

Отсюда

$$p = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{-\frac{K'_0(pr_0) I'_0(pr_0)}{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}}. \quad (18.25)$$

Выражение (18.25) представляет собой трансцендентное уравнение для поперечного волнового числа p . Продольное волновое число h определяют с помощью соотношения (16.28).

При больших значениях p , при которых справедливо неравенство $pr_0 \gg 1$, к модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда могут быть применены асимптотические соотношения. При этом можно показать, что корень в выражении (18.25) близок к единице, т. е. для p получается приближенное выражение

$$p \approx \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (18.26)$$

Фазовая скорость определяется соотношением (12.19). С увеличением поперечного волнового числа p возрастает продольное волновое число h и снижается фазовая скорость v_ϕ .

Рост p происходит с уменьшением $\operatorname{tg} \alpha$, который пропорционален в соответствии с выражением (18.1) шагу намотки a . Таким образом, фазовая скорость снижается с уменьшением шага намотки спирали.

При анализе спирального волновода было сделано предположение об одновременном существовании полей электрического и магнитного типов. Рассмотрим возможность их раздельного существования.

Как следует из формул (18.5) и (18.6), поле электрического типа определяется амплитудными коэффициентами A_1 и A_2 , а поле магнитного типа — коэффициентами B_1 и B_2 . Из граничных условий (18.18) вытекает, что равенство нулю коэффициента A_1 приводит к равенству нулю коэффициента A_2 , а из граничных условий (18.16), (18.17) явствует, что при равенстве нулю коэффициентов A_1 и A_2 тождественно равны нулю коэффициенты B_1 и B_2 . Следовательно, исчезновение поля электрического типа неизбежно приводит к исчезновению поля магнитного типа и наоборот.

Таким образом, сделанное ранее предположение о необходимости одновременного существования полей электрического и магнитного типов в спиральном волноводе оказывается правильным. Раздельное существование этих полей в спиральном волноводе невозможно.

ГЛАВА 19

ГРЕБЕНЧАТЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

§ 19.1. Постановка вопроса

В настоящее время существует большое число волноводных систем, работающих на поверхностных медленных волнах, представляющих собой ту или иную металлическую структуру, периодически-

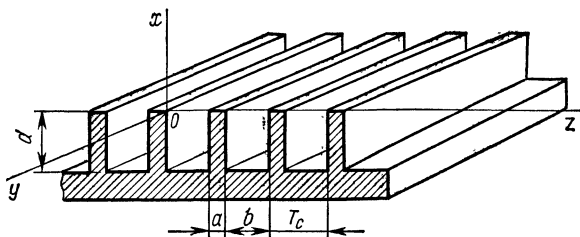


Рис. 19.1

скую вдоль оси распространения. К ним относятся: гребенчатая металлическая структура (рис. 19.1), круглый металлический ребристый волновод (рис. 19.2), ленточные структурные волноводы (рис. 19.3, *a* и *б*), стержневой структурный волновод (рис. 19.4). Можно предложить много других вариантов подобных структур, представляющих широкое поле для исследования.

В этой главе будет рассмотрен гребенчатый металлический волновод. Для простоты протяженность волновода вдоль оси y полагаем бесконечной. Если электрические токи, протекающие по поверхности металла такого волновода, ориентированы вдоль

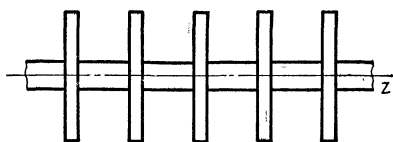


Рис. 19.2

оси z , то за счет канавок в структуре их путь удлиняется по сравнению с расстоянием вдоль оси z . При некоторых условиях это приводит, как увидим из анализа, к замедлению фазовой скорости электромагнитного поля, распространяющегося вдоль оси z . Такие электрические токи могут быть созданы только магнитным полем, нахо-

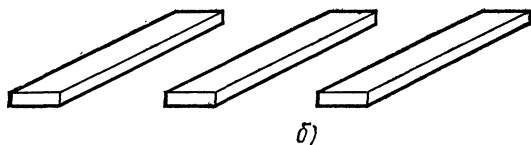
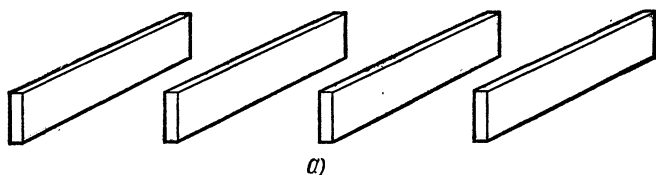


Рис. 19.3

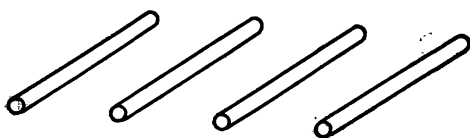


Рис. 19.4

дядимся в плоскости, перпендикулярной направлению ориентации токов, т. е. в плоскости xy . Другими словами, они могут быть созданы только волной электрического типа, у которой магнитное поле расположено в плоскости xy . Волна магнитного типа создает токи, ориентированные вдоль оси y , путь которых не удлиняется за счет волноводной структуры. Таким образом, в данной главе будет рассмотрено распространение волны электрического типа в гребенчатом волноводе.

§ 19.2. Вывод основного уравнения для продольной составляющей электрического поля в гребенчатом волноводе и его решение

Основным уравнением для продольной составляющей электрического поля, распространяющегося над гребенчатым волноводом, в случае волн электрического типа является уравнение (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\eta \cdot \frac{\partial \dot{E}_\xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\xi \cdot \frac{\partial \dot{E}_\xi}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_\xi = 0.$$

Это уравнение записано в криволинейной ортогональной системе координат ξ, η, ζ . Запишем его в декартовой системе координат, выбрав следующее соответствие координат: $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \zeta \rightarrow z, h_\xi = h_\eta = 1$:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Ввиду неограниченной протяженности структуры вдоль координаты y и отсутствия потерь в среде, положим $\partial/\partial y = 0, \tilde{\mu}_a = \mu_a, \tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$, где μ_a, ϵ_a — параметры диэлектрика, окружающего гребенчатый волновод.

При этих условиях основное уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \omega^2 \mu_a \epsilon_a \dot{E}_z = 0. \quad (19.1)$$

В силу периодичности структуры допустим, что решение этого уравнения можно представить в виде бегущей волны, на которую оказывает влияние периодический процесс с периодом T_c , равным периоду структуры. Другими словами, представим решение в виде суперпозиции бесконечного числа гармоник:

$$\dot{E}_z = e^{-i h_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) e^{-j \frac{2\pi n}{T_c} z}. \quad (19.2)$$

Функции $f_n(x)$ отражают зависимость амплитуд гармоник от координаты x .

Подставляя выражение (19.2) в уравнение (19.1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \left\{ \omega^2 \mu_a \epsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \right\} f_n(x) + \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right\rangle e^{-j \left(\frac{2\pi n}{T_c} + h_0 \right) z} = 0. \quad (19.3)$$

Для выполнения этого равенства необходимо равенство нулю каждого члена ряда:

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} + \left\{ \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \right\} f_n(x) = 0. \quad (19.4)$$

При

$$\omega^2 \mu_a \varepsilon_a > \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 \quad (19.5)$$

решение уравнения (19.4) имеет вид

$$f_n = A_n e^{-j g_n x}, \quad (19.6)$$

где

$$g_n = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2}.$$

Это решение представляет собой волну, распространяющуюся вдоль оси x . Нас интересует поверхностная медленная волна, распространяющаяся вдоль оси z . Амплитуда такой волны должна убывать с ростом координаты x , что возможно при соблюдении неравенства

$$\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 > \omega^2 \mu_a \varepsilon_a. \quad (19.7)$$

При этом уравнение (19.4) записывается в виде

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} - \left\{ \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \right\} f_n(x) = 0 \quad (19.8)$$

с решением

$$f_n(x) = A_n e^{-p_n x}, \quad (19.9)$$

где

$$p_n = \sqrt{\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}. \quad (19.10)$$

С учетом выражений (19.2), (19.10) можно записать

$$\dot{E}_z = e^{-j h_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-p_n x} e^{-j \frac{2\pi n}{T_c} z},$$

или

$$\dot{E}_z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-p_n x} e^{-j \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c} \right) z}. \quad (19.11)$$

Таким образом, поле над гребенчатым волноводом представляет собой суперпозицию волн, затухающих вдоль координаты x с коэффициентом затухания p_n и обладающих фазовыми постоянными h_n , где

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{T_c}. \quad (19.12)$$

Коэффициент затухания p_n в данном случае играет роль поперечного волнового числа, а фазовая постоянная — продольного волнового числа.

Как известно, фазовая скорость равна отношению угловой частоты ω к фазовой постоянной: $v_\phi = \omega/h$.

В рассматриваемом случае

$$v_\phi = \omega/h_n. \quad (19.13)$$

Если

$$h_n = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} = \beta, \quad (19.14)$$

то фазовая скорость $v_\phi = 1/\sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ равна скорости света в среде с параметрами μ_a, ϵ_a . При

$$h_n < \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \quad (19.15)$$

$v_\phi > c$, что соответствует быстрой волне. При

$$h_n > \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \quad (19.16)$$

$v_\phi < c$, что соответствует медленной волне.

Из соотношения (19.10) следует, что p_n увеличивается с ростом номера гармоники n и уменьшением периода структуры T_c . Наименьшее значение p_n имеет при $n = 0$

$$p_0 = \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a}. \quad (19.17)$$

При достаточно малом периоде структуры T_c можно считать, что поле над гребенчатым волноводом определяется преимущественно основной гармоникой, соответствующей $n = 0$, и влияние более высоких гармоник на структуру медленной волны невелико. При этом волновод можно рассматривать как некоторую сплошную замедляющую поверхность типа диэлектрической пластины. Такое приближение, очевидно, тем точнее, чем меньше период гребенчатой структуры.

Дальнейший анализ будет проведен при допущении пренебрежения высшими гармониками, что существенно упрощает задачу.

Оценим величину периода структуры, при котором можно пренебречь высшими гармониками.

Для того чтобы затухание высших гармоник происходило значительно быстрее по сравнению с основной гармоникой, требуется соблюдение неравенства

$$p_n \gg p_0. \quad (19.18)$$

Подставляя в него формулы (19.10) и (19.17), получаем

$$\sqrt{\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_c}\right)^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a} \gg \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \epsilon_a}. \quad (19.19)$$

Это неравенство справедливо при

$$\frac{2\pi n}{T_c} \gg h_0. \quad (19.20)$$

Неравенство (19.20) усиливается с ростом номера гармоники n , но должно соблюдаться уже для первой гармоники: $2\pi/T_c \gg h_0$, откуда

$$T_c \ll \frac{2\pi}{h_0}. \quad (19.21)$$

Медленная волна перестает существовать с приближением фазовой скорости к скорости света или при соблюдении равенства (19.14), которое для основной гармоники имеет вид

$$h_0 = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (19.22)$$

Допустим, что медленная волна должна обладать фазовой скоростью, в k раз меньшей скорости света. Для этого необходимо, чтобы

$$h_0 = k \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (19.23)$$

Подставляя соотношение (19.23) в неравенство (19.21), получаем

$$T_c \ll \lambda/k. \quad (19.24)$$

Примем условно, что

$$T_c \approx 0,1 \frac{\lambda}{k}. \quad (19.25)$$

Тогда уже при малых замедлениях, соответствующих $k \approx 1$, период структуры должен составлять величину порядка 0,1 длины волны. Следует помнить, что λ соответствует длине волны в свободном пространстве с параметрами μ_a , ϵ_a .

§ 19.3. Определение поперечного и продольного волновых чисел

Волновые числа определяют путем применения граничных условий, приравнивания тангенциальных составляющих полей $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ у поверхности гребенчатого волновода, т. е. при $x=0$.

На основании выражения (19.11) продольная составляющая электрического поля основной гармоники

$$\dot{E}_{z(0)} = A_0 e^{-p_0 x} e^{-j h_0 z}, \quad (19.26)$$

или в наиболее употребительной форме

$$\dot{E}_{z(0)} = \dot{E}_z e^{-j h_0 z}, \quad (19.27)$$

где

$$\dot{E}_{z_0} = A_0 e^{-p_0 x}. \quad (19.28)$$

Переход от продольной составляющей электрического поля к поперечным составляющим в случае медленной волны осуществляется с помощью общих формул перехода (12.78) — (12.82).

В рассматриваемом случае

$\gamma_B = h_0$, $p = p_0$, $\xi \rightarrow x$, $\eta \rightarrow y$, $\zeta \rightarrow z$, $h_\xi = h_\eta = 1$, $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$, $\partial/\partial y = 0$ и формулы перехода записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= j \frac{h_0}{p_0^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jh_0 z}, \\ \dot{H}_y &= j \frac{\omega \epsilon_a}{p_0^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x} e^{-jh_0 z}, \\ \dot{E}_y &= \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

Используя соотношение (19.28) находим составляющие поля основной гармонике медленной волны над поверхностью гребенчатого волновода:

$$\dot{E}_{x(0)} = -j \frac{h_0}{p_0} A_0 e^{-p_0 x} e^{-jh_0 z}, \quad (19.30)$$

$$\dot{H}_{y(0)} = -j \frac{\omega \epsilon_a}{p_0} A_0 e^{-p_0 x} e^{-jh_0 z}, \quad (19.31)$$

$$\dot{E}_{y(0)} = \dot{H}_{x(0)} = \dot{H}_{z(0)} = 0. \quad (19.32)$$

Далее следует определить поле в канавках «гребенки». Канавки можно рассматривать как двухплоскостные волноводы, образованные ребрами «гребенки», короткозамкнутые на конце. Внешнее по отношению к канавкам поле имеет составляющие \dot{E}_x , \dot{H}_y , \dot{E}_z . Такие же составляющие должны содержать и поле в канавках. В § 10.4 было показано, что существование волн электрического типа в двухплоскостном волноводе с составляющими \dot{E}_z , \dot{E}_x , \dot{H}_y (осью распространения которого в разбираемом случае является ось x) возможно при условии, что расстояние между плоскостями составляет не менее $0,5\lambda$, где λ —длина волны. Таким расстоянием на рис. 19.1 является размер b . Как указывалось в § 19.2, проводимый анализ справедлив при малых значениях периода структуры, при котором $b \ll 0,5\lambda$.

Такая система подобна двухплоскостной длинной линии, в которой может существовать только волна типа Т, распространяющаяся вдоль оси x и обладающая \dot{E}_z и \dot{H}_y .

Двухплоскостная длинная линия замкнута на конце, следовательно, в ней должна установиться стоячая волна. В соответствии с граничными условиями вектор \dot{E}_{zk} поля в канавке, тангенциальный к ее дну, должен быть равен нулю при $x = -d$ (см. рис. 19.1). С учетом этого продольная составляющая электрического поля в канавке

$$\dot{E}_{zk} = B_0 \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x+d) \right\} = B_0 \sin \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} (x+d) \right\}. \quad (19.33)$$

Магнитное поле в канавке \dot{H}_{yk} можно определить с помощью второго уравнения Максвелла (7.12). В рассматриваемом случае

$\bar{\mu}_a = \mu_a$ и

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{zк}}{\partial x},$$

или

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a} \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \cos \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (x+d) \right\}.$$

Окончательно можем записать

$$\dot{H}_{yк} = \frac{1}{j \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} \cos \left\{ \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (x+d) \right\}. \quad (19.34)$$

Далее, используя граничные условия:

$$\dot{E}_{z(0)} = \dot{E}_{zк}, \quad \dot{H}_{y(0)} = \dot{H}_{yк} \quad (\text{при } x=0)$$

и формулы (19.26), (19.33) и (19.31), (19.34), получаем

$$\begin{aligned} A_0 e^{-jh_0 z} &= B_0 \sin(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d), \\ -j \frac{\omega \varepsilon_a}{p_0} A_0 e^{-jh_0 z} &= \frac{1}{j \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} \cos(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d). \end{aligned}$$

Разделив первое уравнение на второе, находим

$$\frac{p_0}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d),$$

откуда

$$p_0 = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d) = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right). \quad (19.35)$$

На основании формулы (19.17) можно написать, что

$$h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + p_0^2}. \quad (19.36)$$

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{h_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}. \quad (19.37)$$

Из формулы (19.35) следует, что при $d = \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad p_0 \rightarrow \infty.$$

Возникают бесконечно большие замедление и затухание поля вдоль оси x . Этот вывод неточен и является следствием приближенности анализа.

При $d > \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) < 0 \quad \text{и} \quad p_0 < 0.$$

Медленная волна не существует, так как поле начинает возрастать по мере удаления от замедляющей структуры, что не соответствует физическим условиям исследуемой проблемы. Полученный результат позволяет приближенно учесть поведение высших гармоник медленной волны. Формулы (19.10), (19.12) позволяют определить волновые числа p_n и h_n , а формула (19.13) — фазовую скорость высших гармоник. Неточность заключается в приближенном способе отыскания волновых чисел p_0 и h_0 . Кроме того, граничные условия применялись не для полного поля, а для основных гармоник, что также обуславливает приближенность расчета.

ГЛАВА 20

ЗАТУХАНИЕ ПОЛЯ В РЕАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ 20.1. Постановка вопроса

Реальные волноводы выполняются из металла, обладающего конечной электрической проводимостью. Используемые в волноводах диэлектрики не являются идеальными. Поэтому амплитуда электромагнитных волн, распространяющихся в волноводах, уменьшается по мере продвижения поля вдоль оси волновода.

Оценка практической пригодности того или иного волноводного тракта невозможна без определения затухания поля. Неидеальность материалов, используемых в волноводах, не только приводит к уменьшению амплитуды поля и потерям мощности, но также искажает картину поля в волноводах, определенную в предыдущих главах. Однако потери в реальных диэлектриках и металлах незначительны и, как показывает более глубокий анализ, влияние неидеальности этих материалов на структуру поля также незначительно. Вследствие этого при анализе потерь в волноводах структуру поля принимают такой, какой обладают идеальные волноводные системы, лишенные потерь. С указанной степенью приближения и будут выведены в этой главе необходимые уравнения.

§ 20.2. Вывод уравнений для мощностей, теряемых в металле и диэлектрике волновода. Определение коэффициентов затухания

При наличии потерь коэффициент распространения γ_v , как было выяснено в § 12.3, определяется формулой

$$\gamma_v = h - jh' - jh''.$$

Здесь h' и h'' — коэффициенты затухания поля соответственно за счет потерь в металле и диэлектрике.

Действительная часть вектора Пойнтинга, возникающего в поле, распространяющемся в волноводе, определяется общим выражением