

Рис. 15.3

В качестве примера на рис. 15.3 показана картина поля волны типа E_{01} в коаксиальном волноводе. Волны магнитного типа можно исследовать аналогично.

В настоящее время волны типа E_{mn} или H_{mn} не находят практического применения в коаксиальных волноводах, поскольку потери в коаксиальном волноводе больше потерь в обычном круглом волноводе. Линии передачи коаксиального типа работают на волнах типа Т.

ГЛАВА 16

БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА КАК ПРИМЕР ВОЛНОВОДА МЕДЛЕННЫХ ВОЛН

§ 16.1. Постановка вопроса

Плоская диэлектрическая пластина с параметрами μ_a, ϵ_a толщиной $2d$ в направлении координаты x , бесконечно протяженная вдоль координаты y и оси z (рис. 16.1), помещена в воздухе. При $z < 0$ пластина обрывается и входит в рупор, также бесконечно протяженный вдоль оси y и создающий электромагнитное поле, излучаемое вдоль оси z . В результате воздействия этого поля в пластине

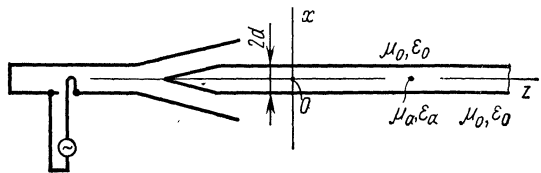


Рис. 16.1

и вокруг нее создается волна, параметры которой необходимо определить. В рупоре, где осуществляется возбуждение пластины, вектор Пойнтинга возбуждающего поля может иметь различное направление относительно нормали к пластине, совпадающей с осью x . Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью x , меньше угла полного внутреннего отражения, то в соответствии с анализом подобных процессов, проведенным в § 9.4, волна, попавшая изнутри диэлектрика на границу раздела диэлектрик—воздух, преломится на границе и выйдет в воздух. Если угол, составленный вектором Пойнтинга и осью x , равен или больше угла полного внутреннего отражения, то такая волна отразится от границы раздела с воздухом и, попав под тем же углом на другую границу раздела, вновь отразится от нее. Этот процесс будет продолжаться по мере продвижения волны вдоль оси z . В результате в диэлектрической пластине возникает волна обычного волноводного типа, распространяющаяся в пластине с фазовой скоростью, превышающей скорость света в диэлектрике c . Другими словами, в пластине будет распространяться быстрая волна. В соответствии с явлением полного внутреннего отражения (см. § 9.4) в воздухе у поверхностей пластины образуется медленная волна, распространяющаяся вдоль оси z , с фазовой скоростью, меньшей скорости света в воздухе c_0 . Обе волны (внутренняя и внешняя) образуют единое электромагнитное поле с одной и той же фазовой скоростью v_ϕ , удовлетворяющей неравенству

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} < v_\phi < c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (16.1)$$

Так как

$$c < c_0, \quad (16.2)$$

соблюдение этого неравенства вполне возможно.

Таким образом, волна, обладающая фазовой скоростью v_ϕ внутри и вне диэлектрика, по отношению к скорости света в диэлектрике может быть быстрой, а по отношению к скорости света в воздухе—медленной. В настоящей главе будут определены параметры подобных волн и выяснены условия их существования.

Разумеется, бесконечно протяженная пластина представляет собой идеализацию реальных волноводных систем, однако это существенно упрощает анализ и позволяет наглядно проследить процессы, происходящие в волноводах медленных волн.

§ 16.2. Вывод основных соотношений

Для определенности дадим вывод основных уравнений для волн электрического типа. Исследование магнитного поля может быть осуществлено аналогично.

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля быстрой волны, распространяющейся в пластине, будет уравнение (12.9).

В декартовой системе координат справедливо соответствие

$$\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \zeta \rightarrow z, h_\xi = h_\eta = 1.$$

При этом основное уравнение записывается в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

Поскольку пластина является бесконечно протяженной вдоль координаты y (волна распространяется вдоль оси z) и нет отражения поля от краев пластины, производная $\partial^2 \dot{E}_{z0} / \partial y^2 = 0$ и основное уравнение записывается в виде

$$d^2 \dot{E}_{z0} / dx^2 + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \quad (16.3)$$

Решением этого уравнения будет соотношение

$$\dot{E}_{z0} = A_1 \cos(gx) + A_2 \sin(gx). \quad (16.4)$$

Остальные составляющие поля, распространяющиеся в пластине, можно получить с помощью общих формул перехода (13.24)—(13.28).

Подставляя в эти формулы решение (16.4), получаем следующие соотношения для составляющих поля быстрой волны, распространяющейся в пластине:

$$\dot{E}_x = -j \frac{h}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (16.5)$$

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega \epsilon_a}{g^2} \{-gA_1 \sin(gx) + gA_2 \cos(gx)\} e^{-jhz}, \quad (16.6)$$

$$\dot{E}_z = \{A_1 \cos(gx) + A_2 \sin(gx)\} e^{-jhz}. \quad (16.7)$$

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля медленной волны, распространяющейся в воздухе, будет уравнение (12.76).

Обозначим продольную составляющую электрического поля в воздухе $\dot{E}_{z0в}$. Переходя к декартовой системе координат и учитывая, что производная $\partial \dot{E}_{z0в} / \partial y = 0$, получаем основное уравнение в форме

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z0в}}{dx^2} - p^2 \dot{E}_{z0в} = 0 \quad (16.8)$$

с решением

$$\dot{E}_{z0в} = B_1 e^{-px} + B_2 e^{px}. \quad (16.9)$$

Поверхностная волна убывает по мере удаления от замедляющей системы, поэтому следует положить

$$B_2 = 0 \quad (16.10)$$

и записать решение в виде

$$\dot{E}_{z0в} = B_1 e^{-px}. \quad (16.11)$$

Формулами перехода от продольной составляющей электрического поля к поперечным составляющим являются соотношения (12.78) — (12.82). Запишем их в декартовой системе координат:

$$\dot{E}_{xв} = j \frac{h}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (16.12)$$

$$\dot{E}_{yв} = j \frac{h}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (16.13)$$

$$\dot{H}_{xв} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial y} e^{-jhz}, \quad (16.14)$$

$$\dot{H}_{yв} = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0в}}{\partial x} e^{-jhz}, \quad (16.15)$$

$$\dot{H}_{zв} = 0. \quad (16.16)$$

Подставляя в эти формулы решение (16.11), получаем соотношения:

$$\dot{E}_{xв} = -j \frac{h}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.17)$$

$$\dot{H}_{yв} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.18)$$

$$\dot{E}_{zв} = B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \quad (16.19)$$

характеризующие поле медленной волны, распространяющейся в воздухе около пластины.

§ 16.3. Четные и нечетные волны. Определение трансцендентных уравнений для поперечных волновых чисел

Для определения поперечных волновых чисел g и p необходимо применить граничные условия на границе раздела диэлектрик — воздух. Из формул (16.5)—(16.7) следует, что каждая составляющая поля в пластине складывается из двух слагаемых. Для упрощения выводов решение обычно проводят для двух частных случаев: 1) амплитудный коэффициент $A_1 = 0$; 2) амплитудный коэффициент $A_2 = 0$.

В первом случае составляющие поля \dot{E}_x , \dot{H}_y , определяющие вектор Пойнтинга, ориентированный вдоль оси z , изменяются по закону $\cos(gx)$, т. е. по четному закону, во втором случае — по закону $\sin(gx)$, т. е. представляет собой нечетные функции координаты x . Первый случай соответствует четным волнам, второй — нечетным волнам. Рассмотрим их отдельно.

1. **Четные волны** $A_1 = 0$. Запишем тангенциальные к границе раздела воздух — диэлектрик составляющие поля в пластине при $A_1 = 0$:

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{g} A_2 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (16.20)$$

$$\dot{E}_z = A_2 \sin(gx) e^{-jhz}, \quad (16.21)$$

или, применяя граничные условия (8.9), (8.17),

$$\dot{H}_y = H_{yB} \quad (\text{при } x = d), \quad (16.22)$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{zB} \quad (\text{при } x = d), \quad (16.23)$$

$$-j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_2 \cos(gd) e^{-jhz} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-pd} e^{-jhz},$$

$$A_2 \sin(gd) e^{-jhz} = B_1 e^{-pd} e^{-jhz}.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое и произведя сокращения, получаем

$$\frac{g}{\varepsilon_a} \operatorname{tg}(gd) = \frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Умножая обе части на $\varepsilon_0 d$, получаем трансцендентное уравнение, связывающее поперечные волновые числа g и p в случае четных волн:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{tg}(gd) = pd. \quad (16.24)$$

2. **Нечетные волны** $A_2 = 0$. При этом тангенциальные к границе раздела воздух—диэлектрик составляющие поля в пластине записываются в форме

$$\dot{H}_y = j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_1 \sin(gx) e^{-jhz}, \quad (16.25)$$

$$\dot{E}_z = A_1 \cos(gx) e^{-jhz}, \quad (16.26)$$

или, применяя граничные условия (16.22), (16.23),

$$j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} A_1 \sin(gd) e^{-jhz} = -j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} B_1 e^{-pd} e^{-jhz},$$

$$A_1 \cos(gd) e^{-jhz} = B_1 e^{-pd} e^{-jhz}.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, находим

$$\frac{g}{\varepsilon_a} \operatorname{ctg}(gd) = -\frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Умножая обе части на $\varepsilon_0 d$, получаем трансцендентное уравнение, связывающее поперечные волновые числа p и g в случае нечетных волн:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{ctg}(gd) = -pd. \quad (16.27)$$

§ 16.4. Решение трансцендентных уравнений и определение поперечных волновых чисел. Критические частоты в случае электрических волн различных типов

Полученные трансцендентные уравнения для четных и нечетных волн содержат неизвестные g и p . Для их определения необходимо ввести еще одно уравнение, которое можно получить с помощью

выражений (12.26), (12.74) для продольных волновых чисел h , записанных для быстрых и медленных волн.

В рассматриваемом случае медленные волны распространяются в воздухе, для которого $\mu_a = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$. Следовательно, продольное волновое число для медленных волн

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2}. \quad (16.28)$$

Как указывалось в § 16.1, фазовая скорость быстрой и медленной волн должна быть одной и той же. В силу справедливости соотношения (12.19) должны быть одинаковыми и продольные волновые числа. Приравняв выражения (12.26) и (16.28), получаем

$$\omega^2 \mu_a \epsilon_a - g^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2,$$

или

$$\omega^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) = g^2 + p^2.$$

Умножая это соотношение на d^2 :

$$(gd)^2 + (pd)^2 = \omega^2 d^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) \quad (16.29)$$

и вводя обозначение

$$\omega^2 d^2 (\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0) = R^2,$$

где

$$R = \omega d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0}, \quad (16.30)$$

получаем

$$(gd)^2 + (pd)^2 = R^2. \quad (16.31)$$

Соотношение (16.31) представляет собой уравнение окружности в координатах gd и pd радиуса R . Решая совместно трансцендентные уравнения (16.24), (16.27) и уравнение (16.31), находят значения поперечных волновых чисел g и p .

Решение может быть осуществлено с помощью ЭВМ или графически. На рис. 16.2 и 16.3 показано графическое решение этих

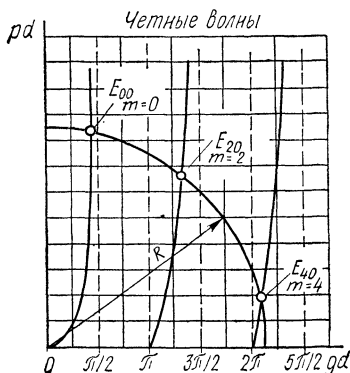


Рис. 16.2

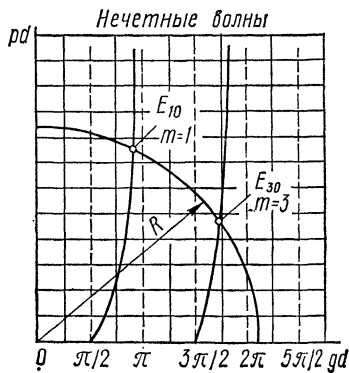


Рис. 16.3

уравнений. Точки пересечения окружностей с кривыми $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_a}gd \operatorname{tg}(gd) = pd$ и $-\frac{\epsilon_0}{\epsilon_a}gd \operatorname{ctg}(gd) = pd$ дают значение gd и pd , откуда для заданной полутолщины пластины d определяют поперечные волновые числа g и p . При изображении кривых следует помнить, что значения pd и gd должны быть положительными, что соответствует наличию или отсутствию тангенсоид или катангенсоид в квадрантах.

Поскольку поле не зависит от координаты y , в обычной системе обозначения электрических волн в волноводе (волны типа E_{mn}) индекс n , определяющий число вариаций поля по координате y , должен равняться нулю. Индекс m означает порядковый номер пересечения окружностей с кривыми. Пересечению в первом квадранте соответствует $m=0$, пересечению во втором квадранте — $m=1$, в третьем — $m=2$ и т. д.

Как следует из рисунков, волна типа E_{00} может существовать при любом значении R , так как при этом имеется точка пересечения в интервале от $gd=0$ до $gd=\pi/2$.

Волна типа E_{10} может существовать только при $R > \pi/2$ и т. д. Таким образом, условием существования волн типа E_{m0} будет

$$R > m \frac{\pi}{2}. \quad (16.32)$$

Подставляя значение R из выражения (16.30), имеем

$$\omega d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0} > m \frac{\pi}{2}. \quad (16.33)$$

При заданных параметрах пластины это выражение позволяет получить значение критической частоты, начиная с которого возможно существование волны заданного типа:

$$\omega_{кр} = \frac{m\pi}{2d \sqrt{\mu_a \epsilon_a - \mu_0 \epsilon_0}}. \quad (16.34)$$

Для волны типа E_{00} при $m=0$

$$\omega_{кр}(E_{00}) = 0. \quad (16.35)$$

Однако нулевая критическая частота не означает, что диэлектрическая пластина может быть практически использована в качестве волноводной системы на сколь угодно низких частотах. Малому значению частоты соответствует малое значение радиуса R и в соответствии с рис. 16.2 малые значения поперечных волновых чисел p , g . При этом исчезает поверхностный характер поля, которое перестает концентрироваться около замедляющей системы — диэлектрической пластины. Оно приобретает характер волны, излученной возбуждающей системой. Диэлектрическая система перестает играть существенную роль в формировании поля.

Продольное волновое число h , как следует из выражения (16.28), при малом значении p приближается к волновому числу $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, характеризующему распространение волн в свободном пространстве.

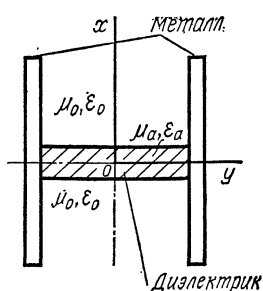


Рис. 16.4

Радиус R и поперечные волновые числа g и p возрастают при заданной частоте с увеличением параметров μ_a , ϵ_a диэлектрика и толщины пластины $2d$. Возрастание p приводит к большему затуханию поля на заданном расстоянии x от пластины. Большая часть энергии начинает распространяться внутри замедляющей системы. Несовершенство диэлектрика приводит при этом к росту потерь в волноводном тракте. Поэтому при практическом создании волноводов медленных волн следует выбирать компромиссное решение, при котором поле обладает необходимым затуханием по мере уда-

ления от поверхности замедляющей системы и в то же время потери остаются в заданной норме.

При изгибе замедляющей системы возникает опасность при малых значениях p излучения поля (отрыва от замедляющей системы) в месте изгиба. Это также необходимо учитывать. Несомненно, что по мере создания промышленностью более совершенных диэлектриков роль волноводных систем, использующих медленные волны, будет возрастать.

Были рассмотрены процессы в идеализированной волноводной системе. Допущение бесконечной протяженности диэлектрической пластины вдоль координаты y позволяло считать поле не зависящим от этой координаты. В случае волн магнитного типа с составляющими \dot{H}_x , \dot{H}_z и \dot{E}_y можно взять диэлектрическую пластину конечных размеров вдоль оси y , разместив по бокам две металлические пластины так, как показано на рис. 16.4. При этом составляющая поля \dot{E}_y ориентирована нормально к металлическим стенкам, что допускается граничными условиями у поверхности идеального металла, и общая картина поля будет такой же, как и в случае бесконечной протяженности диэлектрической пластины вдоль оси y . Подобный H-образный металлодиэлектрический волновод используют на практике.

§ 16.5. Коэффициент замедления поверхностных волн

Фазовая скорость определяется соотношением (12.19). Подставляя в него значение h (16.28), получаем

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + p^2}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}},$$

или

$$v_{\phi} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}}}, \quad (16.36)$$

где c_0 — скорость света в вакууме.

Знаменатель выражения (16.36) можно представить в виде

$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0}} = 1 + k_3. \quad (16.37)$$

При этом фазовая скорость

$$v_{\Phi} = c_0 / (1 + k_3). \quad (16.38)$$

Коэффициент k_3 называют *коэффициентом замедления*. Он характеризует уменьшение фазовой скорости по сравнению со скоростью света. Этот коэффициент является важным показателем замедляющих систем и часто используются при их анализе.

§ 16.6. Групповая скорость поверхностных волн

Как указывалось, поле быстрой волны, распространяющейся в диэлектрической пластине, и поле медленной волны, излучаемое вне пластины, представляют собой единое электромагнитное поле замедляющей системы.

Основным для групповой скорости является выражение (12.47):

$$v_{\text{гр}} = \left. \frac{1}{\partial h / \partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega_0 \\ h = h_0}}.$$

Для продольного волнового числа h может быть выбрано либо выражение (12.26), либо выражение (16.28). Если в основу положить формулу (12.26), то с учетом зависимости g от ω

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{2\omega\mu_a\epsilon_a - 2g \frac{dg}{d\omega}}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\epsilon_a - g^2}} = \frac{\omega\mu_a\epsilon_a - g \frac{dg}{d\omega}}{\sqrt{\omega^2\mu_a\epsilon_a - g^2}}.$$

При этом

$$v_{\text{гр}} = \frac{\omega \sqrt{\mu_a\epsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\epsilon_a}}}{\omega\mu_a\epsilon_a \left(1 - \frac{g}{\omega\mu_a\epsilon_a} \cdot \frac{dg}{d\omega}\right)} \Bigg|_{\omega = \omega_0},$$

или

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{1 - \frac{g}{\omega\mu_a\epsilon_a} \cdot \frac{dg}{d\omega}} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\epsilon_a}} \Bigg|_{\omega = \omega_0}, \quad (16.39)$$

где c — скорость света в среде с параметрами μ_a , ϵ_a .

При изменении частоты ω в соответствии с формулой (16.30) и рис. 16.2 и 16.3 изменяются радиус R и поперечное волновое число g . Определив для конкретного случая численное значение производной $dg/d\omega$, можно с помощью формулы (16.39) рассчитать групповую скорость.

§ 16.7. Картины поля при использовании диэлектрической пластины в качестве замедляющей системы

На рис. 16.5 и 16.6 показаны картины поля волн типов E_{20} и E_{30} , построенные для плоского диэлектрического волновода в результате расчета поперечных волновых чисел и использования формул (16.5)—(16.7) и (16.17)—(16.19).

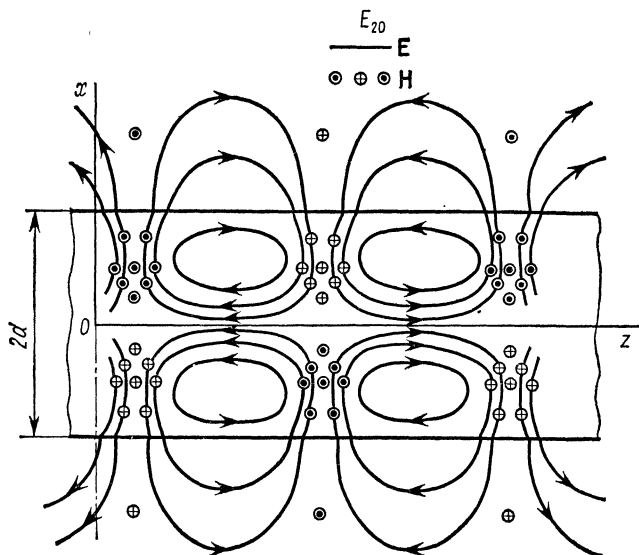


Рис. 16.5

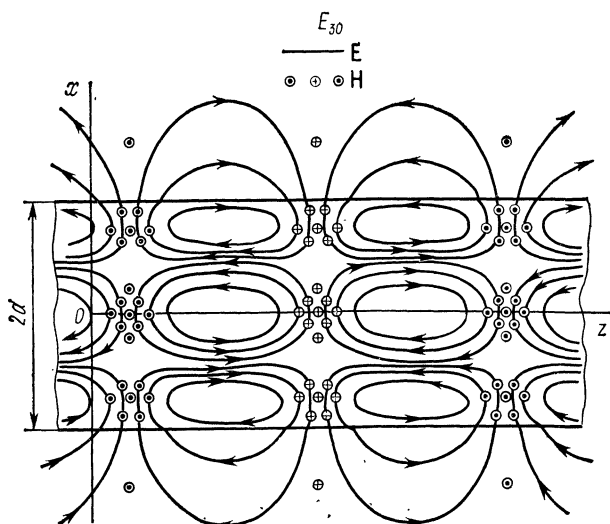


Рис. 16.6