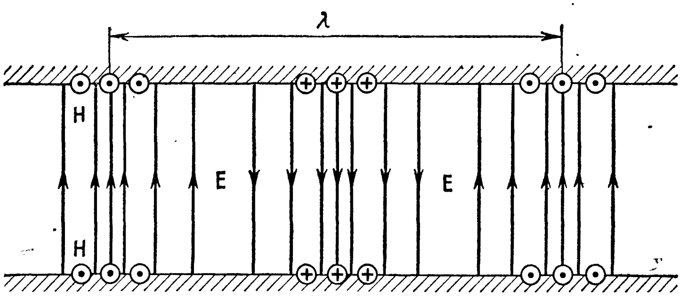

Рис. 10.13

тирован вдоль оси волновода. Подобная волна не обладает продольными составляющими электрического и магнитного полей и называется волной типа T. Поскольку вектор Пойнтинга в такой волне совпадает с осью распространения, фазовая скорость волны типа T равна скорости света в среде, заполняющей волновод. Из выражения (10.2) следует, что угол падения φ такой волны должен быть равен 90°.

ГЛАВА 11
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЛНАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ТИПОВ

§ 11.1. Постановка вопроса

В гл. 10 были рассмотрены теоретически простейшие, физически нереальные устройства, канализирующие электромагнитные волны. При этом была установлена для двух случаев поляризации вектора **E** падающей волны возможность существования в канализирующих системах волн электрического и магнитного типов. В случае какого-либо промежуточного положения вектор **E** падающей волны может быть разложен на две составляющие: 1) находящуюся в плоскости падения; 2) лежащую в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. При этом в канализирующей системе будут существовать две независимые волны — типов E и H и суммарное поле образуется в результате суперпозиции этих колебаний. В ряде важных практических устройств указанные волны существуют раздельно, и специально обеспечиваются условия существования волн одного или другого типа. Поэтому представляет интерес изучение общих условий, при которых возможно их существование, и определение соотношений, связывающих составляющие поля для волн типа E или H. Математически эта задача сводится к исследованию уравнений Максвелла в отсутствие продольной составляющей либо поля **H**, либо поля **E**. В настоящей главе будет проведено такое исследование в самом общем случае использования обобщенной ортогональной криволинейной системы координат. При этом в качестве продольной оси, вдоль которой распространяется поле, будет выбрана ось ζ. Тогда волнам электрического типа будет соответствовать равенство нулю продольной составляющей магнитного поля: $\mathbf{H}_\zeta = 0$ и волнам магнитного типа — условие $\mathbf{E}_\zeta = 0$.

§ 11.2. Система скалярных уравнений Максвелла в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат

В основу анализа положены векторные уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (2.12) и (2.13). Здесь не рассматриваются вопросы возбуждения электромагнитного поля заданной системы токов $\dot{\mathbf{J}}_э$ и $\dot{\mathbf{J}}_м$, в силу чего токи следует положить равными нулю. При этом уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}, \tag{11.1}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}. \tag{11.2}$$

Запишем векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в развернутой форме в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат ξ, η, ζ (см. приложение I):

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\xi \dot{E}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{E}_\eta + \mathbf{1}_\zeta \dot{E}_\zeta, \tag{11.3}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\xi \dot{H}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{H}_\eta + \mathbf{1}_\zeta H_\zeta, \tag{11.4}$$

где $\mathbf{1}_\xi$, $\mathbf{1}_\eta$, $\mathbf{1}_\zeta$ — орты, соответствующие координатам ξ, η, ζ.

Используя выражение для ротора вектора $\mathbf{a}$, приведенное в приложении II, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = {} & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\} + \\ & + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\},\end{aligned} \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = {} & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{H}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)\right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{1}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{H}_\zeta h_\zeta)\right\} + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{H}_\xi h_\xi)\right\},\end{aligned} \tag{11.6}$$

где h_ξ, h_η, h_ζ — коэффициенты Лямэ, соответствующие координатам ξ, η, ζ.

Подставив выражения (11.3), (11.4), (11.5), (11.6) в уравнения (11.1), (11.2) и приравняв в левой и правой частях члены при одинаковых ортах, получаем из каждого векторного уравнения

Максвелла по три скалярных уравнения:

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot H_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot H_\eta h_\eta)\right\}=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\xi, \tag{11.7}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot H_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot H_\zeta h_\zeta)\right\}=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\eta, \tag{11.8}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot H_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot H_\xi h_\xi)\right\}=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\xi, \tag{11.9}$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot E_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot E_\eta h_\eta)\right\}=-j\omega\tilde\mu_a\dot H_\xi, \tag{11.10}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot E_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot E_\zeta h_\zeta)\right\}=-j\omega\tilde\mu_a\dot H_\eta, \tag{11.11}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot E_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot E_\xi h_\xi)\right\}=-j\omega\tilde\mu_a\dot H_\zeta. \tag{11.12}$$

Система (11.7) представляет собой систему скалярных уравнений Максвелла в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат.

§ 11.3. Волны электрического и магнитного типов

Для волн электрического типа в уравнении (11.7) следует положить

$$\dot H_\zeta=0. \tag{11.13}$$

При этом скалярные уравнения Максвелла запишутся в следующей форме:

$$-\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot H_\eta h_\eta)=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\xi, \tag{11.14}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot H_\xi h_\xi)=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\eta, \tag{11.15}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot H_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot H_\xi h_\xi)\right\}=j\omega\tilde\varepsilon_a\dot E_\zeta, \tag{11.16}$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot E_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot E_\eta h_\eta)\right\}=-j\omega\tilde\mu_a\dot H_\xi, \tag{11.17}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot E_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot E_\zeta h_\zeta)\right\}=-j\omega\tilde\mu_a\dot H_\eta, \tag{11.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot E_\eta h_\eta)=\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot E_\xi h_\xi). \tag{11.19}$$

Попробуем выразить поперечные к направлению распространения ζ составляющие поля $\dot H_\xi$, $\dot H_\eta$, $\dot E_\xi$, $\dot E_\eta$ через продольную составляющую $\dot E_\zeta$ и получить уравнение, в котором содержалась бы только эта продольная составляющая. Если бы эта операция была возможна, то отыскание составляющих поля в конкретных канализирующих системах существенно упростилось бы. Необходимо было бы решить уравнение для продольной составляющей $\dot E_\zeta$, а затем с помощью формул, связывающих поперечные составляющие поля с $\dot{E}_\zeta$, можно было бы определить и поперечные составляющие.

Умножим уравнение (11.18) на коэффициент Лямэ h_η и выразим функцию $\dot{H}_\eta h_\eta$:

$$\dot{H}_\eta h_\eta = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}. \tag{11.20}$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (11.14), предварительно умножив последнее на коэффициент Лямэ h_ξ:

$$-\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}\right\rangle = j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\xi h_\xi).$$

Сгруппируем члены, содержащие $(\dot{E}_\xi h_\xi)$:

$$j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\xi h_\xi) + \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\} =$$
$$= \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}. \tag{11.21}$$

Умножим уравнение (11.17) на коэффициент Лямэ h_ξ и выразим функцию $\dot{H}_\xi h_\xi$:

$$\dot{H}_\xi h_\xi = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}. \tag{11.22}$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (11.15), предварительно умножив последнее на коэффициент Лямэ h_η:

$$\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle = j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\eta h_\eta).$$

Сгруппируем члены, содержащие $(\dot{E}_\eta h_\eta)$:

$$j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\eta h_\eta) + \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\} =$$
$$= \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}. \tag{11.23}$$

Подставим функцию $\dot{E}_\xi h_\xi$ в выражение (11.20) из уравнения (11.14):

$$\dot{H}_\eta h_\eta = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{-\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)\right\} -$$
$$-\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta).$$

Сгруппировав члены, получаем

$$(\dot{H}_\eta h_\eta) + \frac{1}{\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)\right\} =$$
$$= -\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta). \tag{11.24}$$

Далее подставим функцию $\dot{E}_\eta h_\eta$ в выражение (11.22) из уравнения (11.15):

$$\dot{H}_\xi h_\xi = -\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)\right\} + \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta).$$

Сгруппировав члены, находим

$$\dot{H}_\xi h_\xi + \frac{1}{\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_2}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)\right\} = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta). \quad (11.25)$$

Выражения (11.21), (11.23), (11.24) и (11.25) дают связь поперечных составляющих поля с продольной составляющей $\dot{E}_\zeta$, однако она имеет сложный, дифференциальный характер, так как вторые члены в этих выражениях, содержащие искомые функции, стоят под знаком производных по координате ζ.

Для определения уравнения, содержащего только продольную составляющую электрического поля $\dot{E}_\zeta$, используют уравнение (11.16), в которое подставляют выражения (11.20) и (11.22):

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}\right\rangle - \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle = j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\zeta h_\zeta).$$

Перегруппируем несколько это уравнение:

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}\right\rangle + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\zeta h_\zeta) = \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle. \quad (11.26)$$

В нем помимо составляющей $\dot{E}_\zeta$ содержатся составляющие $\dot{E}_\xi$ и $\dot{E}_\eta$. Попробуем их исключить. Из уравнений (11.14), (11.15) получаем

$$h_\zeta j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\xi h_\eta) = -\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta), \quad (11.27)$$

$$h_\zeta j\omega\tilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\eta h_\xi) = \frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi). \quad (11.28)$$

Продифференцируем выражение (11.27) по ξ и (11.28) по η:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta) = -j\omega\tilde{\varepsilon}_a\frac{\partial}{\partial\xi}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}, \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi) = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\frac{\partial}{\partial\eta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}. \quad (11.30)$$

Далее продифференцируем уравнение (11.16) по ζ:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)-\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \qquad (11.31)$$

Подставим в уравнение (11.31) соотношения (11.29), (11.30) и произведем сокращение на $j\omega\tilde{\varepsilon}_a$:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial}{\partial\eta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}=-\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \qquad (11.32)$$

Продифференцируем это соотношение по ζ:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}=-\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(h_\xi h_\eta \dot{E}_\zeta). \qquad (11.33)$$

Выражение (11.33) устанавливает связь между вторыми производными составляющих $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$ и второй производной составляющей $\dot{E}_\zeta$. Эта связь может быть использована для исключения составляющих $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$ из правой части уравнения (11.26). Сравним правую часть уравнения (11.26) с левой частью уравнения (11.33):

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}.$$

Если допустить, что коэффициенты Лямэ h_ξ и h_η не являются функциями координаты ζ и коэффициент h_ζ равен единице (ζ — прямолинейная координата), то правую часть уравнения (11.26) можно записать в виде

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\xi)\right\}.$$

При указанных ограничениях в отношении коэффициентов Лямэ уравнение (11.33) можно представить (после деления на произведение коэффициентов Лямэ $h_\xi h_\eta$ правой и левой частей) таким образом:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\xi)\right\}=-\frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial\zeta^2}. \qquad (11.34)$$

Следовательно, правая часть уравнения (11.26) стала равной левой части уравнения (11.34) и может быть заменена на правую часть выражения (11.34). В результате такой операции получается уравнение, в которое входит только продольная составляющая электрического поля $\dot{E}_\zeta$:

$$\frac{\partial^2\dot{E}_\zeta}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_\zeta}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{E}_\zeta}{\partial\eta}\right)\right\}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\zeta=0. \qquad (11.35)$$

Уравнение справедливо при выполнении указанных ограничений относительно коэффициентов Лямэ используемой системы координат.

Математически эти ограничения могут быть записаны в следующей форме:

$$h_\xi,\ h_\eta \neq f(\zeta), \quad h_\zeta = 1. \tag{11.36}$$

Физически подобные ограничения сводятся к тому, что рассматриваемая система, канализирующая электромагнитные волны, должна быть прямолинейной вдоль оси распространения ζ, и коэффициенты Лямэ используемой системы координат не должны меняться по мере продвижения вдоль этой оси.

Принятые ограничения позволяют упростить формулы связывающие поперечные составляющие поля с продольной составляющей. Так, вместо выражений (11.21), (11.23), (11.24), (11.25) можно записать соответственно:

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta} \tag{11.37}$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \eta \partial \zeta}, \tag{11.38}$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \xi}, \tag{11.39}$$

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \eta}. \tag{11.40}$$

Связь поперечных составляющих, хотя и несколько упростилась, но все же носит достаточно сложный, дифференциальный характер.

Решение конкретной электродинамической задачи для поля типа E теперь представляется в следующем виде.

Прежде всего должно быть решено в конкретной системе координат при соблюдении ограничений (11.36) уравнение (11.35). После определения продольной составляющей поля $\dot{E}_\zeta$ поперечные составляющие поля находят с помощью соотношений (11.37)—(11.40), т. е. путем решения дифференциальных уравнений. В дальнейшем будут определены пути упрощения этой процедуры.

Для волны типа H, когда продольная составляющая поля $\dot{E}_\zeta = 0$, все рассуждения могли бы быть аналогичными. Однако вывод существенно упрощается за счет использования принципа перестановочной двойственности.

Действительно, при проведении перестановок вида

$$\dot{\mathrm{E}} \rightleftarrows \dot{\mathrm{H}}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \rightleftarrows -\tilde{\mu}_a$$

система исходных уравнений Максвелла не изменяется, составляющая $\dot{H}_\zeta = 0$ заменяется составляющей

$$\dot{E}_\zeta = 0 \tag{11.41}$$

и вместо волны электрического типа возникает волна магнитного типа.

При этом исходное уравнение (11.35) для составляющей $\dot{E}_\zeta$ заменяется аналогичным уравнением для составляющей $\dot{H}_\zeta$:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta}\right)\right\} + \\ + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_\zeta = 0. \qquad (11.42)$$

Выражения для поперечных составляющих поля (11.37)—(11.40) в случае волны магнитного типа записываются в таком виде:

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta}, \qquad (11.43)$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \eta \partial \zeta}, \qquad (11.44)$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi}, \qquad (11.45)$$

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a}\cdot\frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta}. \qquad (11.46)$$

Проведенный анализ показывает, что определение поперечных составляющих поля через продольные составляющие в случае волн электрического и магнитного типов может быть достаточно простым, если известна зависимость этих составляющих от координаты ζ. Тогда в выражениях (11.37)—(11.40) и (11.43)—(11.46) вторые производные поперечных составляющих поля по координате ζ могут быть определены и задача нахождения поперечных составляющих поля сведется к дифференцированию выражений для $\dot{E}_\zeta$ или $\dot{H}_\zeta$, определенных путем решения уравнения (11.35) или (11.42). В дальнейшем этот путь и будет использован при исследовании процессов в волноводах и объемных резонаторах.

ГЛАВА 12
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЦЕССАХ В ВОЛНОВОДАХ — РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, КАНАЛИЗИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 12.1. Постановка вопроса

В гл. 10 были рассмотрены процессы, происходящие в двуплоскостной канализирующей системе, в которой могут возникать волны электрического или магнитного типа, распространяющиеся с фазовой скоростью, большей скорости света в среде, заполняющей пространство между плоскостями. Система исследовалась в предположении бесконечной протяженности плоскостей, ограничивающих поле, и вследствие этого была физически нереальной. Подобную систему называют *волноводом быстрых волн.*