## ГЛАВА 27
# ПОТЕНЦИАЛЫ ПОЛЯ

## § 27.1. Постановка вопроса

В предыдущих главах исследовалось распространение электромагнитных волн в различных средах и волноводных системах. При этом использовались электродинамические уравнения, в которых отсутствовали сторонние токи, в результате чего было невозможно определить амплитудные постоянные полей как функции сторонних токов. Можно было лишь судить об относительном изменении амплитуды и фазы поля в результате его прохождения через ту или другую среду или волноводную систему.

В ряде практических случаев бывает важно знать не только характер изменения поля, но и его абсолютное значение в результате возбуждения среды, волноводной или резонаторной системы заданным расположением и значениями сторонних токов. При этом в основу исследования необходимо положить электродинамические уравнения, в которых фигурируют заданные электрические или магнитные сторонние токи. Подобные задачи являются задачами анализа поля, возникающего в результате воздействия заданной системы токов. Помимо задач анализа возможны довольно сложные задачи синтеза, когда структура поля оказывается заданной и требуется определить систему сторонних токов, при которой такая структура поля будет существовать. Задачи синтеза относятся к специальным задачам электродинамики и в общем курсе их рассмотрение не предусмотрено.

В задачах анализа естественно добиваться максимального упрощения исходных электродинамических уравнений. В § 6.3 были определены следующие общие уравнения Гельмгольца для векторов поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$, в которые входят сторонние возбуждающие токи [см. уравнения (6.21) и (6.22)]:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_м - \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{J}}_м,$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_э + \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_м + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э.$$

Было проведено решение этих уравнений в случаях, когда сторонние токи $\dot{\mathbf{J}}_э$ и $\dot{\mathbf{J}}_м$ отсутствовали в данной части пространства. Решение этих уравнений в представленном виде крайне затруднено тем, что сторонние токи входят в правые части под знаком дифференциальных операторов.

Было бы целесообразно ввести в электродинамику какие-либо новые векторные функции, связанные простыми соотношениями с векторами поля $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, для которых левые части электродинамических уравнений совпадали бы с хорошо изученным уравнением Гельмгольца, а правые части содержали бы сторонние токи непосредственно, без дифференциальных операторов. Решение электродинамических уравнений для этих функций существенно упростилось бы в силу упрощения правых частей. Отыскание векторов поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ в случае простой математической связи их с введенными функциями не представило бы существенных затруднений.

Отыскание подобных функций, называемых *векторными потенциалами*, оказывается возможным, чему и посвящена настоящая глава.

## § 27.2. Исходные уравнения электродинамики для векторов поля с участием сторонних токов. Векторный электрический потенциал

В § 2.2 были определены следующие электродинамические уравнения для векторов поля [см. уравнения (2.12)—(2.15)]:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}}, \\ &\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_м - j\omega\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}}, \\ &\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_э, \\ &\operatorname{div}(\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_м. \end{aligned}\right\}$$

Считая среды и системы, в которых процессы описываются этими исходными уравнениями, линейными и, следовательно, удовлетворяющими принципу суперпозиции, указанные уравнения можно разбить на две группы, в одной из которых действуют сторонние электрические токи в отсутствие сторонних магнитных токов, а в другой—сторонние магнитные токи в отсутствие сторонних электрических токов. Суммарное поле, возникающее под действием сторонних электрических и магнитных токов, при этом является суперпозицией полей, найденных в результате самостоятельного решения каждой из групп уравнений.

В первой группе уравнений сохранены только сторонние электрические токи и заряды:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}_э, \tag{27.1}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + j\omega\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}} = 0, \tag{27.2}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_э, \tag{27.3}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}}) = 0. \tag{27.4}$$

Во второй группе уравнений сохранены только сторонние магнитные токи и заряды:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}} = 0, \tag{27.5}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + j\omega\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}} = -\dot{\mathbf{J}}_м, \tag{27.6}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}}) = 0, \tag{27.7}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_м. \tag{27.8}$$

Нетрудно заметить, что переход от первой группы уравнений ко второй и обратно может быть осуществлен с помощью перестановок вида:

$$\dot{\mathbf{H}} \rightleftarrows \dot{\mathbf{E}},\ \tilde{\varepsilon}_а \rightleftarrows -\tilde{\mu}_а,\ \dot{\mathbf{J}}_э \rightleftarrows -\dot{\mathbf{J}}_м,\ \dot{\rho}_э \rightleftarrows -\dot{\rho}_м. \tag{27.9}$$

Отыщем решение первой группы уравнений в общем виде, без перехода к конкретной электродинамической задаче.

Простейшим уравнением в первой группе является уравнение (27.4). В силу справедливости векторного тождества (см. приложение I) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0$ решение уравнения (27.4) можно представить в виде

$$\tilde{\mu}_а \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э, \tag{27.10}$$

откуда

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_а}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э. \tag{27.11}$$

Векторную функцию $\dot{\mathbf{A}}_э$ называют *векторным электрическим потенциалом*.

Решение одного из уравнений получено. Следует определить, при каких условиях это решение удовлетворяет остальным уравнениям. Подставляя решение (27.10) в уравнение (27.2), находим

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + j\omega\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э = 0,$$

или

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + \operatorname{rot}(j\omega\dot{\mathbf{A}}_э) = 0.$$

Сумма роторов функций так же, как и сумма производных, равна ротору от суммы функций:

$$\operatorname{rot}(\dot{\mathbf{E}} + j\omega\dot{\mathbf{A}}_э) = 0. \tag{27.12}$$

В приложении I рассмотрено векторное тождество $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U = 0$, где $U$ — любая дифференцируемая скалярная функция. Положим

$$\dot{\mathbf{E}} + j\omega\dot{\mathbf{A}}_э = -\operatorname{grad}\dot{U}_э, \tag{27.13}$$

откуда

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad}\dot{U}_э - j\omega\dot{\mathbf{A}}_э. \tag{27.14}$$

Скалярную функцию $\dot{U}_э$ называют *скалярным электрическим потенциалом*.

Далее умножим все члены уравнения (27.1) на $\tilde{\mu}_а$:

$$\tilde{\mu}_а\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{E}} = \tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{J}}_э.$$

Ввиду того что в данной главе рассматриваются процессы в однородных линейных средах, в которых параметры $\tilde{\mu}_а$, $\tilde{\varepsilon}_а$ являются постоянными величинами, не зависящими от координат, $\tilde{\mu}_а$ можно внести под знак ротора и уравнение записать в виде

$$\mathrm{rot}\,(\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) - j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_э. \tag{27.15}$$

Подставляя в это уравнение значения $\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}$ из формулы (27.10) и $\dot{\mathbf{E}}$ из формулы (27.14), получаем

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\,\mathrm{grad}\,\dot{U}_э + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\;j\omega\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э,$$

или

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\,\mathrm{grad}\,\dot{U}_э - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э. \tag{27.16}$$

В приложении I приведено векторное тождество $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}$, где $\nabla^2$ — оператор Лапласа. Там же дано выражение для оператора Лапласа в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат. Этот оператор уже был использован при выводе уравнений Гельмгольца для векторов поля в § 6.3 и при исследовании плоских волн в гл. 7.

Применяя указанное векторное тождество, уравнение (27.16) можно записать в форме

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_э - \nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\,\mathrm{grad}\,\dot{U}_э - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э.$$

Недостатком этого уравнения является то, что в него входят две неизвестные функции: $\dot{\mathbf{A}}_э$ и $\dot{U}_э$. Для ликвидации одной из функций осуществим некоторые преобразования. В силу однородности среды внесем члены $j\omega\,\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a$ под знак градиента:

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_э - \nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \mathrm{grad}\,(j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_э) - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э.$$

Сумма градиентов функций равна градиенту от суммы функций. Поэтому уравнение можно записать в ином виде:

$$\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_э) - \nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э. \tag{27.17}$$

Вводя в электродинамику новые функции, правомерно выбрать их так, чтобы уравнения, содержащие эти функции, были максимально простыми. Если в уравнении (27.17) выбрать дивергенцию векторного электрического потенциала $\dot{\mathbf{A}}_э$ так, чтобы соблюдалось равенство

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{A}}_э = -j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_э, \tag{27.18}$$

то из уравнения исчезнет функция $\dot{U}_э$, оно существенно упростится и приобретает вид

$$-\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э,$$

или после перемены знаков

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_э = -\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_э. \tag{27.19}$$

Соотношение (27.18) позволяет выразить функцию $\dot{U}_э$ через векторный электрический потенциал:

$$\dot{U}_э = -\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э. \qquad (27.20)$$

Подставив значение $\dot{U}_э$ из формулы (27.20) в (27.14), получим соотношение, связывающее вектор электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ с потенциалом $\dot{\mathbf{A}}_э$:

$$\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э\right) - j\omega\dot{\mathbf{A}}_э = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э - j\omega\dot{\mathbf{A}}_э. \qquad (27.21)$$

Связь вектора магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$ с потенциалом $\dot{\mathbf{A}}_э$ выражается соотношением (27.11).

Таким образом, оказалось возможным выразить векторы поля через новую функцию $\dot{\mathbf{A}}_э$, для которой получено уравнение (27.19). Левая часть этого уравнения совпадает по математической форме с левыми частями уравнений (6.21) и (6.22), т. е. является хорошо изученным уравнением Гельмгольца. Правая часть уравнения (27.19) выгодно отличается от правых частей уравнений (6.21), (6.22) тем, что сторонний электрический ток $J_э$ входит в нее непосредственно, а не под знаком дифференциальных операций. После решения уравнения (27.19) и отыскания функции $\mathbf{A}_э$ векторы поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ можно найти с помощью принципиально выполнимых дифференциальных операций, определяемых формулами (27.21) и (27.11). По сути дела задача, поставленная в § 27.1, завершена: найдены более простое по сравнению с (6.21), (6.22) уравнение (27.19) для функции $\dot{\mathbf{A}}_э$ и простые формулы перехода от этой функции к векторам поля.

В системе уравнений (27.1)—(27.4) не использовалось уравнение $\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_э$. Подставим в это уравнение значение функции $\dot{E}$ (27.14):

$$-\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_a\operatorname{grad}\dot{U}_э) - \operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_a j\omega\dot{\mathbf{A}}_э) = \dot{\rho}_э.$$

Вынесем $\tilde{\varepsilon}_a$ за знак операторов и разделим на $\tilde{\varepsilon}_a$ обе части этого соотношения:

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{U}_э - j\omega\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э = \dot{\rho}_э/\varepsilon_a.$$

Подставим в него значение $\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э$ (27.18):

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{U}_э - j\omega(-j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_э) = \rho_э/\varepsilon_a.$$

В приложении I указывается, что $\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{U}_э = \nabla^2\dot{U}_э$. Тогда выведенное уравнение можно представить в окончательной форме:

$$\nabla^2\dot{U}_э + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_э = -\dot{\rho}_э/\tilde{\varepsilon}_a. \qquad (27.22)$$

Это уравнение является *скалярным уравнением Гельмгольца* с правой частью для скалярного электрического потенциала $\dot{U}_э$. Однако в рассматриваемом случае функция $\dot{U}_э$ играет лишь промежуточную, эпизодическую роль. Когда возбуждение поля осуществляется системой сторонних электрических токов, достаточно ввести только один векторный электрический потенциал $\dot{\mathbf{A}}_э$, после определения которого векторы поля $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ можно однозначно найти с помощью формул (27.11), (27.21).

## § 27.3. Векторный магнитный потенциал

Решение второй группы уравнений (27.5)—(27.8), содержащей сторонние магнитные токи, может быть проведено аналогично решению первой группы уравнений (27.1)—(27.4), содержащей сторонние электрические токи. Переход от первой группы уравнений ко второй легко осуществить с помощью перестановок вида (27.9), что можно использовать для получения решения уравнений второй группы. В конечных выражениях (27.19), (27.21), (27.11) и (27.22) достаточно лишь сделать перестановки (27.9), добавив к ним перестановки следующего вида

$$\dot{\mathbf{A}}_э \to \dot{\mathbf{A}}_м, \quad \dot{U}_э \to \dot{U}_м. \tag{27.23}$$

Функции $\dot{\mathbf{A}}_м$ и $\dot{U}_м$ называют соответственно *векторным магнитным и скалярным магнитным потенциалами*. В результате перестановок получаются окончательные выражения:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_м + \omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а \dot{\mathbf{A}}_м = -\tilde{\varepsilon}_а \dot{\mathbf{J}}_м, \tag{27.24}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а} \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_м - j\omega\dot{\mathbf{A}}_м, \tag{27.25}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_а} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_м, \tag{27.26}$$

$$\nabla^2 \dot{U}_м + \omega^2 \tilde{\mu}_а \tilde{\varepsilon}_а \dot{U}_м = -\dot{\rho}_м/\tilde{\mu}_а. \tag{27.27}$$

Если в рассматриваемом случае одновременно действует система электрических и магнитных токов, то суммарные поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ и $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ находят путем сложения полей, определяемых выражениями (27.11), (27.25), а также (27.21), (27.26). В итоге получают формулы:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{\tilde{\mu}_а} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а} \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_м - j\omega\dot{\mathbf{A}}_м, \tag{27.28}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а} \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э - j\omega\dot{\mathbf{A}}_э - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_а} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_м. \tag{27.29}$$