приближенным, поскольку оно не учитывает «затекание» поверхностных токов за пределы площади отверстия.

Подобный подход к задачам дифракции в электродинамике используют довольно часто. Таким образом, можно, например, найти поле, излучаемое открытым концом прямоугольного или круглого волновода, или поле рупорной антенны. Задача сводится к вычислению поверхностных интегралов по площади поперечного сечения волноводов или рупоров. При этом полагают, что поле в волноводах или рупорах такое же, и в волноводах или рупорах бесконечной протяженности. «Затекание» поверхностных токов на внешние стенки волноводов и рупоров при этом не учитывается, так же как не учитывается изменение поля в раскрыве волноводов или рупоров по сравнению с полем, существующем в этих системах в случае их бесконечной протяженности.

Поскольку в формулах (35.34), (35.35) искомое поле входит в левую и правую интегральную части, в ряде случаев задачу можно свести к решению интегральных уравнений [9]. При этом теоретически задача решается точно, однако практически решение точных интегральных уравнений возможно выполнить только приближенными, численными методами.

ГЛАВА 36
ПРИНЦИП ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

§ 36.1. Постановка вопроса

В электродинамике так же, как и в других отраслях науки и техники, широко используют моделирование. Задача создания антенного устройства, работающего в длинноволновом диапазоне и имеющего огромные размеры, может быть значительно облегчена путем проведения экспериментов на модели, работающей в диапазоне высоких частот и обладающей в силу этого малыми габаритами. При исследовании миллиметровых и субмиллиметровых волн возникает обратная проблема. При этом эксперимент целесообразно перенести в область более длинных волн, чтобы увеличить размеры устройства, с помощью которого проводится эксперимент.

Бывают случаи, когда реальная система должна работать в среде с параметрами, которые трудно воспроизвести в лабораторных условиях. Возникает вопрос, нельзя ли поставить эксперимент в лаборатории таким образом, чтобы он правильно отображал работу системы в реальных условиях.

Задачей настоящей главы является установление принципа, при соблюдении которого эксперимент, проведенный в одних условиях, правильно отображает работу системы в других условиях. Этот принцип называют *принципом электродинамического подобия*.

§ 36.2. Математические условия электродинамического подобия

Запишем уравнения Максвелла для мгновенных значений и векторов поля [см. уравнения (2.5), (2.6)]:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\mathbf{J}_э+\gamma_э\mathbf{E}+\varepsilon_а\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\mathbf{J}_м-\gamma_м\mathbf{H}-\mu_а\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}.$$

Для записи этих уравнений в безразмерной форме необходимо выделить безразмерные величины единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость от координат и времени, а также величины, несущие в себе размерность и масштаб.

Представим величины, входящие в уравнения Максвелла, в форме:

$$\left.\begin{array}{llll}\mathbf{H}=\beta_1\mathbf{a}_1, & \mathbf{E}=\beta_2\mathbf{a}_2, & \mathbf{J}_э=\beta_3\mathbf{a}_3, & \mathbf{J}_м=\beta_4\mathbf{a}_4,\\ \gamma_э=\beta_5 a_5, & \varepsilon_а=\beta_6 a_6, & \gamma_м=\beta_7 a_7, & \mu_а=\beta_8 a_8,\\ l=\beta_9 a_9, & t=\beta_{10}a_{10}. & & \end{array}\right\}\qquad(36.1)$$

Здесь $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ — безразмерные векторы единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость векторов поля и сторонних токов от безразмерных координат и времени; a_5, a_6, a_7, a_8 — безразмерные скаляры единичной амплитуды, определяющие функциональную зависимость удельных электрической и магнитной проводимостей, а также абсолютных диэлектрической и магнитной проницаемостей от безразмерных координат (в случае неоднородной среды) и векторов поля (в случае нелинейной среды); a_9, a_{10} — безразмерные скаляры единичной амплитуды, определяющие длину и время в дифференциальных операторах уравнений (2.5), (2.6); β_1 — β_{10} — масштабные коэффициенты, имеющие следующие единицы измерения:

β_1 — А/м; β_2 — В/м; β_3 — А/м^2; β_4 — В/м^2; β_5 — См·м; β_6 — Ф/м; β_7 — Ом/м; β_8 — Гн/м; β_9 — м; β_{10} — с.

Подставим выражения (36.1) в уравнения (2.5), (2.6):

$$\frac{\beta_1}{\beta_9}\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_1=\beta_3\mathbf{a}_3+\beta_5\beta_2 a_5\mathbf{a}_2+\frac{\beta_6\beta_2}{\beta_{10}}a_6\frac{\partial\mathbf{a}_2}{\partial a_{10}},\qquad(36.2)$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_9}\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_2=-\beta_4\mathbf{a}_4-\beta_7\beta_1 a_7\mathbf{a}_1-\frac{\beta_8\beta_1}{\beta_{10}}a_8\frac{\partial\mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}.\qquad(36.3)$$

Разделим уравнение (36.2) на β_1, уравнение (36.3) — на β_2 и умножим оба уравнения на β_9:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_1=\frac{\beta_3\beta_9}{\beta_1}\mathbf{a}_3+\frac{\beta_5\beta_2\beta_9 a_5}{\beta_1}\mathbf{a}_2+\frac{\beta_6\beta_2\beta_9 a_6}{\beta_{10}\beta_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{a}_2}{\partial a_{10}},\qquad(36.4)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_2=-\frac{\beta_4\beta_9}{\beta_2}\mathbf{a}_4-\frac{\beta_7\beta_1\beta_9 a_7}{\beta_2}\mathbf{a}_1-\frac{\beta_8\beta_1\beta_9 a_8}{\beta_{10}\beta_2}\cdot\frac{\partial\mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}.\qquad(36.5)$$

Вводя обозначения

$$C_1=\frac{\beta_3\beta_9}{\beta_1},\quad C_2=\frac{\beta_5\beta_2\beta_9 a_5}{\beta_1},\quad C_3=\frac{\beta_6\beta_2\beta_9 a_6}{\beta_{10}\beta_1},$$
$$C_4=\frac{\beta_4\beta_9}{\beta_2},\quad C_5=\frac{\beta_7\beta_1\beta_9 a_7}{\beta_2},\quad C_6=\frac{\beta_8\beta_1\beta_9 a_8}{\beta_{10}\beta_2} \qquad (36.6)$$

и подставляя их в уравнения (36.4), (36.5), получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}_1=C_1\mathbf{a}_3+C_2\mathbf{a}_2+C_3\frac{\partial\mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \qquad (36.7)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}_2=-C_4\mathbf{a}_4-C_5\mathbf{a}_1-C_6\frac{\partial a_1}{\partial a_{10}}. \qquad (36.8)$$

Уравнения (36.7) и (36.8) являются безразмерными. С их помощью можно описать различные электродинамические задачи.

Допустим, что имеются две электродинамические задачи и соответственно две группы уравнений, описывающих эти задачи. Если коэффициенты C с одинаковыми индексами в двух группах уравнений одинаковы, то уравнения будут идентичными. Однако идентичность уравнений не означает идентичность электродинамических задач. Идентичность задач возникает в том случае, когда коэффициенты β с одинаковыми индексами, а также коэффициенты a_5, a_6, a_7, a_8 двух задач равны друг другу. Идентичность уравнений требует равенства коэффициентов C, что может быть достигнуто при различных значениях коэффициентов β и a в первой и второй задачах. Если созданы условия, при которых коэффициенты C двух задач одинаковы при различных значениях коэффициентов β и a, то говорят, что электродинамические задачи подобны, т. е. описываются одними и теми же безразмерными уравнениями Максвелла. Обозначая коэффициенты, относящиеся к первой задаче, одним штрихом, а коэффициенты, относящиеся ко второй задаче,— двумя штрихами, можно записать требование идентичности двух электродинамических задач

$$\beta'_n=\beta''_n,\quad a'_5=a''_5,\quad a'_6=a''_6,\quad a'_7=a''_7,\quad a'_8=a''_8, \qquad (36.9$$

где $n=1, 2, 3, \ldots, 10$.

Требование же подобия двух электродинамических задач следуе записать в виде равенств

$$C'_m=C''_m, \qquad (36.1($$

где $m=1, 2, 3, \ldots, 6$.

Равенства (36.10) представляют собой математическое выраж ние принципа электродинамического подобия.

В приложении V даны примеры использования принципа электродинамического подобия.