ГЛАВА 37
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 37.1. Постановка вопроса

Процессы взаимодействия электронов и электронных пучков с электромагнитным полем занимают особое место в теории электромагнитного поля. На законах такого взаимодействия основана работа современных электронных устройств. Круг вопросов, подлежащих рассмотрению при изучении процессов взаимодействия, может составить содержание нескольких специальных курсов. В рамках курса «Основы электродинамики» невозможно достаточно осветить эти вопросы. Поэтому в настоящей главе ограничимся изложением основных положений взаимодействия электронов с электромагнитным полем, что можно рассматривать как введение в специальные курсы.

§ 37.2. Движение электрона в электромагнитном поле

В соответствии с законом Кулона (1.1) и определением вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ силу, которая действует на электрон со стороны электрического поля, можно выразить соотношением

$$\mathbf{F}_э = e\mathbf{E}, \tag{37.1}$$

где $\mathbf{F}_э$ — вектор силы, действующей на электрон со стороны электрического поля; e — заряд электрона, равный $1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл; $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля.

Действие магнитного поля характеризуется соотношением (1.56), которое применительно к рассматриваемому случаю, записывается в виде

$$\mathbf{F}_м = e[\mathbf{vB}], \tag{37.2}$$

где $\mathbf{F}_м$ — вектор силы, действующей на электрон со стороны магнитного поля; $\mathbf{v}$ — вектор скорости движения электрона; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции.

Суммарная сила $\mathbf{F}_e$, действующая на электрон, равна произведению массы на ускорение:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{1}_F m \frac{d^2r}{dt^2}, \tag{37.3}$$

где m — масса электрона, равная $9{,}108\cdot10^{-31}$ кг; d^2r/dt^2 — вторая производная пути r по времени t, или ускорение.

Можно написать, что

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_э + \mathbf{F}_м = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vB}]. \tag{37.4}$$

Сравнивая выражения (37.3) и (37.4), получаем

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{m}[\mathbf{vB}]. \tag{37.5}$$

Выражение (37.5) позволяет определить характер движения электрона в различных случаях. Рассмотрим некоторые из них.

Движение электрона в электрическом поле. В отсутствие магнитного поля на основании соотношений (27.13), (27.11)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U_э. \qquad (37.6)$$

Следовательно, выражение (37.5) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e}{m} \operatorname{grad} U_э = -\frac{e}{m} \mathbf{1}_F \frac{dU_э}{dr}. \qquad (37.7)$$

Так как

$$dr/dt = v \quad \text{и} \quad dr = v\,dt,$$

уравнение (37.7) может быть записано в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{dU_э}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\frac{e}{m} \int_{U_{э0}}^{U_э} dU_э$$

или, учитывая, что электрон несет отрицательный заряд,—

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e(U_э - U_{э0}). \qquad (37.8)$$

Если начальные значения v_0 и $U_{э0}$ равны нулю, то выражение (37.8) приводит к известному соотношению

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m} U_э}. \qquad (37.9)$$

Движение электрона в магнитном поле. В отсутствие электрического поля на основании выражения (37.2)

$$F_м = evB \sin\alpha, \qquad (37.10)$$

где α — угол между направлениями векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Пусть магнитное поле ориентировано вдоль оси z. Тогда $B_x = B_y = 0$ и уравнение (37.5) записывается в виде

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m} [\mathbf{v}\mathbf{B}_z]. \qquad (37.11)$$

Развернем выражения для $\mathbf{1}_F \frac{d^2r}{dt^2}$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{1}_F \frac{d^2r}{dt^2} = \mathbf{1}_x \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{1}_y \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{1}_z \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{1}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{1}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{1}_z \frac{dz}{dt}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (37.11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m}\cdot\frac{dy}{dt}B_z,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m}\cdot\frac{dx}{dt}B_z,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37.12)$$

Решение этих уравнений не представляет затруднений. Положив начальную скорость движения электрона v_0 и приняв ее направление таким, при котором угол с осью z равен α и угол проекции этой скорости на плоскость x, y с осью x равен β, напишем решение системы уравнений (37.12):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m}{eB_z}v_0\sin\alpha\sin\left(\frac{eB_z}{m}t-\beta\right),\\ y &= \frac{m}{eB_z}v_0\sin\alpha\cos\left(\frac{eB_z}{m}t-\beta\right),\\ z &= v_0t\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (37.13)$$

Правильность написанных решений легко подтвердить подстановкой их в систему уравнений (37.12). В плоскости x, y электрон движется по окружности, что может быть показано путем сложения возведенных в квадрат выражений для x и y:

$$x^2+y^2=\left(\frac{m}{eB_z}v_0\sin\alpha\right)^2. \qquad (37.14)$$

Движение по оси z в соответствии с последним уравнением системы (37.13) является поступательным, происходящим со скоростью $v_0\cos\alpha$. В целом электрон под действием магнитного поля движется по винтовой линии, вращаясь вокруг оси z и двигаясь поступательно вдоль нее. Из выражений (37.13) следует, что угловая частота ω_z вращения электрона вокруг оси z

$$\omega_z=\frac{eB_z}{m}. \qquad (37.15)$$

Движение электрона в однородном электромагнитном поле. Разберем простейший случай, когда электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны. Допустим, что $\mathbf{B}=\mathbf{B}_z$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{E}_y=\mathbf{E}_z=\mathbf{B}_x=\mathbf{B}_y=0$. Пусть в начальный момент времени электрон пересекает начало координат со скоростью v_0, направленной нормально к полю $\mathbf{B}_z$. Уравнения, определяющие движение электрона, на основании выражения (37.5) записывают в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m}E_x+\frac{e}{m}B_z\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m}B_z,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37.16)$$

В результате интегрирования уравнений (37.16) получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_z} v_{0x} \sin(\omega_z t) + \left(\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_z^2} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y}\right)\{1-\cos(\omega_z t)\}, \\ y &= \left(\frac{1}{\omega_z^2}\frac{e}{m} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y}\right)\sin(\omega_z t) - \frac{1}{\omega_z} v_{0x}\{1-\cos(\omega_z t)\} - \frac{E_x}{B_z} t, \\ z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (37.17)$$

где v_{0x}, v_{0y} — проекции скорости v_0 соответственно на оси x и y.

Исключая тригонометрические функции из выражений (37.17), получаем уравнение траектории электрона:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2, \quad (37.18)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_z}\left(v_{0y} + \frac{E_x}{B_z}\right), \\ B &= -\frac{1}{\omega_z}\left(v_{0x} + \frac{e}{m} E_x t\right), \\ R^2 &= \frac{2}{m}\cdot\frac{1}{\omega_z^2}\left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_{0y}}{B_z} E_x + \frac{m}{2B_z^2} E_x^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (37.19)$$

Таким образом, воздействие на электрон взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей приводит к уравнению траектории (37.18), которая описывается точкой на окружности радиуса R. Центр этой окружности перемещается прямолинейно и равномерно по прямой, находящейся на расстоянии A от оси y и ориентированной параллельно этой оси. Скорость перемещения центра равна E_x/B_z.

§ 37.3. Фиктивный угол пролета электронов

Во многих электронных устройствах электрон, излученный катодом, направляется под действием поля ко второму электроду. Очень важно знать время пролета электрона между электродами. Обычно существенно не абсолютное значение этого времени, а его отношение к периоду колебаний. В связи с этим вводят понятие угла пролета электронов θ:

$$\theta = 2\pi \frac{t_{\text{пр}}}{T},$$

где $t_{\text{пр}}$ — время пролета электрона между электродами; T — период колебаний напряжения между электродами.

Поскольку электроны обладают различными скоростями, время пролета каждого электрона различно. Чтобы внести некоторую определенность в понятие угла пролета, его заменяют фиктивным углом пролета, который определяют так же, как и угол пролета, но напряжение между электродами принимают постоянным, равным амплитудному значению переменного напряжения. Определим величину фиктивного угла пролета. Полагая в выражении (37.5) вектор **B** равным нулю, получаем следующее уравнение движения электрона:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{e}{m}E.$$

Если поле однородное и расстояние между электродами равно d, то

$$E=U_э/d$$

и уравнение движения электрона записывается в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{e}{md}U_э. \qquad (37.20)$$

Считая скорость электрона в начальный момент времени равной нулю и располагая начало координат в плоскости катода, получаем

$$r=\frac{eU_э}{md}\cdot\frac{t^2}{2},$$

откуда фиктивное время пролета при $r=d$

$$t_ф=d\sqrt{\frac{2m}{eU_э}}. \qquad (37.21)$$

Фиктивный угол пролета

$$\theta_ф=2\pi\frac{t_ф}{T}=\frac{2\pi}{T}d\sqrt{\frac{2m}{eU_э}}. \qquad (37.22)$$

Подставляя значение массы и заряда электрона, имеем

$$\theta_ф=\frac{12fd}{\sqrt{U_э}}. \qquad (37.23)$$

Здесь $\theta_ф$ — фиктивный угол пролета электрона, град.; f — частота колебаний напряжения, приложенного между электродами, мГц; d — расстояние между электродами, см; $U_э$ — напряжение между электродами, $В$.

Выражение (37.23) является расчетным для определения фиктивного угла пролета.

§ 37.4. Полный ток, возникающий между электродами

При расчете электронных устройств необходимо знать величину полного тока, возникающего между электродами в случае пролета электронов между ними. Этот ток можно найти из следующих соображений. Перемещение заряда между электродами сопровождается затратой мощности, равной произведению силы, приложенной к заряду, на скорость перемещения заряда:

$$P=F_эv. \qquad (37.24)$$

С другой стороны, эта мощность равна произведению напряжения, приложенного к электродам, на величину тока в цепи электродов:

$$P = U_э I_э. \qquad (37.25)$$

Приравнивая значения мощностей, находим

$$F_э v = U_э I_э. \qquad (37.26)$$

Подставляя в последнее выражение значение силы $F_э$ из (37.1) и полагая поле между электродами однородным, при котором

$$E = U_э/d,$$

где $U_э$ — напряжение на электродах; d — расстояние между электродами, можно написать уравнение (37.26) в виде

$$I_э = \frac{ev}{d}. \qquad (37.27)$$

Полученное значение тока, возникающего в цепи двух электродов при пролете между ними заряда e, представляет собой ток, который летящий заряд наводит в этих электродах. В силу этого этот ток называют наведенным. Так обстоит дело в случае, если частота мала и можно пренебречь током смещения между электродами. Если же частота велика, то к наведенному току следует прибавить ток смещения, плотность которого

$$\mathbf{J}_c = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}.$$

Чтобы получить плотность наведенного тока, следует разделить ток, найденный из выражения (37.27), на площадь электродов

$$\mathbf{J}_э = \mathbf{1}_n \frac{I_э}{S} = \mathbf{1}_n \frac{ev}{Sd}.$$

Произведение $S \cdot d$ представляет собой объем, заключенный между электродами, а частное от деления заряда на этот объем — объемную плотность зарядов $\rho_э$. Тогда плотность наведенного тока

$$\mathbf{J}_э = \mathbf{1}_n \rho_э v. \qquad (37.28)$$

Плотность суммарного тока $\mathbf{J}_\Sigma$ равна сумме плотностей наведенного тока и тока смещения:

$$\mathbf{J}_\Sigma = \mathbf{J}_э + \mathbf{J}_c = \mathbf{1}_n \rho_э v + \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \qquad (37.29)$$

Этот суммарный ток и следует принимать в расчет при анализе электронных приборов на сверхвысоких частотах.

§ 37.5. Взаимодействие между электронным потоком и электрическим полем

Работа ряда электронных устройств, например ламп бегущей волны, основана на принципе взаимодействия электронных пучков с электромагнитными полями. Для понимания работы подобных устройств необходимо представлять характер этого взаимодействия.

Прежде всего рассмотрим случай, когда на электронный поток в виде некоторого пучка конечного сечения действует внешнее поле E_z; ориентированное вдоль этого пучка. Пусть ось пучка электронов совпадает с осью z декартовой системы координат. Допустим, что скорость электронов в пучке складывается из некоторой постоянной составляющей v_0 и некоторой переменной составляющей $v(z, t)$, являющейся функцией координаты z и времени t:

$$v = v_0 + v(z, t). \tag{37.30}$$

На основании уравнения движения (37.3) можно написать уравнение движения электронов в пучке для данного случая:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = eE_z,$$

где m — масса электрона; d^2z/dt^2 — ускорение; e — заряд электрона; E_z — продольная составляющая напряженность электрического поля, действующего на пучок в соответствии с условиями анализируемой задачи.

Учитывая, что ускорение является первой производной скорости по времени, можно записать это уравнение в виде

$$m\frac{d}{dt}\{v_0 + v(z, t)\} = eE_z. \tag{37.31}$$

Пока неизвестно, как будет изменяться плотность объемных зарядов в электронном пучке под действием внешнего электрического поля. В силу этого запишем плотность объемных зарядов в виде некоторой постоянной составляющей ρ_0 и некоторой переменной составляющей $\rho(z, t)$, являющейся функцией координаты z и времени t:

$$\rho_{эп} = \rho_0 + \rho(z, t). \tag{37.32}$$

Плотность тока в пучке $\mathbf{J}_{эп}$ равна произведению плотности объемных зарядов ρ на вектор скорости движения этих зарядов $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{J}_{эп} = \rho_{эп}\mathbf{v}.$$

Подставляя в последнее выражение значение скорости и плотности из формул (37.30) и (37.32), получим плотность тока, которая также будет состоять из некоторой постоянной составляющей $\mathbf{J}_0$ и переменной составляющей $\mathbf{J}_п(z, t)$:

$$\mathbf{J}_{эп} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_п(z, t) = \{\rho_0 + \rho(z, t)\}\{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}(z, t)\}, \tag{37.33}$$

где

$$\mathbf{J}_0 = \rho_0\mathbf{v}_0. \tag{37.34}$$

Далее используем еще одну зависимость, связывающую плотность тока в пучке с плотностью объемных зарядов. Эта зависимость, называемая уравнением непрерывности, была установлена соотношением (2.10). Применительно к рассматриваемому случаю это соотношение следует записать в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{эп} = -d\rho_{эп}/dt. \qquad (37.35)$$

Уравнение непрерывности может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{эп} = \operatorname{div} \{\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_п (z, t)\} = -\frac{d}{dt} \{\rho_0 + \rho (z, t)\}. \qquad (37.36)$$

Уравнения (37.31), (37.33) и (37.36) являются системой уравнений, связывающих между собой поле, скорость, плотность объемных зарядов и плотность тока в пучке. С помощью этой системы можно связать одним уравнением любые две функции из указанных четырех. С этой целью запишем эти уравнения для комплексных амплитуд, что значительно облегчит решение. Начнем с уравнения (37.31). Проводя дифференцирование скорости по времени, следует учесть, что производная от постоянной составляющей скорости v_0 равна нулю. Переменную составляющую скорости следует дифференцировать как сложную функцию:

$$\frac{dv (z, t)}{dt} = \frac{dv (z, t)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dv (z, t)}{dt}.$$

Так как производная $dz/dt = v = v_0 + v (z, t)$ и дифференцирование по времени в случае комплексных амплитуд эквивалентно умножению на $j\omega$, из уравнения (37.31) получаем

$$(\dot{v}_0 + \dot{v}) \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega\dot{v} = \frac{e}{m} \dot{E}_z. \qquad (37.37)$$

Здесь $\dot{v}$ — комплексная амплитуда переменной составляющей скорости; $\dot{E}_z$ — комплексная амплитуда продольной составляющей напряженности электрического поля.

Используя уравнение (37.33), получим соотношение для комплексной амплитуды переменной составляющей плотности тока:

$$\dot{J}_п = \dot{\rho}\dot{v}_0 + \dot{\rho}_0\dot{v} + \dot{\rho}\dot{v}, \qquad (37.38)$$

где $\dot{J}_п$ — комплексная амплитуда переменной составляющей плотности тока.

Далее перейдем к последнему уравнению (37.36). Как известно, в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_п = \frac{\partial \dot{J}_{пx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{J}_{пy}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{J}_{пz}}{\partial z}.$$

В рассматриваемой задаче пучок ориентирован вдоль оси z, поэтому в приведенном выражении необходимо учитывать только составляющую $\dot{J}_{пz}$. Производная по времени от постоянной составляющей плотности объемного заряда $\dot{\rho}_0$ равна нулю. Тогда уравнение (37.36) для комплексных амплитуд запишется в виде

$$d\dot{J}_{пz}/dz = -j\omega\dot{\rho}, \qquad (37.39)$$

где $\dot{\rho}$ — комплексная амплитуда переменной составляющей плотности объемного заряда в пучке.

Уравнения для комплексных амплитуд (37.37), (37.38) и (37.39) представляют собой систему нелинейных уравнений, решение которых довольно сложно. Для упрощения задачи положим, что имеются малые изменения скорости и плотности объемного заряда по сравнению с их постоянными составляющими. Это может быть выражено неравенствами

$$|\dot{v}| \ll |\dot{v}_0| \text{ и } |\dot{\rho}| \ll |\dot{\rho}_0|.$$

В этом случае система нелинейных уравнений (37.37), (37.38) переходит в систему линейных уравнений:

$$\dot{v}_0 \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega\dot{v} = \frac{e}{m}\dot{E}_z, \quad (37.40)$$

$$\dot{J}_п = \dot{J}_{пz} = \dot{\rho}\dot{v}_0 + \dot{\rho}_0\dot{v}. \quad (37.41)$$

Уравнение (37.39) записывается без изменений.

Выведем из этой системы уравнений одно уравнение, связывающее между собой напряженность электрического поля $\dot{E}_z$ и плотность тока в пучке $\dot{J}_{пz}$. Для этого прежде всего найдем из уравнения (37.39) комплексную амплитуду плотности объемного заряда:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz}. \quad (37.42)$$

Подставим найденное значение $\dot{\rho}$ в уравнение (37.41):

$$\dot{J}_{пz} = -\frac{\dot{v}_0}{j\omega}\cdot\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz} + \dot{\rho}_0\dot{v}.$$

Далее определим из последнего уравнения комплексную амплитуду скорости $\dot{v}$:

$$\dot{v} = \frac{1}{\dot{\rho}_0}\left(\dot{J}_{пz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega}\cdot\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz}\right).$$

Подставим найденное значение $\dot{v}$ в уравнение (37.40):

$$\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0}\left(\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{пz}}{dz^2}\right) + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0}\left(\dot{J}_{пz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega}\cdot\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz}\right) = \frac{e}{m}\dot{E}_z.$$

Сгруппировав члены, получим

$$\frac{\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{пz}}{dz^2} + 2\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0}\cdot\frac{d\dot{J}_{пz}}{dz} + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0}\dot{J}_{пz} = \frac{e}{m}\dot{E}_z. \quad (37.43)$$

Это уравнение связывает плотность тока в электронном пучке с напряженностью электрического поля, действующего на пучок. Для дальнейшего анализа процесса необходимо задаться электрическим полем, действующим на пучок, или установить еще одну связь между полем и пучком, с тем чтобы, получив еще одно уравнение, решить его совместно с уравнением (37.43). Допустим, что в некоторой электродинамической системе, пока не определяемой конкретно, действует пучок электронов, который будем рассматривать как некоторый сторонний возбуждающий ток.

§ 37.6. Возбуждение поля электронным пучком

Пусть электронный пучок, ориентированный вдоль оси z в декартовой системе координат, проходит в среде, лишенной проводимости. В основу расчета положим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (2.12) и (2.13), приняв $\dot{J}_{\text{м}}=0$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{J}_{\text{э}}+j\omega\varepsilon_{\text{a}}\dot{\mathbf{E}},$$
$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_{\text{a}}\dot{\mathbf{H}}$$

(среда непроводящая, поэтому вместо $\tilde{\varepsilon}_{\text{a}}\tilde{\mu}_{\text{a}}$ взяты ε_{a} и μ_{a}).

Из этих уравнений получаются следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_{\text{a}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}},$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=\omega^2\mu_{\text{a}}\varepsilon_{\text{a}}\dot{\mathbf{E}}-j\omega\mu_{\text{a}}\dot{\mathbf{J}}_{\text{э}}.$$

Поскольку $\omega^2\mu_{\text{a}}\varepsilon_{\text{a}}=\beta^2$,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=\beta^2\dot{\mathbf{E}}-j\omega\mu_{\text{a}}\dot{\mathbf{J}}_{\text{э}}.$$

Используя векторное тождество

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}-\nabla^2\dot{\mathbf{E}},$$

получаем

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+\beta^2\dot{\mathbf{E}}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}+j\omega\mu_{\text{a}}\dot{\mathbf{J}}_{\text{э}}. \tag{37.44}$$

В исследуемой задаче роль плотности стороннего электрического тока играет плотность тока в электронном пучке $\dot{\mathbf{J}}_{\text{п}z}$. С учетом этого уравнение (37.44) следует записать в виде

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+\beta^2\dot{\mathbf{E}}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}+j\omega\mu_{\text{a}}\dot{\mathbf{J}}_{\text{п}z}. \tag{37.45}$$

Для определения дивергенции вектора $\dot{\mathbf{E}}$ используем уравнение (2.14):

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_{\text{a}}\dot{\mathbf{E}})=\dot{\rho}_{\text{э}},$$

которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=\dot{\rho}_{\text{э}}/\varepsilon_{\text{a}}.$$

Роль $\dot{\rho}_{\text{э}}$ играет плотность объемного заряда в пучке, в силу чего формулу можно записать следующим образом:

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=\dot{\rho}/\varepsilon_{\text{a}}. \tag{37.46}$$

Значение ρ определяется формулой (37.42).

Тогда выражение (37.46) можно записать таким образом:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}. \tag{37.47}$$

Подставляя выражение (37.47) в формулу (37.45), получаем

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \beta^2\dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{\text{п}z}. \tag{37.48}$$

Уравнение (37.48) является исходным уравнением, связывающим плотность тока в электронном пучке с электрическим полем, возбуждаемым этим пучком. В предыдущем параграфе была установлена связь между плотностью тока в пучке и полем $\dot{E}_z$ [(см. уравнение (37.43)]. Преобразуем уравнение (37.48) так, чтобы получить из него связь между плотностью тока в пучке и продольной составляющей электрического поля E_z. Для этого перейдем от векторного уравнения к скалярному, составленному для составляющей поля $\dot{E}_z$. В декартовой системе координат лапласиан равен

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathbf{1}_x\dot{E}^x + \mathbf{1}_y\dot{E}^y + \mathbf{1}_z\dot{E}^z),$$

где $\dot{E}^x$, $\dot{E}^y$, $\dot{E}^z$—составляющие поля $\dot{E}$ по координатным осям.

Для продольной составляющей поля, ориентированной вдоль оси z, из этого выражения следует сохранить только члены

$$\frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial z^2}.$$

В декартовой системе координат градиент равен

$$\operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz} = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}\right) + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}\right) + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}\right).$$

Ограничиваясь составляющей градиента, ориентированной вдоль оси z, в этом выражении следует сохранить член

$$\mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}\right) = \mathbf{1}_z \frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}.$$

Тогда скалярное уравнение для составляющей электрического поля, ориентированной вдоль оси z, полученное из уравнения (37.48), будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}^z}{\partial z^2} + \beta^2\dot{E}^z = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{п}z}. \tag{37.49}$$

Далее, следуя методу Фурье, предположим, что составляющая поля $\dot{E}^z$ в общем случае является функцией трех координат: x, y, z. Запишем это поле в виде произведения трех функций:

$$\dot{E}^z = XY\dot{E}_z,$$

где X — функция только координаты x, не зависящая от двух других координат; Y — функция только координаты y, не зависящая от двух других координат; $\dot{E}_z$ — функция, определяющая зависимость поля только от координаты z и не зависящая от координат x и y.

Подставляя последнее выражение в уравнение (37.49) и осуществляя дифференцирование, получаем

$$Y\dot{E}_z \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\dot{E}_z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 XY\dot{E}_z =$$

$$= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{п}z}.$$

Разделив полученное уравнение на произведение трех функций $XY\dot{E}_z$ и сгруппировав члены, получим

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \beta^2 = -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{п}z} \right).$$

В левой части этого уравнения первое слагаемое является функцией только координаты x, второе слагаемое функцией только координаты y, а третье слагаемое представляет собой постоянное число. В правой части первое слагаемое является функцией только координаты z, а второе и третье слагаемые в общем случае могут являться функцией всех трех координат. В соответствии с методом Фурье равенство возможно при условии, что первые два слагаемых в левой части являются постоянными числами и сумма их также является постоянным числом. Таким образом, можно написать

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g^2,$$

где g — некоторое постоянное число, эквивалентное поперечному волновому числу.

Положив $\beta^2 - g^2 = h^2$, где h — продольное волновое число, получим

$$h^2 = -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{п}z} \right).$$

Заменяя частную производную на обыкновенную, умножая все члены этого уравнения на $\dot{E}_z$ и группируя их, можно записать искомое уравнение в окончательном виде:

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + h^2 \dot{E}_z = \frac{1}{XY} \left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{п}z} \right). \qquad (37.50)$$

Из последнего уравнения следует, что сгруппированный по оси z электронный пучок, т. е. пучок, обладающий второй производной плотности тока по координате z, приводит к появлению сгруппированного осевого электрического поля, т. е. поля, обладающего второй производной по координате z. Наоборот, сгруппированное осевое электрическое поле приводит к группированию по оси z электронов в пучке. Исследуя поведение электрического поля вдоль оси z при неизменных значениях координат x и y, следует учесть, что функции X и Y при этом являются постоянными величинами и, следовательно, произведение XY в знаменателе правой части уравнения (37.50) превращается в постоянный множитель. Положив $1/(XY)=A_{xy}$, получим, вынося за скобки множитель $1/(j\omega\varepsilon_a)$, следующее уравнение, справедливое при заданных, неизменных значениях x и y:

$$\frac{d^2\dot{E}_z}{dz^2}+h^2E_z=-\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\left(\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+\beta^2\dot{J}_{\text{п}z}\right). \tag{37.51}$$

Совместное решение уравнений (37.43) и (37.51) в конкретном случае может дать закон изменения электрического поля и плотности тока в пучке вдоль оси z. Наметим в общих чертах это решение.

Составление уравнения для плотности тока в пучке не представляет трудностей. С этой целью определим $\dot{E}_z$ из уравнения (37.43):

$$\dot{E}_z=\frac{m\dot{v}_0}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}+\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\dot{J}_{\text{п}z}. \tag{37.52}$$

Найдем вторую производную напряженности электрического поля

$$\frac{d^2\dot{E}_z}{dz^2}=\frac{m\dot{v}_0}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^4\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^4}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^3\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^3}+\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}. \tag{37.53}$$

Подставим $\dot{E}_z$ из (37.52) и $\dfrac{d^2\dot{E}_z}{dz^2}$ из выражения (37.53) в уравнение (37.51):

$$\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^4\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^4}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^3\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^3}+\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+$$
$$+h^2\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+2h^2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}+h^2\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\dot{J}_{\text{п}z}+$$
$$+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\cdot\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\beta^2\dot{J}_{\text{п}z}=0.$$

Сгруппируем члены в полученном уравнении:

$$\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^4\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^4}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\frac{d^3\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^3}+\left(\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}+\frac{h^2 m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\right)\frac{d^2\dot{J}_{\text{п}z}}{dz^2}+$$
$$+2h^2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d\dot{J}_{\text{п}z}}{dz}+\left(\frac{h^2 j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\beta^2\right)\dot{J}_{\text{п}z}=0. \tag{37.54}$$

Уравнение (37.54) представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка с решением вида

$$\dot{J}_{\text{п}z}=A_1 e^{\alpha_1 z}+A_2 e^{\alpha_2 z}+A_3 e^{\alpha_3 z}+A_4 e^{\alpha_4 z}. \tag{37.55}$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ находят путем решения характеристического уравнения, соответствующего уравнению (37.54). Их отыскание в конкретных случаях не представляет трудностей. Зная решение уравнения (37.54) для плотности тока, можно подставить это решение в уравнение (37.52) и получить выражение для напряженности электрического поля $\dot{E}_z$. В общем случае это поле содержит четыре самостоятельные волны, причем некоторые волны могут быть возрастающими по амплитуде.

Электронный пучок взаимодействует с полем таким образом, что вызывает увеличение его амплитуды. Происходит процесс усиления.

Дальнейшее рассмотрение процессов взаимодействия электронного пучка с полем связано с исследованием конкретных электронных приборов, что выходит за рамки настоящей книги.