## ГЛАВА 28
# РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

## § 28.1. Постановка вопроса

В гл. 27 были получены неоднородные уравнения Гельмгольца видов (27.19) и (27.24) для векторных электрического и магнитного потенциалов. В общем курсе электродинамики невозможно рассмотреть решение этих уравнений во всей полноте так, как в курсах уравнений математической физики. Поэтому решение указанных уравнений будет изложено в объеме, необходимом для понимания содержания последующих глав.

## § 28.2. Разложение векторного уравнения Гельмгольца на скалярные. Решение однородного скалярного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат

Исходными для анализа являются следующие неоднородные векторные уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{A}}_э = -\tilde{\mu}_а\dot{\mathbf{J}}_э, \tag{27.19}$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_м + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{A}}_м = -\tilde{\varepsilon}_а\dot{\mathbf{J}}_м. \tag{27.24}$$

Эти уравнения аналогичны по математической форме. Достаточно рассмотреть решение любого из них. Решение оставшегося уравнения может быть найдено с помощью приводимых ранее перестановок. Выберем в качестве объекта исследования уравнение (27.19).

На основании векторного тождества

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}$$

можно написать

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э. \tag{28.1}$$

Выполнение этой операции в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$ и подстановка результата в уравнение (27.19) дают сложное векторное уравнение. Разделяя векторное уравнение на систему скалярных, можно заметить, что получившаяся система скалярных уравнений оказывается крайне сложной. Сложность обусловлена тем, что в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\xi$, входят не только составляющая $\dot{A}_{э\xi}$, но и составляющие $\dot{A}_{э\eta}$, $\dot{A}_{э\zeta}$. В уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\eta$, входят не только составляющая $\dot{A}_{э\eta}$, но и составляющие $\dot{A}_{э\xi}$, $\dot{A}_{э\zeta}$. Аналогично в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\zeta$, входят не только составляющая $\dot{A}_{э\zeta}$, но и составляющие $\dot{A}_{э\xi}$, $\dot{A}_{э\eta}$. Возникающая система уравнений с так называемыми неразделенными функциями получается неизмеримо более сложной по сравнению с системой уравнений, в которой функции разделены (в этой системе в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\xi$, входит только одна составляющая $\dot{A}_{э\xi}$, в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\eta$,— только одна составляющая $\dot{A}_{э\eta}$ и в уравнение, соответствующее орту $\mathbf{1}_\zeta$,— только одна составляющая $\dot{A}_{э\zeta}$.

Возникновение уравнений с неразделенными функциями связано с тем, что коэффициенты Лямэ $h_\xi$, $h_\eta$, $h_\zeta$ в криволинейной системе координат могут быть функциями координат и их необходимо дифференцировать при выполнении операций, предусмотренных выражением (28.1). Только в декартовой системе координат все три коэффициента Лямэ $h_x$, $h_y$, $h_z$ равны единице, а их производные по координатам $x$, $y$, $z$ — нулю. Лишь в декартовой системе координат возможно полное разделение функций в скалярных уравнениях, соответствующих векторному уравнению (27.19), что существенно упрощает решение этого уравнения.

Представим векторное уравнение (27.19) в виде системы скалярных уравнений в декартовой системе координат. Для этого введем следующие выражения:

$$\dot{\mathbf{A}}_э = \mathbf{1}_x\dot{A}_{эx} + \mathbf{1}_y\dot{A}_{эy} + \mathbf{1}_z\dot{A}_{эz}, \tag{28.2}$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э = \mathbf{1}_x\nabla^2\dot{A}_{эx} + \mathbf{1}_y\nabla^2\dot{A}_{эy} + \mathbf{1}_z\nabla^2\dot{A}_{эz}, \tag{28.3}$$

$$\dot{\mathbf{J}}_э = \mathbf{1}_x\dot{J}_{эx} + \mathbf{1}_y\dot{J}_{эy} + \mathbf{1}_z\dot{J}_{эz}, \tag{28.4}$$

в которых $\dot{A}_{эx}$, $\dot{A}_{эy}$, $\dot{A}_{эz}$, $\dot{J}_{эx}$, $\dot{J}_{эy}$, $\dot{J}_{эz}$ представляют собой составляющие векторного электрического потенциала $\dot{\mathbf{A}}_э$ и стороннего электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_э$ вдоль координатных направлений $x$, $y$, $z$.

Подставим полученные выражения в уравнение (27.19):

$$\mathbf{1}_x\nabla^2\dot{A}_{эx} + \mathbf{1}_y\nabla^2\dot{A}_{эy} + \mathbf{1}_z\nabla^2\dot{A}_{эz} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а(\mathbf{1}_x\dot{A}_{эx} + \\ + \mathbf{1}_y\dot{A}_{эy} + \mathbf{1}_z\dot{A}_{эz}) = -\tilde{\mu}_а(\mathbf{1}_x\dot{J}_{эx} + \mathbf{1}_y\dot{J}_{эy} + \mathbf{1}_z\dot{J}_{эz}). \tag{28.5}$$

Векторное уравнение (28.5) можно разбить на три скалярных уравнения путем приравнивания членов при одинаковых ортах:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\dot{A}_{эx} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{A}_{эx} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эx}, \\ \nabla^2\dot{A}_{эy} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{A}_{эy} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эy}, \\ \nabla^2\dot{A}_{эz} + \omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а\dot{A}_{эz} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эz}. \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$\omega^2\tilde{\mu}_а\tilde{\varepsilon}_а = \gamma^2. \tag{28.7}$$

Тогда систему уравнений (28.6) можно представить в форме

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\dot{A}_{эx} + \gamma^2\dot{A}_{эx} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эx}, \\ \nabla^2\dot{A}_{эy} + \gamma^2\dot{A}_{эy} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эy}, \\ \nabla^2\dot{A}_{эz} + \gamma^2\dot{A}_{эz} &= -\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эz}. \end{aligned}\right\} \tag{28.8}$$

Здесь $\nabla^2$ — оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Полученные скалярные уравнения аналогичны по математической форме. Достаточно рассмотреть решение какого-либо из них. Прежде всего рассмотрим решение однородного скалярного уравнения Гельмгольца, сходного по математической форме со скалярными уравнениями системы (28.6). Запишем это уравнение в виде

$$\nabla^2\dot{\Psi}+\gamma^2\dot{\Psi}=0. \qquad (28.9)$$

Отметим, что в уравнениях (28.8) лапласиан $\nabla^2\dot{A}_{эx,y,z}$ берут в декартовой системе координат (иначе не разделяются функции), лапласиан же скалярной функции $\nabla^2\dot{\Psi}$ может быть взят в любой координатной системе.

Рассмотрим решение уравнения (28.9) в сферической системе координат в предположении, что задача сферически симметрична и производные по координатам $\varphi$ и $\theta$ отсутствуют. С помощью выражения, приведенного в приложении I, можно определить лапласиан в сферической системе координат в случае зависимости поля только от координаты $r$:

$$\nabla^2\dot{\Psi}=\frac{d^2\dot{\Psi}}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\dot{\Psi}}{dr}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2(\dot{\Psi}r)}{dr^2}.$$

Подставляя выражение для лапласиана в уравнение (28.9), приводим его к виду

$$\frac{d^2(\dot{\Psi}r)}{dr^2}+\gamma^2(\dot{\Psi}r)=0. \qquad (28.10)$$

Уравнение (28.10) является по отношению к функции $\dot{\Psi}r$ обычным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно записать в форме

$$\dot{\Psi}r=C_1e^{-j\gamma r}+C_2e^{j\gamma r}, \qquad (28.11)$$

откуда

$$\dot{\Psi}=C_1\frac{e^{-j\gamma r}}{r}+C_2\frac{e^{j\gamma r}}{r}, \qquad (28.12)$$

Функция $\dot{\Psi}$ представляет собой две сферические волны: падающую, определяемую слагаемым $C_1\frac{e^{-j\gamma r}}{r}$, и отраженную, определяемую слагаемым $C_2\frac{e^{j\gamma r}}{r}$.

Далее можно перейти к отысканию решения неоднородных уравнений системы (28.6). Для этого используют так называемые теоремы Грина, дающие интегральную связь между двумя различными скалярными функциями. В качестве одной из них будет использовано искомое решение уравнений (28.6), т. е. функции $\dot{A}_{эx}$, $\dot{A}_{эy}$ или $\dot{A}_{эz}$, в качестве другой — только что найденная функция $\dot{\Psi}$. Теоремы Грина позволяют определить искомые решения через функцию $\dot{\Psi}$.

## § 28.3. Первая и вторая теоремы Грина

Запишем теорему Остроградского—Гаусса (2.1):

$$\oint_{S_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV.$$

Представим вектор **a** в виде соотношения

$$\mathbf{a} = \Psi \operatorname{grad} U, \tag{28.13}$$

где $\Psi$ и $U$ — дифференцируемые по координатам скалярные функции.

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\Psi \operatorname{grad} U). \tag{28.14}$$

Используя векторное тождество, приведенное в приложении I, выражение (28.14) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U. \tag{28.15}$$

Подстановка формулы (28.15) в теорему Остроградского—Гаусса приводит к выражению

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U)\, dV = \oint_{S_1} \Psi \operatorname{grad} U\, d\mathbf{S}. \tag{28.16}$$

В этом выражении $\operatorname{grad} U\, d\mathbf{S} = \operatorname{grad} U \mathbf{1}_n\, dS$, где $\mathbf{1}_n$ — единичная нормаль к элементу поверхности $dS$.

Скалярное произведение $\operatorname{grad} U \mathbf{1}_n$ представляет собой проекцию градиента $U$ на направление единичной нормали, т. е. нормальную составляющую $\operatorname{grad} U$. Следовательно, справедливо равенство

$$\operatorname{grad} U\, d\mathbf{S} = \frac{\partial v}{\partial n} dS, \tag{28.17}$$

где $n$ — нормаль, а производная $\partial v/\partial n$ является производной функции $v$ по нормали $n$ к поверхности $\partial S$, или нормальной составляющей градиента $U$.

Подставим выражение (28.17) в формулу (28.16):

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U)\, dV = \int_{S_1} \Psi \frac{\partial v}{\partial n} dS. \tag{28.18}$$

Полученное соотношение называется *первой теоремой Грина*. Эту теорему можно представить в несколько иной форме, если при выборе вектора **a** функции $\Psi$ и $U$ в выражении (28.14) поменять местами, т. е. записать вектор **a** в виде

$$\mathbf{a} = U \operatorname{grad} \Psi. \tag{28.19}$$

При этом первая теорема Грина приобретет вид

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} U \operatorname{grad} \Psi + U \nabla^2 \Psi)\, dV = \oint_{S_1} U \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS. \tag{28.20}$$

Вычтем из выражения (28.20) соотношение (28.18) почленно:

$$\int\limits_{V_1} (U\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2 U)\,dU=\oint\limits_{S_1}\left(U\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS. \qquad (28.21)$$

Полученное соотношение называется *второй теоремой Грина.*

## § 28.4. Использование второй теоремы Грина с целью получения решения уравнения Гельмгольца для векторного электрического потенциала. Условия излучения

Выберем в качестве функции $\Psi$ во второй теореме Грина функцию $\dot{\Psi}$, определяемую выражением (28.12), причем используем только ту часть этого выражения, которая соответствует падающей сферической волне. Амплитудный коэффициент $C_1$ положим равным единице. При этом можно записать

$$\Psi=\dot{\Psi}=\frac{e^{-j\gamma r}}{r}. \qquad (28.22)$$

В качестве функции $U$ выберем одно из искомых решений системы уравнений (28.6): $\dot{A}_{эx}$, $\dot{A}_{эy}$ или $\dot{A}_{эz}$. Для определенности пусть этим решением будет $\dot{A}_{эx}$.

Под расстоянием $r$ будем понимать расстояние между точкой, в которой отыскивается решение $\dot{A}_{эx}$ (назовем ее точкой наблюдения), и точками, в которых расположена заданная система токов $\dot{J}_{эx}$ (назовем их точками источника). Координаты точки наблюдения обозначим $x$, $y$, $z$, а координаты точек источника—$x'$, $y'$, $z'$. Тогда расстояние $r$ можно определить из соотношения.

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}. \qquad (28.23)$$

Интеграл по объему $V_1$ во второй теореме Грина берут по всему объему, включающему в себя все возможные точки наблюдения и точки источника. В процессе вычисления этого интеграла неизбежно будет проходиться точка, соответствующая $r=0$. В этой точке функция $\dot{\Psi}$ стремится к бесконечности или, как говорят, имеет особенность.

Следовательно, подставить эту функцию в объемный интеграл непосредственно нельзя. Во избежание этого затруднения окружим точку наблюдения малой сферой радиуса $r_0$, объем которой равен $V_0$. Далее вместо объема $V_1$ во второй теореме Грина возьмем объем $V_1—V_0$. В пределах этого объема радиус $r$ не может стать меньше радиуса $r_0$, и особенность функции $\dot{\Psi}$ будет ликвидирована.

Под поверхностью $S_1$ следует понимать поверхность, охватывающую объем $V_1$. Новый объем $V_1—V_0$ охватывает поверхность $S_1+S_0$, где $S_0$—поверхность, охватывающая объем $V_0$. Подставляя в формулу (28.21) в качестве функции $U$ функцию $\dot{A}_{эx}$, в качестве функции $\Psi$—функцию $\dot{\Psi}$ и используя вместо объема $V_1$ объем $V_1—V_0$, а вместо поверхности $S_1$ — поверхность $S_1 - S_0$, получаем новое выражение для второй теоремы Грина:

$$\int\limits_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{эx}\nabla^2\dot{\Psi} - \dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{эx})\,dV = \int\limits_{S_1 + S_0} \left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right) dS. \qquad (28.24)$$

Выразим функции $\nabla^2\dot{\Psi}$ и $\nabla^2\dot{A}_{эx}$ из уравнения (28.9) и первого уравнения системы (28.8):

$$\nabla^2\dot{\Psi} = -\gamma^2\dot{\Psi}, \qquad (28.25)$$

$$\nabla^2\dot{A}_{эx} = -\gamma^2\dot{A}_{эx} - \tilde{\mu}_a\dot{J}_{эx}. \qquad (28.26)$$

Подставим значения функций $\nabla^2\dot{\Psi}$ и $\nabla^2\dot{A}_{эx}$ из формул (28.25), (28.26) в объемный интеграл второй теоремы Грина:

$$\int\limits_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{эx}\nabla^2\dot{\Psi} - \dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{эx})\,dV =$$

$$= \int\limits_{V_1 - V_0} (-\dot{A}_{эx}\gamma^2\dot{\Psi} + \dot{\Psi}\gamma^2\dot{A}_{эx} + \dot{\Psi}\tilde{\mu}_a\dot{J}_{эx})\,dV = \int\limits_{V_1 - V_0} \dot{\Psi}\tilde{\mu}_a\dot{J}_{эx}\,dV.$$

Подставляя значение функции $\dot{\Psi}$ из формулы (28.22), получаем следующее выражение для объемного интеграла:

$$\int\limits_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{эx}\nabla^2\dot{\Psi} - \dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{эx})\,dV = \int\limits_{V_1 - V_0} \tilde{\mu}_a\dot{J}_{эx}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dV. \qquad (28.27)$$

При стремлении объема $V_0$ к нулю интеграл стремится к интегралу во всем объеме $V_1$.

Перейдем к рассмотрению поверхностного интеграла в формуле (28.24). Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов по замкнутым поверхностям $S_1$ и $S_0$:

$$\oint\limits_{S_1 + S_0} \left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right) dS = \oint\limits_{S_1} \left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right) dS +$$

$$+ \int\limits_{S_0} \left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right) dS. \qquad (28.28)$$

Интеграл по поверхности $S_1$ при стремлении поверхности $S_0$ к нулю остается конечным. Следует определить поведение интеграла по поверхности $S_0$ в предельном случае, когда эта поверхность стремится к нулю.

Нормальная производная $\partial/\partial n$ представляет собой производную $\partial/\partial r$, взятую с обратным знаком:

$$\partial/\partial n = -\partial/\partial r.$$

Используя формулу (28.22), можно написать

$$\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} = -\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial r} = j\gamma\frac{e^{-j\gamma r}}{r} + \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2},$$

$$\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n} = -\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial r}.$$

Подставим полученные выражения в интеграл по поверхности $S_0$:

$$\oint_{S_0}\left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right)dS=$$
$$=\oint_{S_0}\left(\dot{A}_{эx}j\gamma\frac{e^{-j\gamma r}}{r}+\dot{A}_{эx}\frac{e^{-j\gamma r}}{r^2}+\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\cdot\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial r}\right)dS. \qquad (28.29)$$

В пределе при $r\to 0$ $dS\to 4\pi r_0^2$, $\dot{A}_{эx}\to\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z)$, т. е. $\dot{A}_{эx}$ стремится к значению этой функции в точке наблюдения $x$, $y$, $z$. Соответственно функции

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\to\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0},\qquad \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2}\to\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2}.$$

Следовательно, при $r_0\to 0$

$$\oint_{S_0}\left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right)dS\to\oint_{S_0}\left\{\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z)\,j\gamma\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}+\right.$$
$$\left.+\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z)\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2}+\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}\cdot\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}\right\}4\pi r_0^2.$$

В пределе поверхностные интегралы от первого и последнего слагаемых обращаются в нуль:

$$\lim_{r_0\to 0}\oint_{S_0}\left\{\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z)\,j\gamma\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}+\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}\cdot\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}\right\}4\pi r_0^2=0. \qquad (28.30)$$

Предел поверхностного интеграла от второго слагаемого записывается в виде

$$\lim_{r_0\to 0}\oint_{S_0}\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z)\frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2}4\pi r_0^2=4\pi\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z). \qquad (28.31)$$

Таким образом, в пределе при стремлении поверхности $S_0$ к нулю поверхностный интеграл в формуле (28.24) можно выразить соотношением

$$\lim_{r_0\to 0}\oint_{S_1+S_0}\left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right)dS=$$
$$=\oint_{S_1}\left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right)dS+4\pi\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z). \qquad (28.32)$$

Предел объемного интеграла во второй теореме Грина на основании соотношения (28.27) записывается в виде

$$\lim_{r_0\to 0}\int_{V_1-V_0}(\dot{A}_{эx}\nabla^2\dot{\Psi}-\dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{эx})\,dV=\int_{V_1}\mu_а\dot{J}_{эx}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV. \qquad (28.33)$$

Используя формулы (28.32), (28.33), вторую теорему Грина можно записать таким образом:

$$\int_{V_1}\tilde{\mu}_а\dot{J}_{эx}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV=\oint_{S_1}\left(\dot{A}_{эx}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{эx}}{\partial n}\right)dS+4\pi\dot{A}_{эx}(x,\ y,\ z), \qquad (28.34)$$

или иначе

$$\dot{A}_{эx}(x, y, z)=\frac{\tilde{\mu}_а}{4\pi}\int\limits_{V_1}\dot{J}_{эx}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{эx}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r}-\dot{A}_{эx}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS. \qquad (28.35)$$

Следовательно, решение первого неоднородного скалярного уравнения для функции $\dot{A}_{эx}$ системы уравнений (28.8) может быть найдено, если известны значения функции $\dot{J}_{эx}$ в пределах всего объема $V_1$, а также значения функции $A_{эx}$ и ее нормальной производной на поверхности $S_1$, охватывающей объем $V_1$. Если значения функции $\dot{A}_{эx}$ и ее нормальной производной на поверхности $S_1$ неизвестны, то для отыскания функции $\dot{A}_{эx}$ необходимо решить интегральное уравнение (28.35). Остальные два уравнения системы (28.8) решают аналогично. Решения могут быть представлены в виде следующих соотношений:

$$\dot{A}_{эy}(x, y, z)=\frac{\tilde{\mu}_а}{4\pi}\int\limits_{V_1}\dot{J}_{эy}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{эy}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r}-\dot{A}_{эy}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS, \qquad (28.36)$$

$$\dot{A}_{эz}(x, y, z)=\frac{\tilde{\mu}_а}{4\pi}\int\limits_{V_1}\dot{J}_{эz}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{эz}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r}-\dot{A}_{эz}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS. \qquad (28.37)$$

В случае неограниченного объема $V_1$ и бесконечно удаленной поверхности $S_1$, а также при расположении источников поля на конечных расстояниях от точки наблюдения решения (28.35)—(28.37) существенно упрощаются. При этом возможны два хода рассуждения: 1) исходят из конечной скорости распространения электромагнитных волн и конечного времени наблюдения процесса. За конечное время наблюдения процесса электромагнитные волны не могут достигнуть бесконечно удаленной поверхности $S_1$, и в случае неограниченного объема $V_1$ поверхностный интеграл в выражении (28.35) равен нулю; 2) определяют математические условия, при которых поверхностный интеграл стремится к нулю при бесконечном увеличении объема $V_1$, т. е. выполняется предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\oint\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{эx}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r}-\dot{A}_{эx}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS=0. \qquad (28.38)$$

Найдем условия выполнения этого соотношения. При $r\to\infty$ нормаль $n\to r$. Поэтому производные по $n$ в интеграле могут быть заменены производными по $r$. Элемент поверхности $dS$ в сферической системе координат записывают в виде формулы (см. рис.29.4)

$dS = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$. С учетом сказанного предельное соотношение (28.38) записывают в виде

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot A_{эx}}{\partial r} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot A_{эx}\left(-j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2}\right)\right\} 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta = 0. \tag{28.39}$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial \dot A_{эx}}{\partial r} + j\gamma r \dot A_{эx} + \dot A_{эx}\right) = 0.$$

Очевидно, для этого достаточно условия

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial \dot A_{эx}}{\partial r} + j\gamma r \dot A_{эx}\right) = 0. \tag{28.40}$$

Аналогичные выражения определяют условия для составляющих векторного потенциала $\dot A_{эy}$ и $\dot A_{эz}$:

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial \dot A_{эy}}{\partial r} + j\gamma r \dot A_{эy}\right) = 0, \tag{28.41}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial \dot A_{эz}}{\partial r} + j\gamma r \dot A_{эz}\right) = 0. \tag{28.42}$$

Условия (28.40)—(28.42) называют *условиями излучения*. Для их выполнения необходимо, чтобы векторные потенциалы и их производные убывали с расстоянием быстрее, чем по закону $1/r$.

При выполнении условий излучения в случае бесконечно большого объема $V_1$ выражения (28.35)—(28.37) записываются в такой форме:

$$\dot A_{эx}(x, y, z) = \frac{\tilde\mu_a}{4\pi}\int_{V_1} \dot J_{эx} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \tag{28.43}$$

$$\dot A_{эy}(x, y, z) = \frac{\tilde\mu_a}{4\pi}\int_{V_1} \dot J_{эy} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \tag{28.44}$$

$$\dot A_{эz}(x, y, z) = \frac{\tilde\mu_a}{4\pi}\int_{V_1} \dot J_{эz} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \tag{28.45}$$

Так как

$$\dot{\mathbf{A}}_э = \mathbf{1}_x \dot A_{эx} + \mathbf{1}_y \dot A_{эy} + \mathbf{1}_z \dot A_{эz},$$
$$\dot{\mathbf{J}}_э = \mathbf{1}_x \dot J_{эx} + \mathbf{1}_y \dot J_{эy} + \mathbf{1}_z \dot J_{эz},$$

то, умножив соотношения (28.43)—(28.45) на соответствующие орты и сложив результаты, получим решение векторного уравнения Гельмгольца (27.19) с правой частью:

$$\dot{\mathbf{A}}_э = \frac{\tilde\mu_a}{4\pi}\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_э \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \tag{28.46}$$

Функция $\frac{e^{-j\gamma r}}{4\pi r} = G(r)$ называется *функцией Грина в сферической системе координат.* Функции Грина могут быть найдены в различных системах координат путем решения уравнения (28.9) для функции $\dot{\Psi}$ в соответствующей системе координат с последующим применением второй теоремы Грина.

Функция Грина, умноженная на $\tilde{\mu}_а$, соответствует векторному потенциалу от единичной плотности тока, существующей в бесконечно малом объеме $dV$. Если излучающие устройства представляют собой идеально проводящие металлические поверхности, по которым протекают поверхностные сторонние токи с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_э$, то объемный интеграл в выражении (28.46) должен быть заменен поверхностным интегралом вида

$$\dot{\mathbf{A}}_э = \frac{\tilde{\mu}_а}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_э \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \tag{28.47}$$

Аналогичные замены должны быть сделаны в выражениях (28.35)—(28.37).

## § 28.5. Отыскание решения уравнения Гельмгольца для векторного магнитного потенциала

Поскольку уравнение для векторного магнитного потенциала не отличается по математической форме от уравнения для векторного электрического потенциала, процесс отыскания решения для функции $\dot{\mathbf{A}}_м$ аналогичен описанному в § 28.4. Так как переход от уравнения (27.19) к уравнению (27.24) осуществляется с помощью перестановок вида

$$\dot{\mathbf{A}}_э \to \dot{\mathbf{A}}_м, \quad \tilde{\mu}_а \to -\tilde{\varepsilon}_а, \quad \dot{\mathbf{J}}_э \to -\dot{\mathbf{J}}_м,$$

выражение для функции $\dot{\mathbf{A}}_м$ можно получить непосредственно из выражения (28.46) путем указанных перестановок. В результате возникает формула

$$\dot{\mathbf{A}}_м = \frac{\tilde{\varepsilon}_а}{4\pi} \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_м \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \tag{28.48}$$

справедливая для неограниченного объема. В случае ограниченного объема в результате проведения перестановок в формулах (28.35)—(28.37) получаются следующие соотношения для составляющих векторного магнитного потенциала:

$$\dot{A}_{\text{м}x}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int\limits_{V_1} \dot{J}_{\text{м}x}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV + $$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{\text{м}x}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{\text{м}x}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS, \qquad (28.49)$$

$$\dot{A}_{\text{м}y}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int\limits_{V_1} \dot{J}_{\text{м}y}\frac{e^{-i\gamma r}}{r}dV + $$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{\text{м}y}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{\text{м}y}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS, \qquad (28.50)$$

$$\dot{A}_{\text{м}z}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int\limits_{V_1} \dot{J}_{\text{м}z}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dV + $$

$$+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\left\{\frac{\partial \dot{A}_{\text{м}z}}{\partial n}\cdot\frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{\text{м}z}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)\right\}dS. \qquad (28.51)$$

Если излучающие устройства представляют собой идеально проводящие металлические поверхности, по которым протекают поверхностные сторонние токи с плотностью $\dot{\mathbf{v}}_{\text{м}}$, то объемные интегралы в выражениях (28.48)—(28.51) должны быть заменены на поверхностные интегралы вида

$$\dot{\mathbf{A}}_{\text{м}} = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int\limits_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_{\text{м}}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}dS. \qquad (28.52)$$

# ГЛАВА 29
# ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВИБРАТОР

## § 29.1. Постановка вопроса

В предыдущей главе были найдены общие решения уравнений Гельмгольца с правой частью для векторных электрического и магнитного потенциалов. В настоящей главе с помощью этих решений будет определено поле простейшего излучателя электрического типа—элементарного электрического вибратора. Несмотря на некоторую идеализацию, анализ этого простейшего излучателя дает возможность понять основные процессы, происходящие в реальных антенных устройствах, и позволяет наметить общий ход их расчета.

Назовем элементарным электрическим вибратором прямолинейный отрезок провода, по которому протекает электрический ток, комплексная амплитуда плотности которого равна $\dot{J}_э$. Длину провода $l$ возьмем значительно меньшей длины волны колебания, подведенного к проводу. Положим, что комплексная амплитуда плотности тока $\dot{J}_э$ остается постоянной в пределах всей длины