

Возникновение «необыкновенной волны» при поперечном распространении плоского электромагнитного поля в намагниченной ферритовой среде называют *эффектом Коттона—Мутона*.

В настоящее время ферриты нашли широкое распространение в различных радиотехнических устройствах, описание которых выходит за рамки этой книги.

## ГЛАВА 35

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### § 35.1. Постановка вопроса

До сих пор рассматривались электродинамические процессы, происходящие в различных бесконечно протяженных средах, а также волноводах и объемных резонаторах. Нередко возникает необходимость отыскания электромагнитного поля в задачах, когда в безграничном пространстве находится какое-либо тело или группа тел, с которыми взаимодействует электромагнитная волна, распространяющаяся в пространстве. В результате этого взаимодействия первичное поле претерпевает изменения, которые и необходимо учесть при анализе процесса.

Под дифракцией электромагнитного поля условимся понимать процесс взаимодействия этого поля с телом или группой тел, находящихся в зоне распространяющейся электромагнитной волны.

Дифракция относится к числу труднейших задач электродинамики и в книге, посвященной ее основам, можно лишь наметить пути решения подобных задач. В качестве примеров возможных подходов к проблеме рассмотрим два случая: 1) дифракцию плоской волны на бесконечном идеально проводящем металлическом цилиндре—задачу, которая может быть решена аналитически точно; 2) дифракцию плоской волны на отверстии, сделанном в бесконечно протяженном, идеально проводящем плоском экране—задачу, которая может быть решена приближенным методом, требующим вывода вспомогательных соотношений—теоремы эквивалентности и формул Гюйгенса—Кирхгофа. Разумеется, эти случаи далеко не исчерпывают возможных методов решения дифракционных задач, и их можно рассматривать лишь как некоторое введение в теорию дифракции.

### § 35.2. Дифракция плоской волны на бесконечном идеально проводящем металлическом цилиндре

Пусть плоская волна встречается на своем пути бесконечный, идеально проводящий металлический цилиндр радиуса  $r_0$ . Пусть вектор Пойнтинга плоской волны перпендикулярен оси цилиндра и поляризация поля такова, что вектор  $\vec{E}$  падающей волны парал-

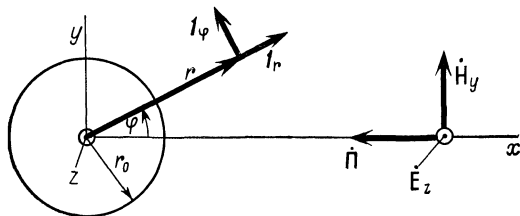


Рис. 35.1

лелен оси цилиндра (рис. 35.1). Для поля падающей волны будут справедливы такие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \dot{P}_x, \\ \dot{E}_z, \dot{H}_y &\neq 0, \\ \dot{E}_x = \dot{E}_y = \dot{H}_x = \dot{H}_z &= 0, \\ \partial/\partial y = \partial/\partial z &= 0, \\ \partial/\partial x &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

Присутствие цилиндра изменяет поле не только вдоль направления распространения падающей волны, т.е. вдоль оси  $x$ , но и вдоль оси  $y$ . Рассмотрим, какие составляющие поля должны содержаться в дифракционном поле. Для этого используем систему уравнений Максвелла, записанную в форме соотношений (34.10), (34.14).

Допустим, что в дифракционном поле так же, как и в поле падающей волны, не будет составляющих  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$ :

$$\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0. \quad (35.2)$$

Как было отмечено, наличие цилиндра вызывает появление производных:

$$\partial/\partial y, \quad \partial/\partial x \neq 0. \quad (35.3)$$

На основании последнего уравнения системы (34.14) можно заключить, что составляющая поля  $\dot{H}_z$ , отсутствующая в падающей волне, не возникнет и в дифракционном поле:

$$\dot{H}_z = 0. \quad (35.4)$$

На основании первого уравнения системы (34.14) и соотношений (35.3) можно сделать вывод, что существование производной  $\partial \dot{E}_z/\partial y$  приведет к появлению составляющей поля  $\dot{H}_x$ , которой в падающей волне не было.

При сделанных допущениях будут удовлетворены все оставшиеся уравнения систем (34.10) и (34.14). В результате возникнет система

скалярных уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= j\omega \mu_a \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (35.5)$$

Эти уравнения связывают три составляющие поля:  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{H}_y$  и  $\dot{E}_z$ . Поскольку рассматривается дифракция плоской волны на цилиндре, для применения граничных условий целесообразно перейти к цилиндрической системе координат. Этот переход может быть осуществлен путем следующих рассуждений.

Полученное дифракционное поле содержит три составляющие  $\dot{H}_x$ ,  $\dot{H}_y$  и  $\dot{E}_z$ , и его можно рассматривать как поле электрического типа по отношению к координате  $z$ . Действительно, это поле содержит одну продольную электрическую составляющую и две поперечные по отношению к координате  $z$  магнитные составляющие  $\dot{H}_x$  и  $\dot{H}_y$ . В таком поле, как было показано в гл. 11, поперечные составляющие можно выразить через продольную составляющую, определяемую соотношением (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \eta} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Рассматривая задачу в цилиндрической системе координат, выберем следующее соответствие криволинейных и цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \varphi, \quad \zeta \rightarrow z, \\ h_\xi &= h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{aligned} \quad (35.6)$$

При этом уравнение (11.35) может быть представлено в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Рассматриваемое поле не зависит от координаты  $z$ . Допустим также, что среда лишена потерь:

$$\tilde{\mu}_a \rightarrow \mu_a, \quad \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \epsilon_a, \quad \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a \rightarrow \omega^2 \mu_a \epsilon_a = \beta^2.$$

Тогда уравнение для продольной составляющей поля  $\dot{E}_z$  следует записать в виде

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \quad (35.7)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \dot{E}_z = 0, \quad (35.8)$$

или иначе

$$r \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \beta^2 r^2 \dot{E}_z + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (35.9)$$

Уравнение решают с помощью метода Фурье путем подстановки вида

$$\dot{E}_z = R_1 \Phi. \quad (35.10)$$

Функция  $R_1$  является функцией только координаты  $r$ , а функция  $\Phi$  — функцией только координаты  $\varphi$ .

Подставляя выражение (35.10) в уравнение (35.9), получаем

$$r^2 \Phi \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \Phi \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 R_1 \Phi + R_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Разделим это уравнение на  $R\Phi$ :

$$r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Первые три члена уравнения являются функциями только координаты  $r$ , последний член — функцией только координаты  $\varphi$ . Равенство возможно, если члены, являющиеся функцией  $r$ , и член, являющийся функцией  $\varphi$ , по отдельности равны одному и тому же числу  $m^2$ , взятому с различными знаками. В силу этого положим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -m^2, \\ r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 &= m^2. \end{aligned}$$

Каждое из полученных соотношений является функцией только одной координаты. Следовательно, частные производные можно заменить обычными и уравнения записать таким образом:

$$d^2 \Phi / d\varphi^2 + m^2 \Phi = 0, \quad (35.11)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dr} + \left( \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (35.12)$$

Начало цилиндрических координат расположено на оси цилиндра, и угол  $\varphi$  отсчитывается вокруг цилиндра. Дифракционное поле должно быть периодически по  $\varphi$ , следовательно, коэффициент  $m$  должен быть целым числом.

Решение уравнения (35.11) можно представить в форме

$$\Phi = A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \sin(m\varphi). \quad (35.13)$$

Уравнение (35.12) является уравнением Бесселя. В гл. 14 были определены различные функции Бесселя, удовлетворяющие этому уравнению. В данном случае плоская волна соприкасается с проводящим цилиндром, отражается от его поверхности и уходит в бесконечность. Другими словами, возникает вторичное поле, распро-

страняющееся от поверхности цилиндра в бесконечность. Как было отмечено в § 14.1, такому полю соответствуют функции Ханкеля второго рода порядка  $m$ .

В § 14.1 эти функции обозначались  $H_m^{(2)}(gr)$  [см. формулу (14.18)]. Сравнивая уравнение Бесселя (14.8) с уравнением (35.12), видим, что роль коэффициента  $g$  в анализируемом случае выполняет коэффициент  $\beta$ . Следовательно, по аналогии с формулой (14.18) решение уравнения (35.12) можно записать в виде

$$R_1 = B_{1m} H_m^{(2)}(\beta r). \quad (35.14)$$

С учетом формулы (35.10) продольная составляющая поля

$$\dot{E}_z = \{A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \sin(m\varphi)\} B_{1m} \dot{H}^{(2)}(\beta r). \quad (35.15)$$

Суммарное поле, существующее в пространстве, складывается из поля падающей плоской волны и вторичного поля  $\dot{E}_z$ , возникшего в результате существования металлического цилиндра.

Поле падающей плоской волны  $\dot{E}_{zn}$ , распространяющейся в сторону отрицательных значений оси  $x$ , можно выразить в обычной форме:

$$\dot{E}_{zn} = \dot{E}_{zn0} e^{j\beta x}. \quad (35.16)$$

В цилиндрической системе координат  $x = r \cos \varphi$ . Следовательно,

$$\dot{E}_{zn} = \dot{E}_{zn0} e^{j\beta r \cos \varphi}. \quad (35.17)$$

В такой записи зависимость от угла  $\varphi$  в падающей волне выражается четным законом ( $\cos \varphi$ ). Сохраняя тот же характер зависимости во вторичном поле  $\dot{E}_z$ , положим  $A_{2m} = 0$ . Тогда вторичное поле следует записать следующим образом:

$$\dot{E}_z = C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi), \quad (35.18)$$

где

$$C_m = A_{1m} B_{1m}.$$

Выражение (35.18) представляет собой одну гармонику вторичного поля. Суммарное вторичное поле  $\dot{E}_{z\Sigma}$  получается путем сложения всех гармоник:

$$\dot{E}_{z\Sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi). \quad (35.19)$$

Таким образом, в пространстве существуют поле падающей волны, определяемое выражением (35.17), и суммарное вторичное поле  $\dot{E}_{z\Sigma}$ .

Складывая эти поля, найдем общее поле, существующее в пространстве с учетом влияния металлического цилиндра:

$$\dot{E}_{z \text{ обш}} = \dot{E}_{zn0} e^{j\beta r \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi). \quad (35.20)$$

В соответствии с граничными условиями у поверхности идеального металла при  $r = r_0$  выполняется равенство

$$\dot{E}_{z\pi 0} e^{j\beta r_0 \cos \varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) \cos(m\varphi) = 0. \quad (35.21)$$

В теории функций Бесселя [8] доказывается справедливость соотношения

$$e^{j\beta r_0 \cos \varphi} = J_0(\beta r_0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0) \cos(m\varphi). \quad (35.22)$$

Здесь  $J_0(\beta r_0)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $J_m(\beta r_0)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $m$ .

Подставляя выражение (35.22) в равенство (35.21), получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z\pi 0} J_0(\beta r_0) + \dot{E}_{z\pi 0} \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0) \cos(m\varphi) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) \cos(m\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (35.23)$$

Используем условия ортогональности тригонометрических функций:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{при } m \neq n), \\ \pi & (\text{при } m = n). \end{cases}$$

Умножая выражение (35.23) на  $\cos(n\varphi) d\varphi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), интегрируя в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$  и используя условия ортогональности функций, получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z\pi 0} J_0(\beta r_0) + C_0 H_0^{(2)}(\beta r_0) &= 0, \\ \dot{E}_{z\pi 0} 2(j)^m J_m(\beta r_0) + C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) &= 0, \end{aligned}$$

из которых можно определить амплитудные коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\dot{E}_{z\pi 0} \frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)}, \\ C_m &= -2(j)^m \dot{E}_{z\pi 0} \frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)}. \end{aligned} \quad (35.24)$$

Знание амплитудных коэффициентов позволяет определить с помощью формул (35.19), (35.24) суммарное вторичное поле  $\dot{E}_{z\Sigma}$ :

$$\dot{E}_{z\Sigma} = -\dot{E}_{z\pi 0} \left\{ \frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)} H_0^{(2)}(\beta r) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m \frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)} H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi) \right\}. \quad (35.25)$$

На основании полученного выражения можно построить диаграмму направленности суммарного вторичного поля  $\dot{E}_{z\Sigma}$  в зависимости от угла  $\varphi$  и значений  $\beta r_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0$ .

Знание суммарного электрического поля позволяет определить с помощью уравнений Максвелла суммарное магнитное поле. Граничные условия у поверхности идеального металла дают возможность отыскать токи на поверхности цилиндра, вызванные падающей плоской волной.

### § 35.3. Первая и вторая граничные задачи электродинамики и соответствующие им теоремы. Теорема эквивалентности

В ряде электродинамических задач возникает следующая ситуация: известны плотности сторонних электрического и магнитного токов  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{J}_m$ , которые создают электромагнитное поле. Это поле распространяется среди каких-либо граничных поверхностей, которые приводят к изменению поля, созданного сторонними токами. Требуется определить суммарное поле с учетом влияния граничных поверхностей.

Задача может быть решена, если каким-либо образом удалось определить тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей у граничных поверхностей. Отыскание суммарного поля базируется при этом на так называемой теореме эквивалентности. Эта теорема суммирует результаты двух теорем: 1) теоремы, соответствующей первой внешней граничной задаче электродинамики; 2) теоремы, соответствующей второй внешней граничной задаче электродинамики.

Первая внешняя граничная задача электродинамики сводится к определению поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в объеме  $V_2$ , ограниченном изнутри некоторой замкнутой поверхностью  $S_1$ , окружающей объем  $V_1$  (рис. 35.2), по заданным значениям тангенциальной составляющей электрического поля  $\mathbf{E}_{1\tau}$  на поверхности  $S_1$ . При этом предполагается, что все сторонние источники поля сосредоточены внутри объема  $V_1$  или на поверхности  $S_1$ , являющейся частью объема  $V_1$ . Сторонние источники поля в объеме  $V_2$  отсутствуют.

Теорему, соответствующую этой задаче, можно сформулировать следующим образом. Поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , существующее в объеме  $V_2$ , эквивалентно полю, возбужденному поверхностными магнитными токами, протекающими по поверхности  $S_1$ , при условии, что связь плотности этих токов  $\dot{\mathbf{v}}_m$  с заданной на  $S_1$  тангенциальной составляющей поля  $\mathbf{E}_{1\tau}$  определяется граничным условием у поверхности идеального металла (8.21):

$$\mathbf{E}_{1\tau} = [\mathbf{1}_{n1} \dot{\mathbf{v}}_m],$$

или иначе

$$\dot{\mathbf{v}}_m = [\mathbf{E}_{1\tau} \mathbf{1}_{n1}]. \quad (35.26)$$

Здесь  $\mathbf{E}_{1\tau}$  — тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля у по-

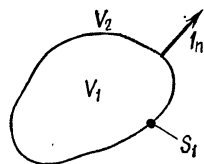


Рис. 35.2

верхности  $S_1$ ;  $\mathbf{1}_{n1}$  — единичный нормальный вектор к поверхности  $S_1$ , направленный в сторону объема  $V_2$ .

Доказательство этой теоремы довольно простое. Оно основано на теореме единственности. Решение уравнений Максвелла единственно, если оно удовлетворяет условиям излучения на бесконечности и задана тангенциальная составляющая электрического или магнитного поля на поверхности  $S_1$ .

Так как в объеме  $V_2$  нет сторонних источников тока, то условия излучения удовлетворяются. Поскольку заданная тангенциальная составляющая  $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$  совпадает по условиям теоремы с тангенциальной составляющей, созданной током с плотностью  $\dot{\mathbf{v}}_m$ , поле в объеме  $V_2$ , созданное сторонними токами, находящимися в объеме  $V_1$ , будет совпадать на основании теоремы единственности с полем, созданным магнитным током с плотностью  $\dot{\mathbf{v}}_m$ . Таким образом, первую теорему можно считать доказанной.

Вторая внешняя граничная задача электродинамики сводится к определению поля  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  в объеме  $V_2$ , ограниченном изнутри замкнутой поверхностью  $S_1$ , окружающей объем  $V_1$ , по заданным значениям тангенциальной составляющей магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$  на поверхности  $S_1$ . При этом предполагается, что все сторонние источники поля сосредоточены внутри объема  $V_1$  или на поверхности  $S_1$ , являющейся частью объема  $V_1$ . Сторонние источники поля в объеме  $V_2$  отсутствуют.

Этой задаче соответствует вторая теорема, формулируемая таким образом. Поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$ , существующее в объеме  $V_2$ , эквивалентно полю, возбужденному поверхностными электрическими токами, протекающими по поверхности  $S_1$ , при условии, что связь плотности этих токов  $\dot{\mathbf{v}}_a$  с заданной тангенциальной составляющей поля  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$  определяется граничным условием у поверхности идеального металла  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [\dot{\mathbf{v}}_a \mathbf{1}_{n1}]$ .

Определяя из этого условия плотность поверхностного электрического тока  $\dot{\mathbf{v}}_a$ , получим формулу

$$\dot{\mathbf{v}}_a = [\mathbf{1}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}], \quad (35.27)$$

где  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$  — тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля у поверхности  $S_1$ .

Нетрудно видеть, что вторую теорему можно получить из первой путем применения принципа перестановочной двойственности. Надобность в ее доказательстве отпадает, поскольку оно проводится аналогично.

Теорема эквивалентности, представляющая собой суперпозицию первой и второй теорем, формулируется следующим образом. Поле  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$ , существующее в объеме  $V_2$ , ограниченном изнутри замкнутой поверхностью  $S_1$  с заданными на этой поверхности тангенциальными составляющими электрического и магнитного полей  $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ , совпадает с полем, возбужденным поверхностными магнитным и электри-



ческим токами, протекающими по идеально проводящей поверхности  $S_1$ , при условии, что эти токи связаны с заданными значениями тангенциальных составляющих полей граничными условиями (35.26), (35.27) у поверхности идеального металла.

Теорема эквивалентности позволяет решить задачу об определении суммарного поля, возникающего в результате существования сторонних токов и поверхностей  $S_1$  в рассматриваемой части пространства.

Это суммарное поле представляет собой суперпозицию полей, созданных сторонними токами  $\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_m$ , и полей, возникающих под действием поверхностных токов  $\mathbf{v}_a$  и  $\mathbf{v}_m$  на поверхностях  $S_1$ . Принципиальная трудность решения задачи заключается в определении векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$  у граничных поверхностей.

**§ 35.4. Определение суммарного поля, создаваемого сторонними токами в случае присутствия в рассматриваемой части пространства дополнительных поверхностей.  
Формулы типа Гюйгенса — Кирхгофа**

Как указывалось в § 35.3, суммарное поле является суперпозицией полей, созданных сторонними токами  $\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_m$ , и полей, возникающих под действием поверхностных токов  $\mathbf{v}_a$  и  $\mathbf{v}_m$ , протекающих в соответствии с теоремой эквивалентности по идеально проводящим поверхностям  $S_1$ , совпадающим с реальными поверхностями в пространстве. Векторные потенциалы, создаваемые токами  $\mathbf{J}_a$  и  $\mathbf{J}_m$ , определяют с помощью формул (28.46), (28.48):

$$\dot{\mathbf{A}}_a = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV,$$

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV.$$

Суммарные векторные потенциалы выражаются соотношениями:

$$\dot{\mathbf{A}}_{a\Sigma} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \left( \int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS \right), \quad (35.28)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma} = \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \left( \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV + \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS \right). \quad (35.29)$$

Плотности токов  $\mathbf{J}_a$ ,  $\mathbf{J}_m$  являются заданными. В соответствии с формулами (35.26), (35.27) для определения плотностей поверхностных токов  $\dot{\mathbf{v}}_a$  и  $\dot{\mathbf{v}}_m$  необходимо знать электромагнитное поле у поверхностей  $S_1$ , что возможно, если поставленная задача решена и распределение поля в пространстве известно. В этом и заключается главная сложность задачи.

Если удалось определить суммарные векторные потенциалы  $\dot{\mathbf{A}}_{a\Sigma}$  и  $\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma}$ , то значения векторов поля  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  можно найти из ранее выведенных соотношений (27.11), (27.21), (27.25), (27.26).

Поля, возникающие в результате совместного действия электрических и магнитных токов, можно получить с помощью принципа суперпозиции. В итоге получаются соотношения вида (27.28), (27.29).

Представляет интерес отыскание соотношений, непосредственно связывающих поля  $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ ,  $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$  со сторонними токами. Для этой цели в выражения (27.28), (27.29) необходимо подставить значения векторных потенциалов из формул (35.28), (35.29). При осуществлении дифференциальных операций следует помнить, что дифференцирование осуществляется в координатах точки наблюдения, от которых не зависят векторы  $\mathbf{J}_a$ ,  $\mathbf{J}_m$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_a$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_m$ . В результате получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma = & \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \text{rot} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{rot} \left( \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{V_1} \text{grad div} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{S_1} \text{grad div} \left( \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS - \\ & - j\omega \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV - j\omega \frac{\tilde{\epsilon}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \end{aligned} \quad (35.30)$$

Аналогично можно получить формулу для  $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = & - \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \text{rot} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{rot} \left( \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{V_1} \text{grad div} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{S_1} \text{grad div} \left( \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) dS - \\ & - \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV - \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \end{aligned} \quad (35.31)$$

Умножая и деля два первых и последних члена правой части выражения (35.30) на  $j\omega\tilde{\mu}_a$ , используя обозначение  $\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\epsilon}_a = \gamma^2$  и группируя члены, находим выражение для поля  $\mathbf{H}_\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\Sigma = & \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \gamma^2 \mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a4\pi} \int_{S_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left( \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & \left. + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dS. \end{aligned} \quad (35.32)$$

Формула (35.31) для электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$  может быть получена из формулы (35.30) для магнитного поля  $\mathbf{H}_\Sigma$  путем применения принципа перестановочной двойственности. В силу этого  $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$  можно определить из формулы (35.32) с помощью перестановок вида

$$\tilde{\mu}_a \rightarrow -\tilde{\epsilon}_a, \quad \mathbf{H}_\Sigma \rightarrow \dot{\mathbf{E}}_\Sigma, \quad \mathbf{J}_a \leftrightarrow -\mathbf{J}_m, \quad \dot{\mathbf{v}}_a \leftrightarrow -\dot{\mathbf{v}}_m.$$

После осуществления перестановок получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = & -\frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & \left. - \gamma^2 \mathbf{J}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dV - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a4\pi} \int_{S_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left( \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right) - \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}_a \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \right\} dS. \end{aligned} \quad (35.33)$$

Таким образом, если известны плотности сторонних токов и плотности поверхностных токов на поверхностях, существующих в рассматриваемой части пространства, то задача определения векторов поля в любой точке этого пространства может быть принципиально решена с помощью выражений (35.32), (35.33). Основная сложность заключается в определении плотностей поверхностных токов.

Как указывалось, плотности токов  $\dot{\mathbf{v}}_a$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_m$  связаны с векторами поля у поверхностей  $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$  соотношениями (35.27) и (35.26).

Подставим эти соотношения в формулы (35.32), (35.33):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = & \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) + \right. \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) + \gamma^2 \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\} dV + \\ & + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi} \int_{S_1} \left\langle j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \left\{ [\mathbf{I}_{1\tau} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \right. \\ & + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \gamma^2 [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\rangle dS, \quad (35.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = & - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{V_1} \left\{ j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left( \mathbf{J}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) - \right. \\ & - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left( \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) - \gamma^2 \mathbf{J}_a \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\} dV - \\ & - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a 4\pi} \int_{S_1} \left\langle j\omega\tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \right. \\ & - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\mathbf{I}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \gamma^2 [\mathbf{I}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left. \right\rangle dS. \quad (35.35) \end{aligned}$$

Полученные выражения позволяют определить электромагнитное поле в любой точке пространства в случае, если известно его значение у поверхностей  $S_1$ . В § 35.5 дается пример возможного применения выведенных формул.

### § 35.5. Дифракция плоских волн на отверстии в бесконечно протяженном идеально проводящем экране

Допустим, что плоская волна падает на бесконечно протяженный плоский металлический экран, в котором сделано прямоугольное отверстие. Пусть вектор Пойнтинга плоской волны перпендикулярен плоскости экрана, как показано на рис. 35.3.

Так как экран предполагается идеально проводящим, тангенциальная составляющая электрического поля у его поверхности должна быть равна нулю. Поэтому по всей поверхности экрана, за исключением отверстия, векторное произведение  $[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{I}_{n1}]$  в формулах (35.34) и (35.35) следует принять равным нулю.

Плоская волна, падающая на отверстие в экране, вызывает появление тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности экрана, со стороны объема  $V_2$ . Однако, как показывает более строгое рассмотрение вопроса, эта составляющая магнитного поля за пределами отверстия будет малой. Вслед-

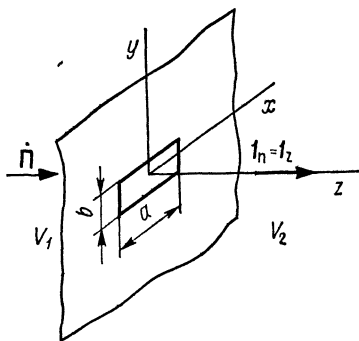


Рис. 35.3

ствие этого можно сделать допущение, что и векторное произведение  $[\mathbf{1}_{n1}\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]$  за пределами отверстия у поверхности экрана можно считать равным нулю.

Далее предположим, что поле в отверстии такое же, как у падающей плоской волны. Примем поляризацию падающего поля такой, при которой оно содержит составляющие  $\dot{\mathbf{E}}_x$  и  $\dot{\mathbf{H}}_y$ . Тогда решаемую дифракционную задачу можно сформулировать таким образом.

Все источники поля находятся в объеме  $V_1$ . В объеме  $V_2$  источников поля нет. В пределах площади отверстия в экране заданы тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей  $\dot{\mathbf{E}}_x$  и  $\dot{\mathbf{H}}_y$ . За пределами отверстия тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей равны нулю. Требуется определить электромагнитное поле в объеме  $V_2$ .

Решая задачу для объема  $V_2$  с помощью формул (35.32), (35.33), плотности токов  $\dot{\mathbf{J}}_s$  и  $\dot{\mathbf{J}}_m$  следует положить в этом объеме равными нулю, в силу чего объемные интегралы в указанных выражениях исчезнут.

Поверхностные интегралы сохраняются. Плотности поверхностных токов необходимо найти с помощью соотношений (35.26), (35.27):

$$\dot{\mathbf{v}}_m = [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_{n1}] = [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_y \dot{\mathbf{E}}_x, \quad (35.36)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s = [\mathbf{1}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_y] = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] = -\mathbf{1}_x \dot{\mathbf{H}}_y. \quad (35.37)$$

Интегрирование в поверхностных интегралах следует проводить в пределах площади отверстия, так как за его пределами поверхностных токов нет.

С учетом сказанного формулы (35.32), (35.33) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_\Sigma = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - j\omega\tilde{\epsilon}_a [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\rangle dS, \quad (35.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_\Sigma = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \text{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{j\omega\tilde{\epsilon}_a} \text{grad div} \left\{ [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + j\omega\tilde{\mu}_a [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\rangle dS. \quad (35.39) \end{aligned}$$

В этих выражениях  $S_0$  — площадь отверстия. Заданным является поле падающей плоской волны  $\dot{\mathbf{E}}_x$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_y$ .

Поверхностные интегралы в выражениях (35.38), (35.39) можно вычислить с требуемой степенью точности, однако решение будет

приближенным, поскольку оно не учитывает «затекание» поверхностных токов за пределы площади отверстия.

Подобный подход к задачам дифракции в электродинамике используют довольно часто. Таким образом, можно, например, найти поле, излучаемое открытым концом прямоугольного или круглого волновода, или поле рупорной антенны. Задача сводится к вычислению поверхностных интегралов по площади поперечного сечения волноводов или рупоров. При этом полагают, что поле в волноводах или рупорах такое же, и в волноводах или рупорах бесконечной протяженности. «Затекание» поверхностных токов на внешние стенки волноводов и рупоров при этом не учитывается, так же как не учитывается изменение поля в раскрыве волноводов или рупоров по сравнению с полем, существующем в этих системах в случае их бесконечной протяженности.

Поскольку в формулах (35.34), (35.35) искомое поле входит в левую и правую интегральную части, в ряде случаев задачу можно свести к решению интегральных уравнений [9]. При этом теоретически задача решается точно, однако практически решение точных интегральных уравнений возможно выполнить только приближенными, численными методами.

## ГЛАВА 36

### ПРИНЦИП ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

#### § 36.1. Постановка вопроса

В электродинамике так же, как и в других отраслях науки и техники, широко используют моделирование. Задача создания антенного устройства, работающего в длинноволновом диапазоне и имеющего огромные размеры, может быть значительно облегчена путем проведения экспериментов на модели, работающей в диапазоне высоких частот и обладающей в силу этого малыми габаритами. При исследовании миллиметровых и субмиллиметровых волн возникает обратная проблема. При этом эксперимент целесообразно перенести в область более длинных волн, чтобы увеличить размеры устройства, с помощью которого проводится эксперимент.

Бывают случаи, когда реальная система должна работать в среде с параметрами, которые трудно воспроизвести в лабораторных условиях. Возникает вопрос, нельзя ли поставить эксперимент в лаборатории таким образом, чтобы он правильно отображал работу системы в реальных условиях.

Задачей настоящей главы является установление принципа, при соблюдении которого эксперимент, проведенный в одних условиях, правильно отображает работу системы в других условиях. Этот принцип называют *принципом электродинамического подобия*.