При этом исходное уравнение (11.35) для составляющей $\dot{E}_\zeta$ заменяется аналогичным уравнением для составляющей $\dot{H}_\zeta$:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta} \right) \right\} + \\ + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_\zeta = 0. \tag{11.42}$$

Выражения для поперечных составляющих поля (11.37)—(11.40) в случае волны магнитного типа записываются в таком виде:

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta}, \tag{11.43}$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \eta \partial \zeta}, \tag{11.44}$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi}, \tag{11.45}$$

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta}. \tag{11.46}$$

Проведенный анализ показывает, что определение поперечных составляющих поля через продольные составляющие в случае волн электрического и магнитного типов может быть достаточно простым, если известна зависимость этих составляющих от координаты ζ. Тогда в выражениях (11.37)—(11.40) и (11.43)—(11.46) вторые производные поперечных составляющих поля по координате ζ могут быть определены и задача нахождения поперечных составляющих поля сведется к дифференцированию выражений для $\dot{E}_\zeta$ или $\dot{H}_\zeta$, определенных путем решения уравнения (11.35) или (11.42). В дальнейшем этот путь и будет использован при исследовании процессов в волноводах и объемных резонаторах.

ГЛАВА 12
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЦЕССАХ В ВОЛНОВОДАХ — РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, КАНАЛИЗИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 12.1. Постановка вопроса

В гл. 10 были рассмотрены процессы, происходящие в двуплоскостной канализирующей системе, в которой могут возникать волны электрического или магнитного типа, распространяющиеся с фазовой скоростью, большей скорости света в среде, заполняющей пространство между плоскостями. Система исследовалась в предположении бесконечной протяженности плоскостей, ограничивающих поле, и вследствие этого была физически нереальной. Подобную систему называют *волноводом быстрых волн.*

В гл. 9 описывались процессы, возникающие в случае полного внутреннего отражения. Было установлено [см. формулу (9.53)], что фазовая скорость поверхностной волны меньше скорости света в среде, где эта волна распространяется. На рис. 9.4 была показана идеализированная система, позволяющая канализировать электромагнитное поле с фазовой скоростью, меньшей скорости света. Идеализация заключалась в допущении бесконечной протяженности диэлектрической пластины в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. Такую канализирующую систему называют *волноводом медленных волн*.

Рассмотренные в гл. 7 плоские волны распространяются в пространстве с фазовой скоростью, равной скорости света в этом пространстве. Могут быть реальные системы, канализирующие электромагнитное поле с фазовой скоростью, равной скорости света. Вектор Пойнтинга в них ориентирован вдоль оси системы и образован поперечными по отношению к этой оси составляющими электромагнитного поля. Продольные составляющие поля

$$\dot{E}_\zeta = \dot{H}_\zeta = 0. \tag{12.1}$$

Подобную волну называют *поперечной электромагнитной волной* или *волной типа* Т.

Таким образом, возможно принципиальное разделение волноводных устройств на три группы: 1) волноводы быстрых волн; 2) волноводы медленных волн; 3) волноводы, использующие волну типа Т. Далее будут высказаны основные соображения, касающиеся волноводов каждой из этих групп.

§ 12.2. Основные сведения о процессах в волноводах быстрых волн

Для волн электрического или магнитного типа справедливы уравнения (11.35), (11.42), аналогичные по математической форме. Рассмотрим какое-либо из этих уравнений, например (11.35).

Зависимость поля $\dot{E}_\zeta$ от поперечных координат определяется видом конкретной координатной системы и особенностями конкретной задачи. Попробуем определить зависимость поля $\dot{E}_\zeta$ от продольной координаты ζ. Для этого проведем разделение переменных в уравнении (11.35) по методу Фурье.

Представим $\dot{E}_\zeta$ в виде произведения двух функций:

$$\dot{E}_\zeta = \dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0}(\xi,\ \eta). \tag{12.2}$$

Функция $\dot{Z}$ зависит от координаты ζ и не зависит от координат ξ, η.

Функция $\dot{E}_{\zeta 0}(\xi, \eta)$ зависит от координат ξ, η и не зависит от координаты ζ. Подставив выражение (12.2) в уравнение (11.35), получаем

$$\dot{E}_{\zeta 0}\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} + \dot{Z}\,\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\right)\right\} +$$
$$+ \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0} = 0.$$

Разделив это уравнение на произведение $\dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0}$, находим

$$\frac{1}{\dot{Z}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\dot{E}_{\zeta 0}} \cdot \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta} \right) \right\} = -\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a. \quad (12.3)$$

В полученном соотношении сумма функций координат ζ и ξ, η равна постоянной величине $-\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a$. Такое равенство осуществимо, если каждая из этих функций в отдельности равна постоянному числу, т. е. если соблюдаются соотношения

$$\frac{1}{\dot{Z}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} = -\gamma_в^2, \quad (12.4)$$

$$\frac{1}{\dot{E}_{\zeta 0}} \cdot \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial E_{\zeta 0}}{\partial \eta} \right) \right\} = -\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a + \gamma_в^2. \quad (12.5)$$

Назовем $\gamma_в$ *коэффициентом распространения поля в волноводе.*

Подставив эти соотношения в уравнение (12.3), убеждаемся в равенстве левой и правой частей.

Соотношения (12.4) и (12.5) позволяют получить следующие уравнения для функций $\dot{Z}$ и $\dot{E}_{\zeta 0}$:

$$\frac{d^2 \dot{Z}}{d\zeta^2} + \gamma_в^2 \dot{Z} = 0, \quad (12.6)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta} \right) \right\} + (\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - \gamma_в^2) \dot{E}_{\zeta 0} = 0. \quad (12.7)$$

Вводя обозначение

$$\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - \gamma_в^2 = g^2, \quad (12.8)$$

где g — *поперечное волновое число в волноводе,*
получаем

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta} \right) \right\} + g^2 \dot{E}_{\zeta 0} = 0. \quad (12.9)$$

Аналогичное уравнение может быть получено для составляющей $\dot{H}_{\zeta 0}$ в случае волн магнитного типа:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial H_{\zeta 0}}{\partial \eta} \right) \right\} + g^2 \dot{H}_{\zeta 0} = 0. \quad (12.10)$$

Справедлива также формула, эквивалентная (12.2):

$$\dot{H}_\zeta = \dot{Z} \dot{H}_{\zeta 0} (\xi, \eta). \quad (12.11)$$

Решение обыкновенного уравнения второго порядка (12.6) можно записать в форме

$$\dot{Z} = A_1 e^{-j\gamma_в \zeta} + A_2 e^{j\gamma_в \zeta}. \quad (12.12)$$

Коэффициент распространения поля в волноводе $\gamma_в$ аналогичен по смыслу коэффициенту распространения γ плоской волны [см. формулу (7.10)].

Из выражения (12.8) следует, что

$$\gamma_{\text{в}}^2 = \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2. \tag{12.13}$$

Сравнивая это выражение с (7.10), видим, что коэффициент распространения поля в волноводе $\gamma_{\text{в}}$ отличен от коэффициента распространения γ для плоских волн.

Как и в случае плоских волн, $\gamma_{\text{в}}$ может быть комплексной величиной, если среда, заполняющая волновод, обладает потерями ($\tilde{\mu}_a$, $\tilde{\varepsilon}_a$ комплексны). Значения действительной и мнимой частей $\gamma_{\text{в}}$ будут отличны от соответствующих значений коэффициента фазы β и коэффициента, затухания α, определяемых соотношениями (7.27) и (7.28).

Действительную часть $\gamma_{\text{в}}$ обозначим h, а мнимую h''. Тогда

$$\gamma_{\text{в}} = h - jh''. \tag{12.14}$$

Действительную часть h коэффициента распространения называют *продольным волновым числом*, а мнимую часть h'' —*коэффициентом затухания поля в волноводе за счет потерь в диэлектрике, заполняющем волновод.*

Подставляя формулу (12.14) в (12.12), получаем выражение

$$\dot{Z} = A_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} + A_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta}, \tag{12.15}$$

которое после подстановки в (12.2) дает

$$\dot{E}_\zeta = A_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} \dot{E}_{\zeta 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta} \dot{E}_{\zeta 0}. \tag{12.16}$$

Далее можно провести рассуждения, аналогичные изложенным в § 7.3.

Перейдем от комплексной амплитуды $\dot{E}_\zeta$ к мгновенному значению этой составляющей. На основании формул (1.157) такой переход осуществляется с помощью соотношений вида

$$E_\zeta(t) = \operatorname{Re}(\dot{E}_\zeta e^{j\omega t}), \tag{12.17}$$

$$E_\zeta(t) = \operatorname{Re}\{A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h\zeta)} \dot{E}_{\zeta 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h\zeta)} \dot{E}_{\zeta 0}\}.$$

Считая $\dot{E}_{\zeta 0} = |E_{\zeta 0}| e^{j\varphi_1}$, получаем

$$\begin{aligned} E_\zeta(t) &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h\zeta + \varphi_1)} |\dot{E}_{\zeta 0}| + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h\zeta + \varphi_1)} |\dot{E}_{\zeta 0}|\} = \\ &= A_1 e^{-h''\zeta} |\dot{E}_{\zeta 0}| \cos(\omega t - h\zeta + \varphi_1) + \\ &+ A_2 e^{h''\zeta} |\dot{E}_{\zeta 0}| \cos(\omega t + h\zeta + \varphi_1). \end{aligned} \tag{12.18}$$

Рассмотрим скорость перемещения вдоль оси ζ точек фиксированной фазы, или фазовую скорость первого слагаемого в выражении (12.18). Для этого зафиксируем время t и координату ζ, положив $t = t_1$, $\zeta = \zeta_1$. При этом фаза получит фиксированное значение $\omega t_1 - h\zeta_1 + \varphi_1$. Далее дадим времени t приращение dt, координате ζ—приращение $d\zeta$ и новое значение фазы приравняем прежнему фиксированному значению:

$$\omega t_1 - h\zeta_1 + \varphi_1 = \omega(t_1 + dt) - h(\zeta_1 + d\zeta) + \varphi_1.$$

Сокращая одинаковые члены, получаем

$$d\zeta/dt = v_ф = \omega/h. \qquad (12.19)$$

Аналогичная операция со вторым слагаемым в выражении (12.18) приводит к соотношению

$$v_ф = -\omega/h. \qquad (12.20)$$

Полученные результаты позволяют утверждать, что первое слагаемое в выражении (12.18) представляет собой электромагнитную волну, распространяющуюся в сторону положительных значений оси ζ, т. е. падающую волну в волноводе; второе слагаемое — волну, распространяющуюся в сторону отрицательных значений оси ζ, т. е. отраженную волну. Падающая волна при наличии потерь убывает по мере роста координаты ζ, а отраженная волна возрастает по мере приближения к отразившему ее препятствию. В волноводной системе без потерь коэффициент h'' равен нулю и амплитуда поля остается неизменной.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для волн магнитного типа. При этом вместо формул (12.16), (12.18) следует записать

$$\dot{H}_\zeta = B_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} \dot{H}_{\zeta 0} + B_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta} \dot{H}_{\zeta 0}, \qquad (12.21)$$

$$\dot{H}_\zeta(t) = B_1 e^{-h''\zeta} |\dot{H}_{\zeta 0}| \cos(\omega t - h\zeta + \varphi_2) + \\ + B_2 e^{h''\zeta} |\dot{H}_{\zeta 0}| \cos(\omega t + h\zeta + \varphi_2). \qquad (12.22)$$

Выражение для фазовой скорости (12.19) позволяет сделать важные выводы. Рассмотрим его подробнее. Из выражений (12.13) и (12.14) следует, что

$$\gamma_в = h - jh'' = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}, \qquad (12.23)$$

где

$$h = \mathrm{Re}\sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}, \qquad (12.24)$$

$$h'' = \mathrm{Im}\sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}. \qquad (12.25)$$

Допустим для простоты, что потерь нет и

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}. \qquad (12.26)$$

При этом

$$h'' = 0 \qquad (12.27)$$

и фазовая скорость

$$v_ф = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}},$$

или

$$v_ф = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}, \qquad (12.28)$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \qquad (12.29)$$

— скорость света в среде с параметрами μ_a, ε_a.

Если g — действительное число и $g^2 > 0$, то при условии соблюдения неравенства

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} < 1 \qquad (12.30)$$

$v_ф$ — действительное число и

$$v_ф > c. \qquad (12.31)$$

При этом в волноводной системе распространяются быстрые волны.

При условии соблюдения неравенства

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} > 1 \qquad (12.32)$$

$v_ф$ — мнимое число и распространение волн прекращается.

В справедливости этого легко убедиться, записав выражение (12.26) в виде

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}. \qquad (12.33)$$

При выполнении условия (12.32)

$$h = -j\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}. \qquad (12.34)$$

При этом первое слагаемое в выражении (12.21), соответствующее падающей волне, с учетом равенства (12.27) может быть записано таким образом:

$$\dot{H}_\zeta = B_1 e^{-j\left(-j\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}\right) z} = B_1 e^{-\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}\, z}. \qquad (12.35)$$

Возникает затухание поля, несмотря на отсутствие потерь в волноводной системе. Это затухание объясняется неблагоприятной интерференцией составляющих поля, пришедших в результате отражения от стенок разными путями в одну и ту же точку волноводной системы.

Критический случай, разграничивающий распространение и затухание волны, наступает при соблюдении условия

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} = 1. \qquad (12.36)$$

Если поперечное волновое число, магнитную и диэлектрическую проницаемости считать постоянными и изменять угловую частоту ω, то критический случай, соответствующий критической угловой частоте, наступает при соблюдении равенства

$$\frac{g^2}{\omega^2_{кр}\mu_а\varepsilon_а}=1, \qquad (12.37)$$

откуда

$$\omega_{кр}=\frac{g}{\sqrt{\mu_а\varepsilon_а}}=gc. \qquad (12.38)$$

При

$$\omega>\omega_{кр} \qquad (12.39)$$

возникает неравенство (12.30) и волна распространяется в волноводной системе.

В случае

$$\omega<\omega_{кр} \qquad (12.40)$$

справедливо неравенство (12.32) и поле затухает в волноводной системе.

При

$$\omega=\omega_{кр} \qquad (12.41)$$

справедливо соотношение (12.37). В соответствии с выражением (12.28) фазовая скорость при этом стремится к бесконечности.

Волноводная система заполнена полем, составляющие поля вдоль оси ζ находятся в одной фазе, но распространения поля вдоль оси нет.

С помощью (12.38) легко получить формулы для критической частоты $f_{кр}$ и критической длины волны $\lambda_{кр}$:

$$f_{кр}=\frac{gc}{2\pi}, \qquad (12.42)$$

$$\lambda_{кр}=\frac{c}{f_{кр}}=\frac{2\pi}{g}. \qquad (12.43)$$

При

$$\lambda<\lambda_{кр} \qquad (12.44)$$

распространение поля в волноводной системе возможно.

При

$$\lambda>\lambda_{кр} \qquad (12.45)$$

возникает затухание в волноводе.

При

$$\lambda=\lambda_{кр} \qquad (12.46)$$

волноводная система заполнена полем, составляющие поля вдоль оси ζ находятся в одинаковой фазе, но распространения поля вдоль оси ζ не происходит.

На основании проведенного рассмотрения можно утверждать, что волноводная система быстрых волн пропускает, фильтрует электромагнитные колебания с частотами, бóльшими критической частоты или соответственно с длинами волн, меньшими критической длины волны. Таким образом, подобные волноводные системы можно считать фильтрами высоких частот.

В § 7.4 было получено выражение для групповой скорости или скорости распространения информации при переносе ее плоскими волнами [см. выражение (7.41)]. Если электромагнитное поле определенного спектрального состава распространяется не в свободном пространстве, а в волноводе, то вывод выражения для групповой скорости поля в волноводе ничем не отличается от вывода, проведенного в § 7.4. Следует только коэффициент фазы в свободном пространстве β заменить продольным волновым числом h. При этом групповая скорость поля в волноводе

$$v_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dh}\bigg|_{\substack{\omega=\omega_0\\ h=h_0}}=\frac{1}{dh/d\omega}\bigg|_{\substack{\omega=\omega_0\\ h=h_0}}. \tag{12.47}$$

Подставляя сюда выражение для h (12.26) и дифференцируя, получаем

$$v_{\text{гр}}=\frac{1}{\dfrac{2\omega\mu_a\varepsilon_a}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g^2}}}\Bigg|_{\omega=\omega_0},$$

или с учетом равенства (12.29)

$$v_{\text{гр}}=c\sqrt{1-\frac{g^2}{\omega_0^2\mu_a\varepsilon_a}}. \tag{12.48}$$

Сравнивая полученное выражение с формулой для фазовой скорости (12.28), можно вывести следующее соотношение:

$$v_{\text{гр}}v_{\text{ф}}=c^2. \tag{12.49}$$

Как следует из формулы (12.48),

$$v_{\text{гр}}<c. \tag{12.50}$$

Таким образом, скорость переноса информации в волноводах не может быть больше скорости света в среде, заполняющей волноводную систему.

§ 12.3. Упрощение уравнений, связывающих поперечные составляющие поля с продольными, при использовании волноводов быстрых волн

Рассмотрим соотношения, справедливые для падающей волны электрического типа. В соответствии с выражением (12.2) и (12.12) напишем (положив $A_1=1$)

$$\dot{E}_\zeta=\dot{E}_{\zeta0}e^{-i\gamma_{\text{в}}\zeta}. \tag{12.51}$$

Аналогичная зависимость от координаты ζ существует для поперечных составляющих поля, так как фазовая скорость у всех составляющих поля должна быть одинаковой. В силу этого справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\xi &= \dot{E}_{\xi 0} e^{-j\gamma_в \zeta}, \\ \dot{E}_\eta &= \dot{E}_{\eta 0} e^{-j\gamma_в \zeta}, \\ \dot{H}_\xi &= \dot{H}_{\xi 0} e^{-j\gamma_в \zeta}, \\ \dot{H}_\eta &= \dot{H}_{\eta 0} e^{-j\gamma_в \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{12.52}$$

Подставим выражения для $\dot{E}_\xi$ и $\dot{E}_\zeta$ в уравнение (11.37):

$$\dot{E}_{\xi 0} e^{-j\gamma_в \zeta} - \frac{\gamma_в^2}{\omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а} \dot{E}_{\xi 0} e^{-j\gamma_в \zeta} = \frac{-j\gamma_в}{\omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а} \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}.$$

Умножим полученное соотношение на $\omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а$ и сгруппируем члены:

$$\dot{E}_{\xi 0} e^{-j\gamma_в \zeta} (\omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а - \gamma_в^2) = -j \frac{\gamma_в}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}.$$

Далее, используя первое из соотношений (12.52) и формулу (12.8), получаем

$$\dot{E}_\xi = -j \frac{\gamma_в}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}. \tag{12.53}$$

Аналогично могут быть получены выражения для поперечных составляющих поля в случае волн электрического типа:

$$\dot{E}_\eta = -j \frac{\gamma_в}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.54}$$

$$\dot{H}_\xi = j \frac{\omega \tilde{\varepsilon}_а}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.55}$$

$$\dot{H}_\eta = -j \frac{\omega \tilde{\varepsilon}_а}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.56}$$

$$\dot{H}_\zeta = 0. \tag{12.57}$$

Подобным же образом можно найти формулы для поперечных составляющих поля в случае волн магнитного типа. Эти формулы легко вывести с помощью принципа перестановочной двойственности. Осуществим в выражениях (12.53)—(12.57) перестановки вида $\dot{\mathbf{H}} \rightleftarrows \dot{\mathbf{E}}$, $\tilde{\varepsilon}_а \to \tilde{\mu}_а$:

$$\dot{H}_\xi = -j \frac{\gamma_в}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.58}$$

$$\dot{H}_\eta = -j \frac{\gamma_в}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.59}$$

$$\dot{E}_\xi = -j \frac{\omega \tilde{\mu}_а}{h_\eta g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \eta} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.60}$$

$$\dot{E}_\eta = j \frac{\omega \tilde{\mu}_а}{h_\xi g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \xi} e^{-j\gamma_в \zeta}, \tag{12.61}$$

$$\dot{E}_\zeta = 0. \tag{12.62}$$

Можно также записать выражение, аналогичное (12.51),

$$\dot{H}_\zeta = \dot{H}_{\zeta 0} e^{-j\gamma_в \zeta}. \tag{12.63}$$

Полученные соотношения называют формулами перехода от продольных составляющих поля к поперечным. Не следует забывать, что они справедливы при соблюдении ограничений (11.36).

Если потери в волноводных системах отсутствуют, то в выведенных соотношениях требуется осуществить изменения вида

$$\tilde{\varepsilon}_а \longrightarrow \varepsilon_а, \quad \tilde{\mu}_а \longrightarrow \mu_а, \quad \gamma_в \longrightarrow h. \tag{12.64}$$

Отметим, что выведенные формулы не учитывают потерь в металлических стенках волновода, ограничивающих поле. Учтенные путем введения коэффициента затухания h'' потери — это потери в среде, заполняющей волновод. Кроме коэффициента затухания h'', возникающего за счет потерь в диэлектрике, заполняющем волновод, может возникнуть коэффициент затухания h', характеризующий затухание поля за счет потерь в металле.

При этом коэффициент распространения поля в волноводе

$$\gamma_в = h - jh' - jh''. \tag{12.65}$$

Если потерями в диэлектрике можно пренебречь, а потери в металле должны быть учтены, то

$$\gamma_в = h - jh'. \tag{12.66}$$

Учет потерь, возникающих в металлических стенках волноводной системы, будет проведен в последующих главах.

§ 12.4. Основные сведения о процессах в волноводах медленных волн

В § 12.2 было выведено выражение (12.28) для фазовой скорости в волноводных системах. Было указано, что при действительном поперечном волновом числе g фазовая скорость больше скорости света в среде с параметрами $\mu_а$, $\varepsilon_а$.

Чтобы фазовая скорость стала меньше скорости света, поперечное волновое число должно быть мнимым. Другими словами, поперечное волновое число g в выведенных формулах переходит в jp:

$$g \longrightarrow jp. \tag{12.67}$$

Тогда

$$g^2 \longrightarrow -p^2. \tag{12.68}$$

Учитывая это в формуле (12.28), получаем

$$v_ф = \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{p^2}{\omega^2 \mu_а \varepsilon_а}}}. \tag{12.69}$$

При этом справедливо неравенство

$$v_ф < c. \tag{12.70}$$

Коэффициент распространения в соответствии с выражениями (12.23)—(12.25) в случае медленных волн

$$\gamma_{в} = h - jh'' = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a + p^2}, \qquad (12.71)$$

где

$$h = \operatorname{Re} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a + p^2}, \qquad (12.72)$$

$$h'' = \operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a + p^2}. \qquad (12.73)$$

Если потери в среде, заполняющей волновод, отсутствуют,

$$h'' = 0$$

и

$$\gamma_{в} = h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + p^2}. \qquad (12.74)$$

Так же как и при анализе волноводов быстрых волн, выведенные формулы не учитывают потерь в металлических стенках волновода.

При определении групповой скорости нельзя механически использовать выражение (12.48), заменив в нем g^2 на $-p^2$. При этом получилось бы, что групповая скорость, определяющая скорость передачи информации, стала бы больше скорости света, что противоречит известному положению Эйнштейна. Вывод выражения для групповой скорости необходимо проводить с учетом основных соотношений (12.47) и (12.74). При этом следует считаться с тем, что *поперечное волновое число p в волноводах медленных волн является функцией частоты* ω. Используя формулу (12.47), получаем

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + p^2}} = \frac{1}{\frac{2\omega\mu_a\varepsilon_a + 2p\frac{dp}{d\omega}}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a + p^2}}},$$

$$v_{гр} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + p^2}}{\omega\mu_a\varepsilon_a + p\frac{dp}{d\omega}}. \qquad (12.75)$$

Зная закон изменения поперечного волнового числа p для конкретной замедляющей волноводной системы, можно найти групповую скорость.

Основные уравнения для продольных составляющих поля в случае волн электрического и магнитного типов соответственно записываются следующим образом:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\eta}\right)\right\} - p^2\dot{E}_{\zeta 0} = 0, \qquad (12.76)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\eta}\right)\right\} - p^2\dot{H}_{\zeta 0} = 0. \qquad (12.77)$$

Формулы перехода, связывающие поперечные составляющие поля с продольными, могут быть получены из соотношений (12.53)—(12.62) с учетом выражения (12.68).

При этом получим
для волн электрического типа:

$$\dot{E}_\xi = j\frac{\gamma_в}{h_\xi p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.78)$$

$$\dot{E}_\eta = j\frac{\gamma_в}{h_\eta p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.79)$$

$$\dot{H}_\xi = -j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_а}{h_\eta p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.80)$$

$$\dot{H}_\eta = j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_а}{h_\xi p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.81)$$

$$\dot{H}_\zeta = 0; \qquad (12.82)$$

для волн магнитного типа:

$$\dot{H}_\xi = j\frac{\gamma_в}{h_\xi p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.83)$$

$$\dot{H}_\eta = j\frac{\gamma_в}{h_\eta p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.84)$$

$$\dot{E}_\xi = j\frac{\omega\tilde{\mu}_а}{h_\eta p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.85)$$

$$\dot{E}_\eta = -j\frac{\omega\tilde{\mu}_а}{h_\xi p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\,e^{-j\gamma_в \zeta}, \qquad (12.86)$$

$$\dot{E}_\zeta = 0. \qquad (12.87)$$

Если потери в волноводных системах отсутствуют, то в выведенных соотношениях следует осуществить изменения вида (12.64).

§ 12.5. Основные сведения о процессах в волноводах, канализирующих волны типа Т

Характерным признаком волн типа Т являются равенство нулю продольных составляющих поля [см. выражение (12.1)]. Вектор Пойнтинга в такой волне ориентирован вдоль оси волновода ζ. При этом фронт волны движется вдоль оси волновода и фазовая скорость должна быть равна скорости света в рассматриваемой среде:

$$v_ф = c. \qquad (12.88)$$

В соответствии с выражением (12.28) равенство (12.88) соблюдается при условии

$$g = 0. \qquad (12.89)$$

Поперечное волновое число в случае волн типа Т равно нулю. Это также является характерным признаком волн этого типа.

Из формулы (12.23) следует, что для волн типа Т

$$\gamma_в = \omega\sqrt{\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а}. \qquad (12.90)$$

Сравнивая это выражение с (7.10), можно сделать вывод, что коэффициент распространения в волноводе для волн типа Т равен коэффициенту распространения в неограниченной среде с параметрами $\tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а$:

$$\gamma_в = \gamma. \qquad (12.91)$$

В случае волн типа Т справедливы формулы (7.26), (7.27), (7.28).

Групповая скорость определяется соотношением (12.48). При соблюдении условия $g = 0$

$$v_{гр} = c. \qquad (12.92)$$

Для волн типа Т групповая скорость равна скорости света в среде, заполняющей волновод.

Формулы перехода, связывающие поперечные составляющие поля с продольными, для волн типа Т не могут быть использованы ввиду равенства нулю продольных составляющих.

Соотношения (12.38), (12.42), (12.43) в случае волн типа Т при соблюдении равенства $g = 0$ приводят к следующим результатам:

$$\omega_{кр} = 0, \quad f_{кр} = 0, \quad \lambda_{кр} \to \infty. \qquad (12.93)$$

Критическая частота равна нулю. Это означает, что колебания всех частот, включая постоянный ток, могут распространяться в волноводных системах, использующих волны типа Т. Это является важным преимуществом волн подобного типа.

ГЛАВА 13
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 13.1. Решение основного уравнения для продольных составляющих поля в прямоугольном волноводе

В качестве основного для волн электрического типа следует использовать уравнение (12.9). Очевидно, при анализе прямоугольных электродинамических систем целесообразно применять декартову систему координат. Расположим координатные оси так, как показано на рис. 13.1. Выберем следующее соответствие криволинейных и декартовых координат:

$$\xi \to x, \quad \eta \to y, \quad \zeta \to z,$$
$$h_\xi = h_\eta = 1. \qquad (13.1)$$

Координатная система удовлетворяет ограничениям (11.36) и, следовательно, воз-

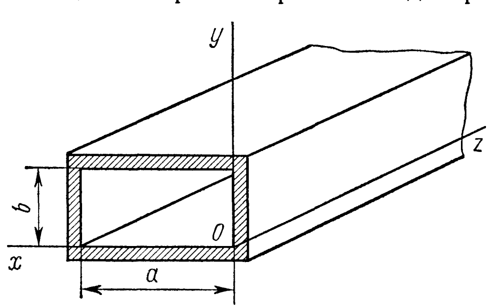

Рис. 13.1