

§ 30.1. Постановка вопроса

Элементарный магнитный вибратор отличается от элементарного электрического только тем, что в проводах с шарами на конце (см. рис. 29.1) вместо плотности стороннего электрического тока \dot{J}_a существует плотность стороннего магнитного тока \dot{J}_m .

Поле, создаваемое магнитным вибратором, определяют так же, как и в случае электрического вибратора. В основу следует положить решение уравнения Гельмгольца для векторного магнитного потенциала, представленное в виде выражения (28.48). После определения векторного магнитного потенциала \dot{A}_m с помощью формулы (27.26) можно найти поле \dot{E} и далее отыскать вектор напряженности магнитного поля \dot{H} , используя формулу (27.25), либо второе уравнение Максвелла вида (29.8).

Как указывалось в гл. 27, переход от составляющих поля, возникающих при действии стороннего электрического тока и определяемых через векторный электрический потенциал, к составляющим поля, возникающим при действии стороннего магнитного тока и определяемым через векторный магнитный потенциал, можно осуществить, применяя принцип перестановочной двойственности. Следовательно, нет надобности в подробном выводе поля элементарного магнитного вибратора. Можно сразу по конечным выражениям для составляющих поля электрического вибратора с помощью необходимых перестановок найти конечные выражения для составляющих поля магнитного вибратора. Этот путь решения задачи и выбран в настоящей главе.

§ 30.2. Определение составляющих поля элементарного магнитного вибратора

В основу анализа положим окончательные выражения для составляющих поля элементарного электрического вибратора (29.15)—(29.17). В соответствии с принципом перестановочной двойственности осуществим в этих выражениях следующие перестановки:

$$\dot{H} \leftrightarrow \dot{E}, \quad \tilde{e}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{J}_a \rightarrow -\dot{J}_m. \quad (30.1)$$

В силу справедливости соотношения (29.4)

$$\dot{J}_a S = \dot{I}_a$$

и аналогичного соотношения при действии стороннего магнитного тока

$$\dot{J}_m S = \dot{I}_m \quad (30.2)$$

перестановки (30.1) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \leftrightarrow -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{I}_a \rightarrow -\dot{I}_m \quad (30.3)$$

Осуществляя эти перестановки в соотношениях (29.15)—(29.17), получаем окончательные выражения для составляющих поля элементарного магнитного вибратора:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.4)$$

$$\dot{H}_r = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.5)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.6)$$

В дальней зоне практически остаются составляющие поля:

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma}{4\pi r}, \quad (30.7)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta \gamma^2}{j\omega\mu_a 4\pi r}, \quad (30.8)$$

которые и являются полем излучения магнитного вибратора.

§ 30.3. Физический аналог элементарного магнитного вибратора. Элементарный щелевой вибратор

Сторонний магнитный ток был введен в уравнение Максвелла формально по аналогии со сторонним электрическим током. До настоящего времени не определялся его физический аналог. Поэтому неясно, какой реальной физической системе соответствует поле, определяемое выражениями (30.4)—(30.6).

Для выяснения этого вопроса рассмотрим подробно физический смысл перестановок вида (30.3), а также граничные условия электродинамической задачи, соответствующей определению поля элементарного электрического вибратора. Для наглядности предположим, что элементарный электрический вибратор представляет собой тонкую пластину шириной d и длиной l из идеального металла с бесконечно большой проводимостью. Допустим, что вдоль этой пластины, по обе ее стороны протекает сторонний электрический ток, поверхностная плотность которого постоянна вдоль длины пластины и равна \dot{v}_s . Пренебрежем долей поверхностного тока, протекающего вдоль тонких кромок пластины. Подобная система показана на рис. 30.1.

Электрический ток, протекающий по двум сторонам пластины и создающий электромагнитное поле, определяется соотношением

$$\dot{I}_s = 2d\dot{v}_s. \quad (30.9)$$

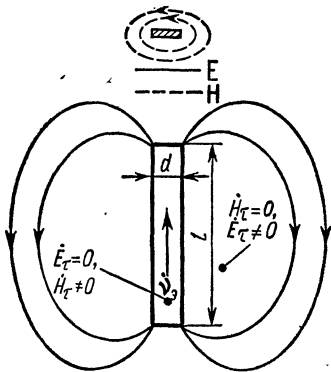


Рис. 30.1

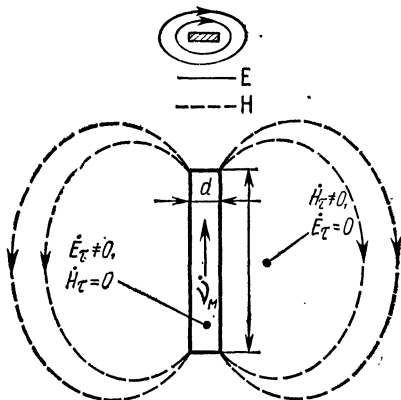


Рис. 30.2

Подставляя это значение тока \dot{I}_s в выражения (29.15) — (29.17), можно определить составляющие поля:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.10)$$

$$\dot{E}_r = \frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \epsilon_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.11)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{2d\dot{v}_s e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \epsilon_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.12)$$

Рассмотрим, какие граничные условия соответствуют этой задаче. В пределах пластины, выполненной из идеального металла, справедливы условия $\dot{H}_\tau = \dot{v}_s$, $\dot{E}_\tau = 0$. За пределами пластины, в плоскости рис. 30.1, существует тангенциальное к этой плоскости поле \mathbf{E} . Поле \mathbf{H} подходит к плоскости рисунка нормально, и за пределами пластины $\dot{H}_\tau = 0$.

Допустим, что по пластине протекает не электрический сторонний ток с поверхностной плотностью \dot{v}_s , а магнитный сторонний ток с поверхностной плотностью \dot{v}_m (рис. 30.2). Поле, создаваемое таким током, может быть получено, если в выражениях (30.10) — (30.12) осуществить перестановки вида

$$\dot{\mathbf{H}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\epsilon}_a \rightarrow -\mu_a, \quad \dot{v}_s \rightarrow -\dot{v}_m.$$

В результате возникают соотношения

$$\dot{E}_\varphi = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.13)$$

$$\dot{H}_r = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega \mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.14)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega \mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2), \quad (30.15)$$

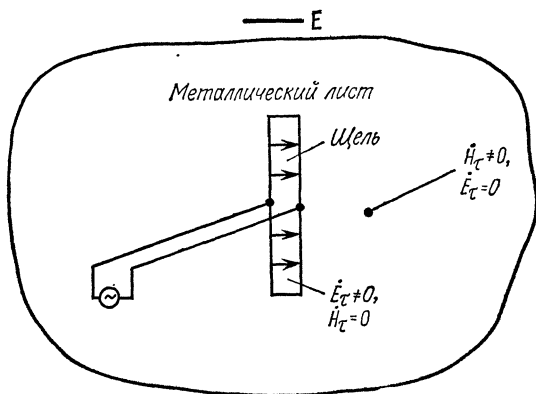


Рис. 30.3

Поле, соответствующее приведенным выражениям, показано на рис. 30.2. Этому случаю соответствуют следующие граничные условия: в пределах пластины $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$, за пределами пластины, в плоскости рисунка, $\dot{H}_\tau \neq 0$, $\dot{E}_\tau = 0$.

В соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла (8.18) $\dot{E}_{1\tau} = -\dot{v}_m$ выражения (30.13)—(30.15) записываются в иной форме:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r), \quad (30.16)$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \cos \theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3} (1 + j\gamma r), \quad (30.17)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \sin \theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \quad (30.18)$$

Как указывалось в § 8.3, $\dot{E}_{1\tau}$ и \dot{v}_m связаны правилом левостороннего винта; другими словами, если комплексная амплитуда плотности поверхностного магнитного тока \dot{v}_m ориентирована вдоль пластины, то составляющая $\dot{E}_{1\tau}$ — поперек пластины.

Далее попытаемся найти физическую систему, отвечающую граничным условиям, показанным на рис. 30.2.

За пределами пластины, в плоскости рисунка, $\dot{E}_\tau = 0$ и $\dot{H}_\tau \neq 0$. Подобные условия справедливы у поверхности идеального металла. Если за пределами пластины, в плоскости рисунка, поместить лист идеального металла, то эти граничные условия будут выполнены. В пределах пластины справедливы условия $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$. Эти условия будут выполнены, если в листе идеального металла сделать отверстие (щель), совпадающее по форме с пластиной, и к краям отверстия подвести напряжение от генератора (рис. 30.3).

При этом произведение

$$\dot{E}_{1\tau} d = \dot{U}_{щ}, \quad (30.19)$$

где $\dot{U}_{\text{ш}}$ — разность потенциалов между краями щели, создаваемая генератором.

Соответственно выражения (30.16) — (30.18) приобретут окончательный вид

$$\dot{E}_{\varphi} = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}}e^{-j\gamma r}l\sin\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r), \quad (30.20)$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}}e^{-j\gamma r}l\cos\theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3}(1+j\gamma r), \quad (30.21)$$

$$H_{\theta} = -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}}e^{-j\gamma r}l\sin\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3}(1+j\gamma r-\gamma^2 r^2). \quad (30.22)$$

В результате сравнения этих выражений и формул (30.4) — (30.6) можно написать соотношение

$$\dot{I}_m = -2\dot{U}_{\text{ш}}. \quad (30.23)$$

Таким образом, физическим аналогом магнитного тока в случае так называемого щелевого вибратора является двойная разность потенциалов между краями щели. Как показывают многочисленные исследования, концепция магнитного тока оказывается удобной при анализе антенн щелевого типа, показанного на рис. 30.3, и антенн рамочного типа.

§ 30.4. Мощность, излучаемая элементарным магнитным вибратором в окружающее пространство. Сопротивление излучения. Диаграмма направленности

Определение мощности излучения магнитного вибратора проводят так же, как и в § 29.5. Можно легко показать, как и в случае электрического вибратора, что вектор Пойнтинга, построенный на составляющих поля \dot{E}_{φ} , \dot{H}_r , ориентированный вдоль координаты θ , не обладает действительной частью.

Действительная часть вектора Пойнтинга, построенного на составляющих поля \dot{E}_{φ} , \dot{H}_{θ} , ориентированного вдоль координаты r , определяется следующим образом (среда без потерь, $\gamma \rightarrow \beta$):

$$\dot{P}_{dr} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{\varphi} \mathbf{H}_{\theta}^*] = \mathbf{1}_r \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{2\dot{U}_{\text{ш}}e^{-j\beta r}l\sin\theta}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \frac{2\dot{U}_{\text{ш}}e^{j\beta r}l\sin\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3} (1 - j\beta r - \beta^2 r^2) \right\} = \mathbf{1}_r \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \sin^2 \theta \beta^3}{8\pi^2 \omega \mu_a r^2}. \quad (30.24)$$

Мощность излучения находят с помощью выражения (29.37). В результате интегрирования, аналогичного проведенному в § 29.5, получают

$$P_{\text{из}} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{8\pi^2 \omega \mu_a} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{3\pi \omega \mu_a}. \quad (30.25)$$

Мощность излучения, как всякую активную мощность, можно представить в виде

$$P_{\text{из}} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2}{2R_{\text{из}}}. \quad (30.26)$$

Приравнивая выражения (30.25) и (30.26), получаем

$$\frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2 l^2 \beta^3}{3\pi\omega\mu_a} = \frac{|\dot{U}_{\text{ш}}|^2}{2R_{\text{из}}},$$

откуда

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_a}{2l^2\beta^3}.$$

Используя выражения (29.18) и (29.19), можно определить сопротивление излучения

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_a\lambda^2}{2l^2\omega\sqrt{\mu_a\epsilon_a}4\pi^2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \cdot \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.27)$$

Если среда представляет собой вакуум, то

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом} \text{ и } R_{\text{из}} = 45 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.28)$$

Сравнивая формулы (30.20)—(30.22) для составляющих поля магнитного вибратора с формулами (29.15)—(29.17) для составляющих поля электрического вибратора, можно заметить аналогичную зависимость составляющих поля от угловых координат. В силу этого диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной полярной оси и меридиональной плоскости, будут аналогичны диаграммам, показанным на рис. 29.5 и 29.6.

ГЛАВА 31 ЛЕММА ЛОРЕНЦА

§ 31.1. Постановка вопроса

Лемму Лоренца часто используют в электродинамике при решении задач о возбуждении полей заданными системами электрических или магнитных токов. С помощью этой леммы устанавливают математическую связь между первой группой сторонних электрических и магнитных токов и задаваемым ими полем,—с одной стороны, и второй группой сторонних электрических и магнитных токов и создаваемым ими полем, с другой стороны. На базе леммы Лоренца может быть проведен анализ различных электродинамических процессов; эта лемма и будет использована при дальнейшем изложении.