ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

§ I.1. Понятие о дивергенции и роторе векторной функции

При рассмотрении задач векторного анализа вводят понятие об источнике, создающем поле, и о стоке, его поглощающем. В качестве источника поля в электродинамике можно рассматривать передающую антенну, в качестве стока — приемную антенну. Интенсивность источника или стока поля принято характеризовать математической операцией, называемой *дивергенцией*. Формально дивергенцию поля вектора **a** обозначают $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и определяют выражением

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \qquad (I.1)$$

Здесь $\oint\limits_{\Delta S}$ — интеграл по замкнутой малой поверхности ΔS, окружающей точку, в которой определяется дивергенция; **a** — вектор, характеризующий поле; $d\mathbf{S} = dS\mathbf{1}_n$ — бесконечно малый элемент поверхности, окружающей точку, умноженный на единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$, направленный изнутри замкнутой поверхности наружу; ΔV — малый объем, охватываемый замкнутой поверхностью ΔS.

Путем предельного перехода замкнутая поверхность стягивается в точку. Таким образом, дивергенция характеризует интенсивность источника или стока поля в точке. В числителе выражения (I.1) находится поток вектора **a** через замкнутую поверхность ΔS.

Если вектор **a** составляет острый угол с единичной нормалью $\mathbf{1}_n$, то скалярное подынтегральное произведение

$$\mathbf{a}\, d\mathbf{S} = a\,dS \cos(\mathbf{a}, \mathbf{1}_n)$$

будет положительным. Векторное поле будет выходить из точки, в которой определяется дивергенция, и точка явится источником поля. Дивергенция в этом случае будет положительной скалярной величиной.

Если вектор **a** составляет тупой угол с единичной нормалью $\mathbf{1}_n$, то скалярное подынтегральное выражение будет отрицательным. Векторное поле будет входить в точку, в которой определяется дивер-

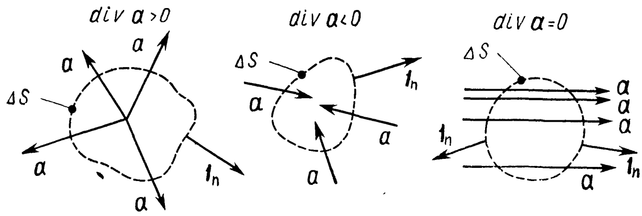

Рис. I.1

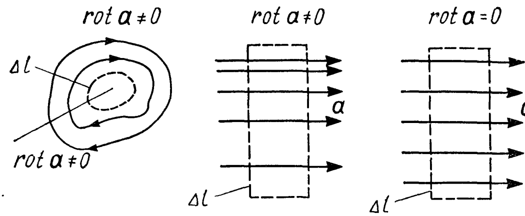

Рис. I.2

генция, и точка явится стоком поля. Дивергенция при этом будет отрицательной скалярной величиной.

Если поле отсутствует или суммарный поток вектора **a** через замкнутую поверхность ΔS равен нулю, то дивергенция в данной точке равна нулю. В точке нет ни источника, ни стока поля.

На рис. I.1 даны примеры полей, обладающих положительной, отрицательной и нулевой дивергенцией.

Помимо дивергенции в векторном анализе для характеристики поля используют математическую операцию, называемую *ротором*. Ротор поля вектора **a** обозначают rot **a** и определяют выражением

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta l} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{1}_n, \tag{I.2}$$

где $\mathrm{rot}_n \mathbf{a}$ — составляющая ротора, ориентированная по направлению единичной нормали $\mathbf{1}_n$ к поверхности ΔS; $\oint\limits_{\Delta l} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ — интеграл по малому замкнутому контуру Δl, охватывающему малую поверхность ΔS. Путем предельного перехода эта поверхность стягивается в точку.

На рис. I.2 даны примеры полей, когда в двух случаях ротор поля отличен от нуля, в третьем случае — равен нулю.

§ I.2. Понятие о градиенте скалярной функции

Поле скалярной функции характеризуется математической операцией, называемой *градиентом*. Градиент представляет собой вектор, направленный по нормали к поверхности равного уровня скалярной функции в сторону возрастания функции и численно равный скорости изменения функции по этому направлению. На рис. I.3 показаны поверхности равного уровня в поле скалярной функции U, а также единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$, ориентированный в сторону возрастания функции U. Скорость изменения функции по направлению $\mathbf{1}_n$ характеризуется производной dU/dn, где dn— бесконечно малое приращение пути по направлению $\mathbf{1}_n$. Градиент функции U обозначают $\operatorname{grad} U$ и записывают в виде общего математического соотношения

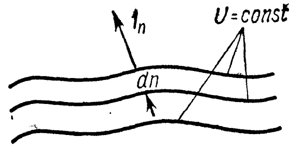

Рис. I.3

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dn}\mathbf{1}_n. \qquad (I.3)$$

Таким образом, градиент является математической операцией, осуществляемой над скалярной функцией, в результате которой возникает векторная функция.

§ I.3. Криволинейная ортогональная обобщенная система координат

При решении электродинамических задач приходится использовать различные координатные системы. При выводе общих соотношений целесообразно записывать их в такой математической форме, которая была бы пригодна для любой конкретной системы координат. При этом необходимым условием является достаточно простой переход от общих выражений к выражениям, предназначенным для использования в конкретной системе координат. Этим целям хорошо служит криволинейная ортогональная обобщенная система координат ξ, η, ζ, условно изображенная на рис. I.4.

Построим на базе этих координат бесконечно малый параллелепипед со сторонами dl_ξ, dl_η, dl_ζ. Обозначим площади сторон параллелепипеда: построенную на осях η, ζ—dS_ξ, построенную на осях ξ, ζ—dS_η и построенную на осях ξ, η—dS_ζ. Бесконечно малый объем параллелепипеда обозначим dV.

Под расстояниями dl_ξ, dl_η, dl_ζ будем понимать путь, пройденный точкой, заданной в системе координат ξ, η, ζ при изменении координат соответственно на $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Покажем на примере нескольких координатных систем, что этот путь далеко не всегда будет совпадать с приращением координат.

На рис. I.5 даны три системы координат: декартова, цилиндрическая и сферическая. Условимся о порядке изображения координатных осей или направлений. Если координаты записаны в последовательности x, y, z, то это означает справедливость соотношения

$$[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y] = \mathbf{1}_z.$$

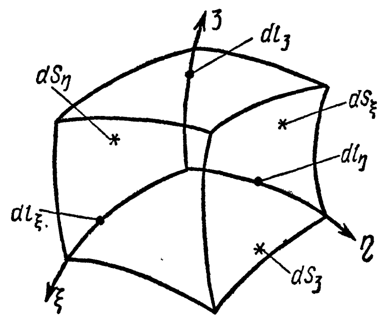

Рис. I.4

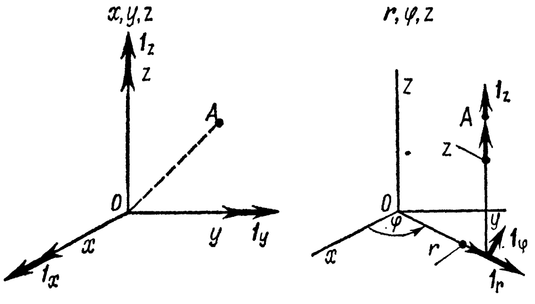

Рис. I.5

Векторное произведение единичного вектора, ориентированного вдоль оси x, и единичного вектора, ориентированного вдоль оси y, должно дать единичный вектор, ориентированный вдоль оси z. Другими словами, правоходовой винт, перемещаемый по кратчайшему направлению от оси x к оси y, должен ввинчиваться по направлению оси z. В силу этого ось z на рис. I.5 должна быть направлена вверх, а не вниз.

В случае цилиндрических координат, записанных в последовательности r, φ, z, аналогично должно соблюдаться соотношение

$$[\mathbf{1}_r \mathbf{1}_\varphi] = \mathbf{1}_z.$$

В случае сферических координат, записанных в последовательности r, φ, θ, справедливо соотношение

$$[\mathbf{1}_r \mathbf{1}_\varphi] = \mathbf{1}_\theta.$$

Вследствие этого угол φ необходимо отсчитывать не от оси x, а от оси y. Если бы координаты были записаны в последовательности r, θ, φ, то потребовалось бы выполнение соотношения

$$[\mathbf{1}_r \mathbf{1}_\theta] = \mathbf{1}_\varphi,$$

и угол φ следовало бы откладывать от оси x. Если в декартовой системе координат будут даны приращения координатам dx, dy, dz, то точка A, заданная в этих координатах, соответственно пройдет путь

$$dl_x = 1dx, \quad dl_y = 1dy, \quad dl_z = 1dz. \tag{I.4}$$

Путь, проходимый точкой, окажется равным приращению соответствующей координаты. Если в цилиндрической системе координат будут даны приращения координатам dr, $d\varphi$, dz, то точка A, заданная в этих координатах, переместится на расстояние

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r\,d\varphi, \quad dl_z = 1dz. \tag{I.5}$$

При этом путь $dl\varphi$ не равен приращению криволинейной координаты φ. Существует коэффициент r, связывающий эти приращения. Если в сферической системе координат будут даны приращения координатам dr, $d\varphi$, $d\theta$, то точка A, заданная в этих координатах, переместится на расстояние

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r \sin\theta \, d\varphi, \quad dl_\theta = r \, d\theta. \tag{I.6}$$

Опять-таки в случае приращения криволинейных координат φ и θ путь, проходимый точкой A, не равен приращениям этих координат. Таким образом, в общем случае криволинейных ортогональных обобщенных координат целесообразно ввести коэффициенты между их приращениями и отрезками пути, проходимыми точкой, заданной в этих координатах при указанных приращениях. При этом возникают следующие формулы:

$$dl_\xi = h_\xi \, d\xi, \quad dl_\eta = h_\eta \, d\eta, \quad dl_\zeta = h_\zeta \, d\zeta. \tag{I.7}$$

Коэффициенты h_ξ, h_η, h_ζ называют *коэффициентами Лямэ*.

В декартовой системе координат при координатном соответствии

$$\begin{gathered} \xi \longrightarrow x, \quad \eta \longrightarrow y, \quad \zeta \longrightarrow z, \\ h_\xi = h_x = 1, \quad h_\eta = h_y = 1, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{gathered} \tag{I.8}$$

В цилиндрической системе координат при координатном соответствии

$$\begin{gathered} \xi \longrightarrow r, \quad \eta \longrightarrow \varphi, \quad \zeta \longrightarrow z, \\ h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r, \quad h_\zeta = h_z = 1. \end{gathered} \tag{I.9}$$

В сферической системе координат при координатном соответствии

$$\begin{gathered} \xi \longrightarrow r, \quad \eta \longrightarrow \varphi, \quad \zeta \longrightarrow \theta, \\ h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r \sin\theta, \quad h_\zeta = h_\theta = r. \end{gathered} \tag{I.10}$$

Как следует из приведенных примеров, коэффициенты Лямэ могут быть равны единице или являться функциями координат. Используя выражения (I.7), получим формулы для бесконечно малых площадей и объема в криволинейной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} dS_\xi &= dl_\eta \, dl_\zeta = h_\eta h_\zeta \, d\eta \, d\zeta, \\ dS_\eta &= dl_\xi \, dl_\zeta = h_\xi h_\zeta \, d\xi \, d\zeta, \\ dS_\zeta &= dl_\xi \, dl_\eta = h_\xi h_\eta \, d\xi \, d\eta, \\ dV &= dl_\xi \, dl_\eta \, dl_\zeta = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{I.11}$$

Зная коэффициенты Лямэ, нетрудно найти аналогичные выражения в любой конкретной системе координат. Так, например, элемент объема в сферической системе координат записывается в виде

$$dV = 1 r \sin\theta r \, dr \, d\varphi \, d\theta = r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta.$$

§ I.4. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат

В случае бесконечно малого объема dV вместо выражения для дивергенции (I.1) можно записать

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{dV}. \qquad (I.12)$$

Суммирование, заменившее интеграл, осуществляется по всем сторонам криволинейного параллелепипеда. Представим вектор суммой составляющих вектора по координатным направлениям:

$$\mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi a_\xi + \mathbf{1}_\eta a_\eta + \mathbf{1}_\zeta a_\zeta. \qquad (I.13)$$

Доля потока вектора **a**, протекающего через элемент поверхности dS_ξ (см. рис. I.4), составляет $-dS_\xi a_\xi$. Поток образован составляющей вектора a_ξ. Нормаль к поверхности dS_ξ направлена изнутри объема dV наружу, т. е. в сторону $-\xi$, в силу чего скалярное произведение

$$-dS_\xi \mathbf{1}_\xi \mathbf{1}_\xi a_\xi = -dS_\xi a_\xi.$$

Другие составляющие вектора **a** ориентированы под прямым углом к нормали $-\mathbf{1}_\xi$ и их скалярные произведения на элемент площади будут равны нулю.

Далее рассмотрим долю потока вектора **a**, пронизывающего переднюю грань объема dV. В силу криволинейности координат при переходе от задней грани к передней может измениться на бесконечно малую величину поверхность передней грани по сравнению с задней гранью. Кроме того, возможно бесконечно малое изменение составляющей вектора a_ξ, создающей поток вектора **a** через переднюю грань. Поэтому долю потока через переднюю грань можно представить в виде суммы старого значения потока, протекавшего через заднюю грань, и бесконечно малого приращения. Поскольку нормаль к передней грани ориентирована в сторону $\mathbf{1}_\xi$, поток, проходящий через эту грань, положителен. В результате этот поток можно записать в форме

$$dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi.$$

Второе слагаемое представляет собой бесконечно малую добавку к старому значению потока. Как каждый дифференциал его можно получить умножением производной на дифференциал аргумента.

Суммарный поток через заднюю и переднюю грани записывают в виде

$$-dS_\xi a_\xi + dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi.$$

Рассуждая аналогично, найдем суммарный поток вектора **a**, входящий в числитель выражения (I.12):

$$\sum \mathbf{a}\, dS = -dS_\xi a_\xi + dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi -$$

$$-dS_\eta a_\eta + dS_\eta a_\eta + \frac{\partial}{\partial \eta}(dS_\eta a_\eta)\, d\eta - dS_\zeta a_\zeta + dS_\zeta a_\zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(dS_\zeta a_\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(dS_\eta a_\eta)\, d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(dS_\zeta a_\zeta)\, d\zeta.$$

Подставим в это выражение значения элементарных площадей из формул (I.11):

$$\sum \mathbf{a}\, dS = \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta\, d\eta\, d\zeta a_\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \times$$

$$\times (h_\xi h_\zeta\, d\xi\, d\zeta a_\eta)\, d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta\, d\xi\, d\eta a_\zeta)\, d\zeta.$$

Бесконечно малые приращения координат $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ являются независимыми величинами, которые можно вынести за знак производной. В результате получается формула

$$\sum \mathbf{a}\, dS = d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta a_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta a_\zeta) \right\}.$$

Подставляя ее в соотношение (I.12) и используя выражение для элементарного объема (I.11), получаем окончательную формулу для дивергенции вектора **a** в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta a_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta a_\zeta) \right\}. \qquad (I.14)$$

Далее рассмотрим ротор вектора **a** в криволинейной системе координат. В качестве исходного используем выражение (I.2).

Рассмотрим три бесконечно малые поверхности dS_ξ, dS_η, dS_ζ, (рис. I.6). Положим, что нормалями к этим поверхностям являются единичные векторы $\mathbf{1}_\xi$, $\mathbf{1}_\eta$, $\mathbf{1}_\zeta$.

При выборе направления обхода поверхности будем руководствоваться правилом правоходового винта, ввинчиваемого по направлению нормали к поверхности. Движение винта показывает направление обхода. В случае бесконечно малых поверхностей и соответственно бесконечно малых контуров обхода выражение (I.2) записывают в виде

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{dS} \mathbf{1}_n. \qquad (I.15)$$

Определим сумму в числителе выражения (I.15) в случае обхода поверхности dS_ξ. Представим вектор **a** в форме

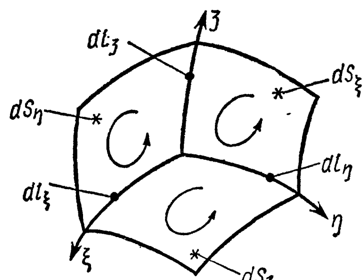

Рис. I.6

выражения (1.13). Начиная обход поверхности из начала координат в сторону оси η, запишем долю суммы на пути ob:

$$\mathbf{1}_\eta a_\eta \, dl_\eta \mathbf{1}_\eta = a_\eta \, dl_\eta .$$

Далее запишем долю суммы на пути cd. Движение осуществляется в сторону отрицательных значений оси η. При переходе от участка ob к участку cd в силу криволинейности координат может измениться длина пути dl_η на бесконечно малую величину. Кроме того, возможно бесконечно малое изменение составляющей вектора a_η. В силу этого долю суммы на пути cd можно представить в виде старого значения $a_\eta dl_\eta$ и бесконечно малой добавки, которая по правилу вычисления дифференциала является произведением производной на дифференциал аргумента. В результате доля суммы на пути cd

$$-\left\{a_\eta \, dl_\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta \, dl_\eta) \, d\zeta\right\}.$$

В целом сумма $\sum \mathbf{a} \, d\mathbf{l}$ на путях ob и cd записывается в виде соотношения

$$a_\eta \, dl_\eta - a_\eta \, dl_\eta - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta \, dl_\eta) \, d\zeta = -\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta \, dl_\eta) \, d\zeta.$$

Аналогично доля суммы на путях do и bc

$$-a_\zeta \, dl_\zeta + a_\zeta \, dl_\zeta + \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta \, dl_\zeta) \, d\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta \, dl_\zeta) \, d\eta.$$

В целом сумма $\sum \mathbf{a} \, d\mathbf{l}$ на замкнутом пути обхода $obcdo$ выражается формулой

$$\sum \mathbf{a} \, d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta \, dl_\zeta) \, d\eta - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta \, dl_\eta) \, d\zeta.$$

Подставляя значения dl_ζ и dl_η из формул (I.7) и вынося за знак производной независимые приращения $d\zeta$ и $d\eta$, получаем

$$\sum \mathbf{a} \, d\mathbf{l} = \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\} d_\eta d_\zeta .$$

Это выражение подставляют в числитель формулы (I.15). В знаменатель следует подставить значение площади dS_ξ, охватываемой контуром обхода. В качестве единичной нормали $\mathbf{1}_n$ используют вектор $\mathbf{1}_\xi$. В результате получают выражение для составляющей ротора вектора $\mathbf{a}$, ориентированной вдоль координаты ξ:

$$\operatorname{rot}_\xi \mathbf{a} = \frac{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\} d\eta \, d\zeta}{h_\eta h_\zeta \, d\eta \, d\zeta} \mathbf{1}_\xi ,$$

или окончательно после сокращений

$$\operatorname{rot}_\xi \mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\}. \qquad \text{(I.16)}$$

Аналогично находят составляющие ротора вектора **a**, ориентированные вдоль координат η и ζ:

$$\mathrm{rot}_\eta \mathbf{a} = \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta h_\zeta)\right\}, \qquad (I.17)$$

$$\mathrm{rot}_\zeta \mathbf{a} = \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\xi h_\xi)\right\}. \qquad (I.18)$$

Полное выражение для ротора вектора **a** имеет вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\eta h_\eta)\right\}+$$

$$+\mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta h_\zeta)\right\}+\mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\xi h_\xi)\right\}, \qquad (I.19)$$

а выражение для градиента скалярной функции в криволинейной системе координат

$$\mathrm{grad}\, U = \frac{dU}{dn}\mathbf{1}_n.$$

Взятие производной по нормали к поверхности равного уровня функции U, по сути дела, означает следующую процедуру. Точку наблюдения перемещают на бесконечно малый отрезок dn вдоль направления нормали, фиксируют приращение функции ∂U, берут отношение приращений ∂U к ∂n и приписывают ему направление нормали путем умножения на единичный нормальный вектор $\mathbf{1}_n$. Эта операция может быть разложена в криволинейных координатах. При перемещении точки наблюдения на расстояние ∂n проекции точки на оси ξ, η, ζ соответственно перемещаются на бесконечно малые отрезки dl_ξ, dl_η, dl_ζ. Вектор $(\partial U/\partial n)\mathbf{1}_n$ при этом записывают в виде суммы составляющих по координатным направлениям:

$$\mathrm{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial n}\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_\xi \frac{\partial U}{\partial l_\xi}+\mathbf{1}_\eta \frac{\partial U}{\partial l_\eta}+\mathbf{1}_\zeta \frac{\partial U}{\partial l_\zeta}. \qquad (I.20)$$

Приращения ∂l_ξ, ∂l_η, ∂l_ζ можно получить из формул (I.7):

$$\partial l_\xi = h_\xi \partial\xi, \quad \partial l_\eta = h_\eta \partial\eta, \quad \partial l_\zeta = h_\zeta \partial\zeta.$$

Подставляя эти выражения в формулу (I.20), получаем окончательное соотношение для градиента скалярной функции U в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\mathrm{grad}\, U = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi}+\mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\eta}+\mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\zeta}. \qquad (I.21)$$

§ I.5. Выражения для дивергенции, ротора и градиента в конкретных системах координат

Приведем выражения для дивергенции, ротора и градиента в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат с учетом формул (I.14), (I.19), (I.20) для соответствия координат и коэффициентов Лямэ, приведенных в формулах (I.8), (I.9), (I.10):

1. Декартова система координат

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{I.22}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \tag{I.23}$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_x\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{1}_y\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{1}_z\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{I.24}$$

2. Цилиндрическая система координат

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(ra_z)\right\}, \tag{I.25}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{1}_r\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(a_\varphi r)\right\} + \mathbf{1}_\varphi\left\{\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right\} + \mathbf{1}_z\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right\}, \tag{I.26}$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r\frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_z\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{I.27}$$

3. Сферическая система координат

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(ra_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta a_\theta)\right\}, \tag{I.28}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{1}_r\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi}(ra_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta a_\varphi)\right\} + \mathbf{1}_\varphi\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)\right\} + \mathbf{1}_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right\}, \tag{I.29}$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r\frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_\theta\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \theta}. \tag{I.30}$$

§ I.6. Некоторые векторные тождества

Используя выведенные выражения для дивергенции, ротора и градиента, можно доказать следующие векторные тождества, справедливые для всех криволинейных ортогональных обобщенных координатных систем:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U \equiv 0, \tag{I.31}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0, \tag{I.32}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U \equiv \nabla^2 U, \tag{I.33}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа;

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}. \tag{I.34}$$

Из выражения (I.34) можно определить результат воздействия оператора Лапласа на вектор $\mathbf{a}$:

$$\nabla^2\mathbf{a} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}, \tag{I.35}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] \equiv \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}, \tag{I.36}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\operatorname{grad} U) \equiv \operatorname{grad}\Psi\operatorname{grad} U + \Psi\nabla^2 U. \tag{I.37}$$

Здесь Ψ и U — скалярные функции:

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) \equiv [\operatorname{grad} \Psi \mathbf{a}] + \Psi \operatorname{rot} \mathbf{a}. \tag{I.38}$$

§ I.7. Выражения для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат

Приведем запись выражений для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right\}, \tag{I.39}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{a} = {} & \mathbf{1}_\xi \Big\langle -\frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Big\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \Big\} \Big\rangle - \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \Big\langle \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) \Big\} \Big\rangle - \\
& - \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \Big\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\zeta h_\zeta) \Big\} \Big\rangle \Big\rangle + \\
& + \mathbf{1}_\eta \Big\langle -\frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \Big\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \\
& + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \Big\} \Big\rangle - \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \Big\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\eta h_\eta) \Big\} \Big\rangle - \\
& - \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Big\langle \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) \Big\} \Big\rangle \Big\rangle + \mathbf{1}_\zeta \Big\langle -\frac{1}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \Big\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \times \\
& \times \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \Big\} \Big\rangle - \\
& - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Big\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\zeta h_\zeta) \Big\} \Big\rangle - \\
& - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \Big\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \Big\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\eta h_\eta) \Big\} \Big\rangle \Big\rangle.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ ПОЛЯ h' В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ II.1. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн магнитного типа

В основе расчета лежит выражение (20.6):

$$h' = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{э2}}} \left(\displaystyle\int_\xi |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\xi \, d\xi + \int_\eta |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\eta \, d\eta \right)}{2 \displaystyle\int_{S_в} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] \, dS}.$$

Вводя для упрощения обозначение

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{э2}}} = \alpha_1, \tag{II.1}$$