

ГЛАВА 18
КРУГЛЫЙ СПИРАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 18.1. Постановка вопроса

В ряде случаев в качестве замедляющей системы используют круглую металлическую спираль, возбуждаемую с помощью коаксиальной линии, разворачивающейся в круглый рупор (рис. 18.1). Угол α наклона витков спирали к плоскости поперечного сечения связан с параметрами спирали соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a/2}{2r_0} = \frac{a}{4r_0}. \quad (18.1)$$

Точный анализ спиральной замедляющей системы довольно труден, поэтому ее рассмотрение будет проведено при существенном упрощении.

Допустим, что спираль представляет собой сплошной цилиндр, выполненный из материала с анизотропной проводимостью в направлении витков спирали. Такое предположение тем точнее, чем тоньше провод и меньше шаг намотки. Далее сделаем обычное предположение о конечности поля на оси спирали при $r=0$ и убывании поля до нуля на бесконечно большом расстоянии от оси спирали, т. е. при $r \rightarrow \infty$. Ввиду сложности анализа будут исследованы только симметричные волны, не зависящие от координаты φ . При этом предполагается, что вокруг спирали создается поле медленной волны, «прижимающееся» внутри и вне спирали к ее виткам. В отличие от диэлектрического стержня медленная волна распространяется не только вне, но и внутри системы. Это следует учитывать при записи и решении основного уравнения для продольных составляющих поля.

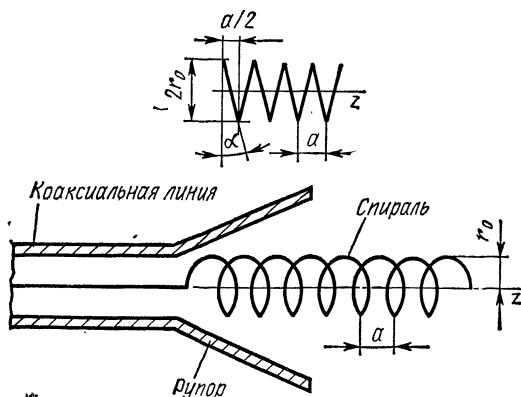


Рис. 18.1

§ 18.2. Вывод основного уравнения для продольных составляющих поля медленной волны и его решение. Составляющие поля в спиральном волноводе

Основными для продольных составляющих поля медленной волны \dot{E}_{z10} и \dot{H}_{z10} являются уравнения (17.6), (17.7). В дальнейшем будут рассмотрены только симметричные волны, у которых поле не зависит от координаты φ и, следовательно,

$$\frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial \varphi} = 0. \quad (18.2)$$

При этом уравнения для продольных составляющих поля записываются в виде

$$\frac{d^2 \dot{E}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \dot{E}_{z10}}{dr} - p^2 \dot{E}_{z10} = 0, \quad (18.3)$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \dot{H}_{z10}}{dr} - p^2 \dot{H}_{z10} = 0. \quad (18.4)$$

Эти уравнения совпадают по математической форме с уравнением (17.9), выведенным в § 17.3, при условии, что $m=0$.

Решение уравнения (17.9) записывается в виде (17.11)

$$R_1 = B_3 I_m(pr) + B_4 K_m(pr),$$

где $I_m(pr)$ — модифицированная функция Бесселя порядка m , а $K_m(pr)$ — функция Макдональда порядка m .

Графики этих функций были приведены на рис. 17.1.

Решениями уравнений (18.3) и (18.4) являются модифицированная функция Бесселя $I_0(pr)$ и функция Макдональда $K_0(pr)$ нулевого порядка. Для области внутри спирали следует использовать только модифицированную функцию Бесселя в силу ее конечности при $r=0$. Для области вне спирали необходимо применить только функцию Макдональда ввиду ее ограниченности при $r \rightarrow \infty$. На основании изложенного решения уравнений (18.3) и (18.4) могут быть записаны в форме:

область внутри спирали ($r \leq r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z10} &= A_1 I_0(pr), \\ \dot{H}_{z10} &= B_1 I_0(pr); \end{aligned} \quad (18.5)$$

область вне спирали ($r \geq r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z20} &= A_2 K_0(pr), \\ \dot{H}_{z20} &= B_2 K_0(pr). \end{aligned} \quad (18.6)$$

Для отыскания составляющих поля внутри и вне спирали можно использовать общие соотношения (14.27) — (14.32) и (14.41) — (14.46), записанные для быстрых волн. Переход к медленным волнам осуществляется путем замены поперечного волнового числа g на $j\rho$ и

g^2 на $-p^2$. Кроме того, должна быть учтена независимость продольных составляющих поля от координаты φ , т. е. соотношения (18.2). Медленная волна распространяется в воздухе, в силу чего $\mu_a = \mu_0$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

С учетом сказанного можно записать следующие выражения:

$$\dot{E}_r = j \frac{\hbar}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar r}, \quad (18.7)$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p^2} \cdot \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.8)$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z0} e^{-j\hbar z}, \quad (18.9)$$

$$\dot{H}_r = j \frac{\hbar}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.10)$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \frac{\omega \mu_0}{p^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r} e^{-j\hbar z}, \quad (18.11)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} e^{-j\hbar z}. \quad (18.12)$$

Действуя так же, как и при анализе процессов в диэлектрическом стержне, допустим, что поле медленной волны в спирали представляет собой суперпозицию волн электрического и магнитного типов. Подставляя выражения (18.5), (18.6) в формулы (18.7) — (18.12), получаем следующие соотношения для составляющих поля внутри и вне спирали:

область внутри спирали ($r \leq r_0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{r1} &= j \frac{\hbar}{p} A_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{\varphi1} &= j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{z1} &= A_1 I_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{r1} &= j \frac{\hbar}{p} B_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{\varphi1} &= -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{z1} &= B_1 I_0(pr) e^{-j\hbar z}; \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

область вне спирали ($r \geq r_0$)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{r2} &= j \frac{\hbar}{p} A_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{\varphi2} &= j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{z2} &= A_2 K_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{r2} &= j \frac{\hbar}{p} B_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{E}_{\varphi2} &= -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr) e^{-j\hbar z}, \\ \dot{H}_{z2} &= B_2 K_0(pr) e^{-j\hbar z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

§ 18.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел

При отыскании поперечного и продольного волновых чисел p и h используем следующие граничные условия:

1) равенство нулю тангенциальных к виткам спирали составляющих электрического поля в направлении анизотропной проводимости (т. е. вдоль витков спирали), которое должно выполняться для составляющих внешнего и внутреннего по отношению к спирали поля;

2) равенство при $r=r_0$ внутренних и внешних тангенциальных к образующей анизотропного цилиндра (т. е. ориентированных вдоль координаты z) составляющих электрического поля; проводимость анизотропного цилиндра в этом направлении равна нулю;

3) как известно, одним из граничных условий для тангенциальных составляющих у поверхности идеального металла является равенство тангенциальной составляющей магнитного поля плотности поверхностного тока [см. условие (8.13)]; поскольку плотность поверхностного тока внутренней и внешней поверхностей спирали одинакова, это граничное условие переходит в равенство тангенциальных составляющих магнитного поля в направлении анизотропной проводимости, т. е. вдоль витков спирали.

Выразим перечисленные граничные условия в математической форме (при $r=r_0$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\varphi 1} \cos \alpha + \dot{E}_{z 1} \sin \alpha &= 0, \\ \dot{E}_{\varphi 2} \cos \alpha + \dot{E}_{z 2} \sin \alpha &= 0, \\ \dot{E}_{z 1} &= \dot{E}_{z 2}, \\ \dot{H}_{\varphi 1} \cos \alpha + \dot{H}_{z 1} \sin \alpha &= \dot{H}_{\varphi 2} \cos \alpha + \dot{H}_{z 2} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

Подставляя значения составляющих поля из выражений (18.7) — (18.12) в граничные условия (18.15), получаем

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + A_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (18.16)$$

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr_0) + A_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad (18.17)$$

$$A_1 I_0(pr_0) = A_2 K_0(pr_0), \quad (18.18)$$

$$\begin{aligned} j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} \dot{A}_1 I'_0(pr_0) + B_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha &= \\ = j \frac{\omega \varepsilon_0}{p} A_2 K'_0(pr_0) + B_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Подставляя выражение (18.18) в (18.16), находим

$$-j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + A_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

или с учетом соотношения (18.17)

$$\begin{aligned} -j \frac{\omega \mu_0}{p} B_1 I'_0(pr_0) + j \frac{\omega \mu_0}{p} B_2 K'_0(pr_0) &= 0, \\ -B_1 I'_0(pr_0) + B_2 K'_0(pr_0) &= 0. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Определим амплитудные коэффициенты A_1 и A_2 из выражений (18.16) и (18.17):

$$A_1 = \frac{j\omega\mu_0 B_1 I'_0(pr_0)}{pI_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}, \quad (18.21)$$

$$A_2 = \frac{j\omega\mu_0 B_2 K'_0(pr_0)}{pK_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (18.22)$$

Подставляя значения этих коэффициентов в выражение (18.19), можно написать

$$\begin{aligned} & \frac{j\omega\varepsilon_0 j\omega\mu_0 B_1 \{I'_0(pr_0)\}^2}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + B_1 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha = \\ & = \frac{j\omega\varepsilon_0 j\omega\mu_0 B_2 \{K'_0(pr_0)\}^2}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + B_2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (18.23)$$

Найдем коэффициент B_1 из уравнения (18.20):

$$B_1 = \frac{K'_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)} B_2. \quad (18.24)$$

Подставляя значение коэффициента B_1 в выражение (18.23) и сокращая коэффициенты B_2 , получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{K'_0(pr_0) I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}{I'_0(pr_0)} = \\ & = -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \{K'_0(pr_0)\}^2}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 I'_0(pr_0)}{p^2 I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{I_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha}{I'_0(pr_0)} = \\ & = -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 K'_0(pr_0)}{p^2 K_0(pr_0) \operatorname{tg} \alpha} + \frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \left\{ \frac{K'_0(pr_0)}{K_0(pr_0)} - \frac{I'_0(pr_0)}{I_0(pr_0)} \right\} = p^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left\{ \frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} - \frac{I_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)} \right\}.$$

Это выражение может быть записано в иной форме:

$$\begin{aligned} & \omega \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{\frac{K_0(pr_0)}{K'_0(pr_0)} - \frac{I_0(pr_0)}{I'_0(pr_0)}}{\frac{K'_0(pr_0)}{K_0(pr_0)} - \frac{I'_0(pr_0)}{I_0(pr_0)}}} = \\ & = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{\{K_0(pr_0) I'_0(pr_0) - K'_0(pr_0) I_0(pr_0)\} K_0(pr_0) I_0(pr_0)}{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0) \{K'_0(pr_0) I_0(pr_0) - K_0(pr_0) I'_0(pr_0)\}}}, \end{aligned}$$

или

$$\omega \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{-\frac{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}}.$$

Отсюда

$$p = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{-\frac{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}}. \quad (18.25)$$

Выражение (18.25) представляет собой трансцендентное уравнение для поперечного волнового числа p . Продольное волновое число h определяют с помощью соотношения (16.28).

При больших значениях p , при которых справедливо неравенство $pr_0 \gg 1$, к модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда могут быть применены асимптотические соотношения. При этом можно показать, что корень в выражении (18.25) близок к единице, т. е. для p получается приближенное выражение

$$p \approx \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (18.26)$$

Фазовая скорость определяется соотношением (12.19). С увеличением поперечного волнового числа p возрастает продольное волновое число h и снижается фазовая скорость v_ϕ .

Рост p происходит с уменьшением $\operatorname{tg} \alpha$, который пропорционален в соответствии с выражением (18.1) шагу намотки a . Таким образом, фазовая скорость снижается с уменьшением шага намотки спирали.

При анализе спирального волновода было сделано предположение об одновременном существовании полей электрического и магнитного типов. Рассмотрим возможность их раздельного существования.

Как следует из формул (18.5) и (18.6), поле электрического типа определяется амплитудными коэффициентами A_1 и A_2 , а поле магнитного типа — коэффициентами B_1 и B_2 . Из граничных условий (18.18) вытекает, что равенство нулю коэффициента A_1 приводит к равенству нулю коэффициента A_2 , а из граничных условий (18.16), (18.17) явствует, что при равенстве нулю коэффициентов A_1 и A_2 тождественно равны нулю коэффициенты B_1 и B_2 . Следовательно, исчезновение поля электрического типа неизбежно приводит к исчезновению поля магнитного типа и наоборот.

Таким образом, сделанное ранее предположение о необходимости одновременного существования полей электрического и магнитного типов в спиральном волноводе оказывается правильным. Раздельное существование этих полей в спиральном волноводе невозможно.

ГЛАВА 19

ГРЕБЕНЧАТЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

§ 19.1. Постановка вопроса

В настоящее время существует большое число волноводных систем, работающих на поверхностных медленных волнах, представляющих собой ту или иную металлическую структуру, периодически-