среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга равно нулю.

Таким образом, в случае полного внутреннего отражения существуют три вектора Пойнтинга, средние значения которых отличны от нуля: 1) вектор Пойнтинга волны, падающей на границу раздела; 2) вектор Пойнтинга волны, отраженной от границы раздела; 3) вектор Пойнтинга поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси x .

Нетрудно представить себе схему устройства, предназначенного для канализации электромагнитной энергии с помощью поверхностных волн (рис. 9.4). Концы пластины из диэлектрика $Пл$, ориен-

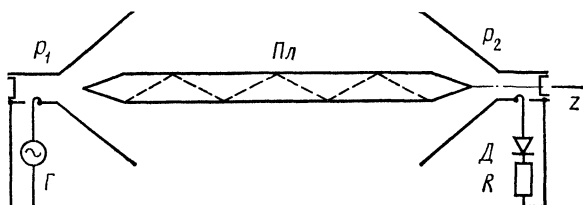


Рис. 9.4

тированной вдоль координаты z , введены в рупоры, один из которых (рупор P_1) излучает электромагнитную энергию, создаваемую генератором G , а другой рупор P_2 принимает ее. Электромагнитная волна, проникая в диэлектрик, падает на границу раздела диэлектрик—воздух под разными углами, в том числе и под углами, равными или бóльшими угла полного внутреннего отражения. Часть энергии отражается от одной границы раздела и падает на другую границу раздела также под углами, равными или бóльшими угла полного внутреннего отражения; процесс отражения повторяется.

В воздухе с двух сторон пластины образуется поверхностная волна, распространяющаяся вдоль оси z . В результате процесс передачи энергии осуществляется двумя волнами—внешней по отношению к диэлектрику поверхностной, медленной волной и внутренней волной, распространяющейся в диэлектрике. Подобные волноводы поверхностных, медленных волн находят широкое применение, и их работа будет подробно разобрана в последующих главах.

§ 9.5. Падение плоской волны на плоскую границу раздела с идеальным металлом

В § 7.5 было установлено, что поле в идеально проводящем металле равно нулю. Комплексная диэлектрическая проницаемость второй среды $\tilde{\epsilon}_{a2}$ при этом стремится к бесконечности, а коэффициент отражения для составляющей \dot{H}_y в соответствии с формулой (9.26)—к единице. Таким образом, суммарное значение тангенциальной составляющей магнитного поля у идеальной отражающей поверхности удваивается по сравнению с падающей волной. Волна полностью отражается и распространяется в первой среде под углом отражения, равным углу падения.

§ 9.6. Падение плоской волны на границу раздела с реальным металлом

В отличие от идеального металла электромагнитное поле в реальном металле существует, хотя и быстро затухает. Комплексная диэлектрическая проницаемость второй среды в силу справедливости неравенства (7.58) может быть записана в виде формулы (7.59). В случае падения плоской волны из воздуха или вакуума на реальный металл закон Снеллиуса (9.11) записывается в форме

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_{a2} \left(-j \frac{\gamma_{a2}}{\omega} \right)}}. \quad (9.62)$$

Считая $\mu_{a2} \geq \mu_0$ и учитывая неравенство (7.58), получаем

$$\sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_{a2} (-j) \frac{\gamma_{a2}}{\omega}}} \approx 0, \quad (9.63)$$

$$\sin \varphi_n \approx 0, \quad \cos \varphi_n = 1. \quad (9.64)$$

Таким образом, независимо от угла падения угол преломления в реальном металле близок к нулю. Электромагнитная энергия проникает в реальный металл в направлении, перпендикулярном границе раздела, и вызывает его нагрев. Для определения мощности электромагнитного поля, расходуемой на нагрев реального металла, необходимо установить математическую связь между составляющими поля в реальном металле. Допустим, что рассматривается поляризация поля, когда вектор \vec{E} падающей волны находится в плоскости падения. Составляющие поля преломленной волны определяются соотношениями (9.7), (9.20). Для вычисления составляющей $\dot{E}_{zп}$ используют выражение (9.17):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{zп} &= \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{yп}}{\partial x} = \\ &= -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \sin \varphi_{п} \dot{M}_{Hy}^{п} C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_{п} + x \sin \varphi_{п})}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

С учетом условий (9.64) можно считать, что

$$\dot{E}_{zп} \approx 0 \quad (9.66)$$

и

$$\dot{E}_{xп} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} \dot{M}_{Hy}^{п} C_1 e^{-j\gamma_2 (z \cos \varphi_{п} + x \sin \varphi_{п})}. \quad (9.67)$$

Взяв отношение $\dot{E}_{xп}$ к $\dot{H}_{yп}$, получаем

$$\frac{\dot{E}_{xп}}{\dot{H}_{yп}} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = Z_m, \quad (9.68)$$

где Z_m — комплексное характеристическое сопротивление металла.

Если можно считать $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$, то с учетом выражения (7.59) волновое сопротивление металла записывается в виде, аналогичном (7.69):

$$Z_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{2\gamma_{a2}}} (1 + j). \quad (9.69)$$

При известных параметрах реального металла его волновое сопротивление может быть всегда рассчитано.

Формулу (9.68) можно записать иначе:

$$\dot{E}_{xп} = \dot{H}_{yп} Z_m. \quad (9.70)$$

Проведя аналогичный анализ для поляризации, когда вектор \vec{H} падающей волны лежит в плоскости падения и тангенциальной к границе раздела является составляющая $\dot{E}_{yп}$, получим соотношение, сходное с (9.70):

$$\dot{E}_{yп} = -\dot{H}_{xп} Z_m. \quad (9.71)$$

Соотношения (9.70) и (9.71), связывающие ортогональные друг к другу тангенциальные к границе раздела составляющие электрического и магнитного полей, называют *граничными условиями у поверхности реального металла*.

Полученные соотношения имеют большое значение. Обычно при расчете поля в электродинамических системах реальный металл заменяют идеальным, обладающим бесконечно большой проводимостью. При этом получают тангенциальные к металлу составляющие магнитного поля, мало отличающиеся от тех составляющих, которые были бы получены при учете конечной проводимости металла, т. е. в реальном металле. Тангенциальные составляющие напряженности электрического поля для идеального металла оказываются равными нулю в силу известных граничных условий у поверхности идеального металла, определяемых формулой (8.19). Поэтому равна нулю и нормальная к металлу составляющая вектора Пойнтинга

$$\dot{P}_{\perp n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_{\tau} \dot{H}_{\tau}^*], \quad (9.72)$$

определяющая мощность потерь в металле.

Для реальных сред справедливы граничные условия (8.9). Вследствие этого поле \dot{H}_{yp} в металле можно заменить полем \dot{H}_y в первой среде. При этом формула (9.70) записывается в виде

$$\dot{E}_{xp} = \dot{H}_y Z_m. \quad (9.73)$$

Аналогичную замену можно осуществить и в формуле (9.71)

$$\dot{E}_{yp} = -\dot{H}_x Z_m. \quad (9.74)$$

Эти соотношения устанавливают связь между тангенциальными составляющими электрического поля во второй среде (реальном металле) и тангенциальными составляющими магнитного поля в первой среде.

Как было отмечено, разница между тангенциальными составляющими магнитного поля, рассчитанными для идеального и реального металлов, весьма мала, если реальный металл обладает большой проводимостью. Следовательно, без большой погрешности в выражениях (9.73), (9.74) магнитные поля \dot{H}_y и \dot{H}_x , существующие у поверхности реального металла, можно заменить магнитными полями, полученными при условии, что металл идеален. Таким образом, проводя расчет для идеального металла (что легче сделать), можно получить значение тангенциальных составляющих электрического поля в реальном металле и, как будет показано в дальнейшем, определить мощность потерь в реальном металле с учетом его конкретных свойств.

Соотношения, аналогичные (9.73), (9.74), получаются и в случае криволинейных границ раздела с реальным металлом. При этом их записывают в более общей форме [15]:

$$[\mathbf{1}_n \dot{E}_n] = -Z_m [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{H}]]. \quad (9.75)$$

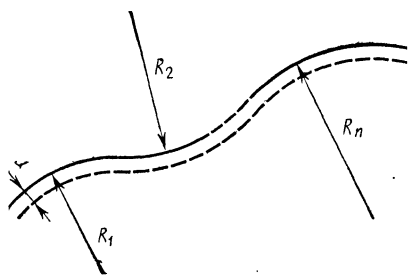


Рис. 9.5

Здесь $\mathbf{1}_n$ — единичная нормаль к границе раздела, ориентированная внутрь реального металла; $\dot{\mathbf{E}}_n$ — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля в преломленной волне у границы раздела; Z_m — комплексное характеристическое сопротивление металла; $\dot{\mathbf{H}}$ — комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля в первой среде у границы раздела.

Формула (9.75) справедлива при выполнении следующих ограничений: все параметры, характеризующие кривизну поверхности и обладающие размерностями длины, должны быть много больше глубины проникновения поля в металл d [см. формулу (7.72)]:

$$R_1, R_2, \dots, R_n \gg d, \quad (9.76)$$

где R_1, R_2, \dots, R_n — радиусы кривизны (рис. 9.5), характеризующие поверхность металла.

Заметим, что ограничения (9.76) в практических случаях не являются жесткими и им можно обычно удовлетворить.

Не проводя общего доказательства справедливости формулы (9.75), покажем, что соотношения, полученные с ее помощью в случае плоской границы раздела с реальным металлом, совпадают с выражениями (9.73), (9.74). Допустим, что нормаль $\mathbf{1}_n$ совпадает с осью z декартовой системы координат. Тогда члены формулы (9.75) запишутся в виде

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}_n] = [1_z (\mathbf{1}_x \dot{E}_{xp} + \mathbf{1}_y \dot{E}_{yp} + \mathbf{1}_z \dot{E}_{zp})] = \mathbf{1}_y \dot{E}_{xp} - \mathbf{1}_x \dot{E}_{yp}.$$

Аналогично,

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] = \mathbf{1}_y \dot{H}_x - \mathbf{1}_x \dot{H}_y$$

и

$$[\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] = [1_z (\mathbf{1}_y \dot{H}_x - \mathbf{1}_x \dot{H}_y)] = -\mathbf{1}_x \dot{H}_x - \mathbf{1}_y \dot{H}_y.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (9.75), получаем

$$\mathbf{1}_y \dot{E}_{xp} - \mathbf{1}_x \dot{E}_{yp} = Z_m \mathbf{1}_x \dot{H}_x + Z_m \mathbf{1}_y \dot{H}_y,$$

или, приравнявая члены при одинаковых ортах,

$$\dot{E}_{xp} = \dot{H}_y Z_m, \quad \dot{E}_{yp} = -\dot{H}_x Z_m.$$

Видим, что эти соотношения в точности совпадают с (9.73) и (9.74).

§ 9.7. Мощность потерь в реальном металле

В соответствии с граничными условиями у поверхности реального металла существуют тангенциальные составляющие магнитного и электрического полей. Эти составляющие создают вектор Пойн-

тинга, направленный внутрь металла, нормально к границе раздела. Таким образом, возникает поток мощности, расходуемой на нагрев металла, или мощность потерь. Среднее значение вектора Пойнтинга определяется выражением (4.29). Нормальная к границе раздела составляющая этого вектора получается проекцией его на направление единичной нормали к границе раздела:

$$\dot{\Pi}_{дн} = \mathbf{1}_n (\mathbf{1}_n \dot{\Pi}_д) = \mathbf{1}_n \left(\mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] \right) = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]),$$

где $\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*]$ является смешанным произведением (единичная нормаль умножается скалярно на результат векторного произведения). В смешанном произведении допустимы циклические перестановки:

$$\mathbf{1}_n [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\mathbf{H}}^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}].$$

Следовательно,

$$\dot{\Pi}_{дн} = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}}^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}]).$$

Определяя нормальную составляющую вектора Пойнтинга в реальном металле $\dot{\Pi}_{дн}^п$, следует использовать составляющие поля в металле:

$$\dot{\Pi}_{дн}^п = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}_п])$$

и соотношение (9.75)

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{дн}^п &= \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \dot{\mathbf{H}}_п^* (-Z_m [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]]) \} \Rightarrow \\ &= \mathbf{1}_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ -Z_m \dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] \}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Здесь $\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]]$ — также смешанное произведение.

Осуществляя циклическую перестановку, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_п^* [\mathbf{1}_n [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}]] = [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] [\dot{\mathbf{H}}_п^* \mathbf{1}_n] = - [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_п^*].$$

Первое векторное произведение дает тангенциальную составляющую поля $\dot{\mathbf{H}}$ в первой среде, у границы раздела с реальным металлом:

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}] = \dot{\mathbf{H}}_\tau,$$

второе векторное произведение — тангенциальную составляющую сопряженного вектора $\dot{\mathbf{H}}_п^*$ у границы раздела с реальным металлом:

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_п^*] = \dot{\mathbf{H}}_{\tauп}^*.$$

В силу граничных условий (8.9) эта тангенциальная составляющая магнитного поля во второй среде равна тангенциальной составляющей в первой среде у границы раздела. Следовательно,

$$\dot{\mathbf{H}}_{\tauп}^* = \dot{\mathbf{H}}_\tau^*.$$

Тогда можно записать следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{H}}_n^* [1_n [1_n \dot{\mathbf{H}}]] = -\dot{\mathbf{H}}_\tau \dot{\mathbf{H}}_\tau^* = -|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \quad (9.78)$$

Подставляя его в формулу (9.77), получаем

$$\dot{\mathbf{P}}_{дн}^n = 1_n \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_m |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2).$$

Используя выражение для волнового сопротивления металла (9.69) и взяв действительную часть, находим окончательное соотношение для вектора Пойнтинга в реальном металле:

$$\dot{\mathbf{P}}_{дн}^n = 1_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\gamma_{a2}}} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \quad (9.79)$$

Мощность, теряемую в реальном металле площадью S_1 , на которую падает электромагнитная волна, определяют путем интегрирования вектора Пойнтинга по этой поверхности:

$$P_{\text{пот}} = \int_{S_1} \dot{\mathbf{P}}_{дн}^n dS, \\ P_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\gamma_{a2}}} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS. \quad (9.80)$$

Для расчета мощности, теряемой в реальном металле, необходимо знать параметры металла, частоту колебаний и значение тангенциальной составляющей магнитного поля у границы раздела с реальным металлом.

ГЛАВА 10

КАРТИНЫ ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ У ИДЕАЛЬНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПАДЕНИИ НА НЕЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ. ДУХПЛОСКОСТНОЙ ВОЛНОВОД

§ 10.1. Постановка вопроса

Для локализации электромагнитного поля и направления его в желаемую сторону часто используют металлические плоскости различных конфигураций. Рассмотрим картины поля, возникающие у идеальной металлической плоскости при падении на нее плоской волны. Анализ этого простейшего случая облегчит понимание более сложных процессов, происходящих в реальных системах, предназначенных для канализаций электромагнитного поля. Покажем, что между двумя металлическими плоскостями возможно распространение электромагнитной энергии и определим условия, при которых оно происходит. Поскольку вектор \mathbf{E} может быть ориентирован