Мощность излучения, как всякую активную мощность, можно представить в виде

$$P_{\text{из}} = \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2}{2R_{\text{изл}}}. \qquad (30.26)$$

Приравнивая выражения (30.25) и (30.26), получаем

$$\frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2 l^2\beta^3}{3\pi\omega\mu_{\text{а}}} = \frac{|\dot{U}_{\text{щ}}|^2}{2R_{\text{из}}},$$

откуда

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_{\text{а}}}{2l^2\beta^3}.$$

Используя выражения (29.18) и (29.19), можно определить сопротивление излучения

$$R_{\text{из}} = \frac{3\pi\omega\mu_{\text{а}}\lambda^2}{2l^2\omega\sqrt{\mu_{\text{а}}\varepsilon_{\text{а}}}\,4\pi^2} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{а}}}{\varepsilon_{\text{а}}}}\cdot\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \qquad (30.27)$$

Если среда представляет собой вакуум, то

$$\sqrt{\frac{\mu_{\text{а}}}{\varepsilon_{\text{а}}}} \to \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом и } R_{\text{из}} = 45\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \qquad (30.28)$$

Сравнивая формулы (30.20)—(30.22) для составляющих поля магнитного вибратора с формулами (29.15)—(29.17) для составляющих поля электрического вибратора, можно заметить аналогичную зависимость составляющих поля от угловых координат. В силу этого диаграммы направленности в плоскости, перпендикулярной полярной оси и меридиональной плоскости, будут аналогичны диаграммам, показанным на рис. 29.5 и 29.6.

ГЛАВА 31
ЛЕММА ЛОРЕНЦА

§ 31.1. Постановка вопроса

Лемму Лоренца часто используют в электродинамике при решении задач о возбуждении полей заданными системами электрических или магнитных токов. С помощью этой леммы устанавливают математическую связь между первой группой сторонних электрических и магнитных токов и задаваемым ими полем,—с одной стороны, и второй группой сторонних электрических и магнитных токов и создаваемым ими полем, с другой стороны. На базе леммы Лоренца может быть проведен анализ различных электродинамических процессов; эта лемма и будет использована при дальнейшем изложении.

§ 31.2. Вывод леммы Лоренца для ограниченного и неограниченного объемов

Допустим, что существует первая группа сторонних токов $\dot{\mathbf{J}}_{э1}$, $\dot{\mathbf{J}}_{м1}$, создающая поля $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_1$. Запишем уравнения Максвелла, соответствующие этому случаю:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{э1}, \tag{31.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{м1}. \tag{31.2}$$

Предположим также, что существует вторая группа сторонних токов $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$, $\dot{\mathbf{J}}_{м2}$, создающая поля $\dot{\mathbf{H}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$. Уравнения Максвелла, соответствующие данному случаю, записываются в виде

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_2 = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{J}}_{э2}, \tag{31.3}$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{м2}. \tag{31.4}$$

Умножим скалярно уравнение (31.1) на $\dot{\mathbf{E}}_2$, уравнение (31.4) — на $\dot{\mathbf{H}}_1$ и вычтем из второго произведения первое:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_1\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_1 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_2\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{м2}\dot{\mathbf{H}}_1 - \\ - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2.\end{aligned} \tag{31.5}$$

Далее умножим уравнение (31.2) скалярно на $\dot{\mathbf{H}}_2$, уравнение (31.3) — скалярно на $\dot{\mathbf{E}}_1$ и вычтем из первого произведения второе:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_2\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_2 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{м1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \\ - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1.\end{aligned} \tag{31.6}$$

Используя векторное тождество, приведенное в приложении I, получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_1\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_2\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_1 = \mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1],$$

$$\dot{\mathbf{H}}_2\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{E}}_1\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}_2 = \mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2].$$

С помощью этих выражений соотношения (31.5) и (31.6) можно представить в форме

$$\mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_2\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{м2}\dot{\mathbf{H}}_1 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2, \tag{31.7}$$

$$\mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2] = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{м1}\dot{\mathbf{H}}_2 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1. \tag{31.8}$$

Вычтем из выражения (31.7) выражение (31.8):

$$\mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - \mathrm{div}\,[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2] = -\dot{\mathbf{J}}_{м2}\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{J}}_{м1}\dot{\mathbf{H}}_2 + \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1. \tag{31.9}$$

Полученное соотношение называют *леммой Лоренца в дифференциальной форме*. Проинтегрируем это соотношение по объему V_1, включающему в себя все сторонние токи:

$$\int_{V_1} \{\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,dV = \int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{\text{м}1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{м}2}\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}2}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}1}\dot{\mathbf{E}}_2)\,dV. \qquad (31.10)$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, можно написать

$$\int_{V_1} \{\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - \operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,dV = \oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,d\mathbf{S},$$

где S_1—замкнутая поверхность, окружающая объем V_1.

Тогда соотношение (31.10) можно представить в иной форме:

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,d\mathbf{S} = \int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{\text{м}1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{м}2}\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}2}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}1}\dot{\mathbf{E}}_2)\,dV. \qquad (31.11)$$

Полученное соотношение называют *леммой Лоренца в интегральной форме для ограниченного объема* V_1.

При неограниченном расширении объема левый интеграл обращается в нуль. Основанием для подобного заключения могут служить два соображения:

1) при неограниченном расширении объема V_1 ограничивающая его поверхность S_1 находится на бесконечно большом удалении от источников поля. В силу конечной скорости распространения поле не может дойти до поверхности S_1 за конечное время наблюдения и, следовательно, на ограничивающей поверхности поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ равны нулю;

2) как было установлено при анализе полей в дальней зоне, поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ убывают пропорционально первой степени расстояния. При этом не учитывалось дополнительное уменьшение амплитуды поля за счет потерь в среде, которые всегда существуют, даже в космическом пространстве. Вследствие этого подынтегральное выражение $\{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}$ фактически убывает быстрее, чем по закону второй степени расстояния. Сферическая поверхность возрастает пропорционально второй степени расстояния. В результате

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,d\mathbf{S} = 0.$$

Таким образом, лемму Лоренца для бесконечно большого (неограниченного) объема следует записать таким образом:

$$\int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{\text{м}1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{м}2}\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}2}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{\text{э}1}\dot{\mathbf{E}}_2)\,dV = 0. \qquad (31.12)$$

§ 31.3. Теорема взаимности для элементарных вибраторов как пример применения леммы Лоренца

Предположим, что в пространстве имеется два элементарных электрических вибратора. Допустим, что в первом вибраторе длиной $\mathbf{l}_1$ протекает сторонний электрический ток с плотностью $\dot{\mathbf{J}}_{\text{э}1}$, а во втором вибраторе длиной $\mathbf{l}_2$ — сторонний электрический ток с плотностью $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$.

Пусть $\dot{\mathbf{E}}_{12}$ — электрическое поле, создаваемое первым вибратором в месте расположения второго вибратора, и $\dot{\mathbf{E}}_{21}$ — электрическое поле, создаваемое вторым вибратором в месте расположения первого вибратора. Тогда лемма Лоренца для неограниченного объема в соответствии с формулой (31.12) запишется в виде

$$\int\limits_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2)\,dV = 0, \text{ или } \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV = \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2\,dV.$$

Каждый из интегралов будет отличен от нуля только в части объема V_1, в которой существуют плотности токов $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$ и $\dot{\mathbf{J}}_{э1}$, т. е. в пределах объемов $V_{в1}$ и $V_{в2}$, занимаемых первым и вторым вибраторами. Тогда для леммы Лоренца будет справедливо равенство

$$\int\limits_{V_{в2}} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV = \int\limits_{V_{в1}} \dot{\mathbf{J}}_{э1}\dot{\mathbf{E}}_2\,dV.$$

Ввиду малости вибраторов можно считать, что в процессе интегрирования по их объемам поля $\dot{\mathbf{E}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$ будут изменяться незначительно и их можно считать постоянными и соответственно равными:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_{12}, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{21},$$

где $\mathbf{E}_{12}$ — напряженность поля, создаваемая первым вибратором в месте расположения второго вибратора; $\mathbf{E}_{21}$ — напряженность поля, создаваемая вторым вибратором в месте расположения первого вибратора.

Лемма Лоренца при этом приобретает вид

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int\limits_{V_{в2}} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\,dV = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int\limits_{V_{в1}} \dot{\mathbf{J}}_{э1}\,dV.$$

Представив элементы объема dV в левом и правом интегралах соответственно в виде

$$dV = \mathbf{S}_2 d\mathbf{l},$$
$$dV = \mathbf{S}_1 d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ — площади поперечного сечения проводов первого и второго вибраторов, получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int\limits_{l_2} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\mathbf{S}_2\,d\mathbf{l} = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int\limits_{l_1} \dot{\mathbf{J}}_{э1}\mathbf{S}_1\,d\mathbf{l}.$$

Далее можно написать, что

$$\dot{\mathbf{J}}_{э2}\mathbf{S}_2 = \dot{I}_{э2}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{э1}\mathbf{S}_1 = \dot{I}_{э1},$$

где $\dot{I}_{э2}$ и $\dot{I}_{э1}$ — электрические токи во втором и первом вибраторах.

Так как в элементарных вибраторах токи $\dot{I}_{э2}$ и $\dot{I}_{э1}$ полагают неизменными по длине вибраторов, лемма Лоренца записывается в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_{12}\dot{I}_{э2}\int\limits_{l_2} d\mathbf{l}=\dot{\mathbf{E}}_{21}\dot{I}_{э1}\int\limits_{l_1} d\mathbf{l},$$

или

$$\dot{\mathbf{E}}_{12}\dot{I}_{э2}\mathbf{l}_2=\dot{\mathbf{E}}_{21}\dot{I}_{э1}\mathbf{l}_1. \qquad (31.13)$$

Это соотношение называется *теоремой взаимности для элементарных электрических вибраторов*. Теорема позволяет найти любую из входящих в нее шести величин, если известны пять оставшихся.

Аналогичное соотношение (теорема взаимности) получается для элементарных магнитных вибраторов:

$$\dot{\mathbf{H}}_{12}\dot{I}_{м2}\mathbf{l}_2=\dot{\mathbf{H}}_{21}\dot{I}_{м1}\mathbf{l}_1. \qquad (13.14)$$

Может быть найдена теорема взаимности для элементарных электрического и магнитного вибраторов. Лемма Лоренца при этом записывается в форме

$$\int\limits_{V_1}(\dot{\mathbf{J}}_{м1}\dot{\mathbf{H}}_2+\dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1)\,dV=0.$$

Последующая аналогичная математическая обработка этого выражения приводит к искомой теореме:

$$\dot{\mathbf{H}}_{21}\dot{I}_{м1}\mathbf{l}_1=-\dot{\mathbf{E}}_{12}\dot{I}_{э2}\mathbf{l}_2. \qquad (31.15)$$

ГЛАВА 32
ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДАХ

§ 32.1. Постановка вопроса

Возможны различные способы возбуждения поля заданного типа в волноводах. В настоящей главе будут схематично даны некоторые из этих способов и с помощью леммы Лоренца определены общие выражения, позволяющие рассчитать амплитуду поля в волноводе в результате воздействия заданной системы сторонних токов.

§ 32.2. Общие принципы возбуждения в волноводах поля заданного типа

Поля в волноводах могут возбуждаться с помощью антенных или возбуждающих устройств следующих типов:

а) штыревого;

б) рамочного или петлевого;

в) щелевого.