Здесь Ψ и U — скалярные функции:

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) \equiv [\operatorname{grad} \Psi \mathbf{a}] + \Psi \operatorname{rot} \mathbf{a}. \tag{I.38}$$

§ I.7. Выражения для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат

Приведем запись выражений для $\nabla^2 U$ и $\nabla^2 \mathbf{a}$ в криволинейной ортогональной обобщенной системе координат:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)\right\}, \tag{I.39}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \Big[& \frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\Big\langle\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\xi h_\eta h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\eta h_\xi h_\zeta)+\\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\zeta h_\xi h_\eta)\Big\}\Big\rangle-\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\Big\langle\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi)\Big\}\Big\rangle-\\
&-\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\zeta h_\zeta)\Big\}\Big\rangle\Big]+\\
&+\mathbf{1}_\eta\Big[\frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\Big\langle\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\xi h_\eta h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\eta h_\xi h_\zeta)+\\
&+\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\zeta h_\xi h_\eta)\Big\}\Big\rangle-\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\Big\}\Big\rangle-\\
&-\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\Big\langle\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi)\Big\}\Big\rangle\Big]+\mathbf{1}_\zeta\Big[\frac{1}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big\langle\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\times\\
&\times\Big\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\xi h_\eta h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\eta h_\xi h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\zeta h_\xi h_\eta)\Big\}\Big\rangle-\\
&-\frac{1}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\Big\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\zeta h_\zeta)\Big\}\Big\rangle-\\
&-\frac{1}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\Big\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\Big\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\Big\}\Big\rangle\Big].
\end{aligned} \tag{1.40}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ ПОЛЯ h' В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

§ II.1. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн магнитного типа

В основе расчета лежит выражение (20.6):

$$h' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{э2}}}\left(\int\limits_{\xi}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi+\int\limits_{\eta}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta\right)}{2\int\limits_{S_в}\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*]\, dS}.$$

Вводя для упрощения обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{э2}}} = \alpha_1, \tag{II.1}$$

получают

$$h' = \alpha_1 \frac{\int\limits_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\xi \, d\xi + \int\limits_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\eta d_\eta}{\int\limits_{S_\text{в}} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] \, d\mathbf{S}}. \qquad (II.2)$$

Волны магнитного типа обладают составляющими поля, определяемыми формулами (13.52)—(13.57).

Прежде всего найдем интегралы в числителе выражения (II.2). Квадрат напряженности магнитного поля у нижней стенки при $y=0$ и у верхней стенки при $y=b$ будет одинаков. В силу этого можно сразу определить суммарный интеграл у нижней и верхней стенок волновода:

$$2\int\limits_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx = 2\int\limits_0^a \{|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2\} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^a \left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + C_2^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right\} dx =$$

$$= 2\,\frac{a}{2}\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + 1\right\} C_2^2 = a\left\{\frac{h}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} C_2^2. \qquad (II.3)$$

Аналогично определяют суммарный интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$2\int\limits_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy = 2\int\limits_0^b \{|\dot{H}_y|^2 + |\dot{H}_z|^2\} dy =$$

$$= 2\int\limits_0^b \left\{\frac{h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + C_2^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dy =$$

$$= b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\} C_2^2. \qquad (II.4)$$

Интеграл в знаменателе выражения (II.2) представляет собой удвоенную проекцию вектора Пойнтинга на ось z волновода. Эта проекция образуется составляющими поля $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$. Следовательно,

$$\int\limits_{S_\text{в}} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] \, d\mathbf{S} = \int\limits_0^a \int\limits_0^b (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*) \, dy \, dx =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^b \left\{\frac{\omega\mu_\text{а} h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega\mu_\text{а} h}{g_{mn}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dy \, dx =$$

$$= \frac{\omega\mu_\text{а} h}{g_{mn}^4} C_2^2 \frac{ab}{4}\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}. \qquad (II.5)$$

Учитывая, что в соответствии с формулой (13.22)

$$g_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

выражение (II.5) можно переписать в иной форме:

$$\int\limits_{S_в} \mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\right]dS=\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2}C_2^2\frac{ab}{4}. \qquad \text{(II.6)}$$

Используя формулы (II.2), (II.3), (II.4) и (II.6), запишем следующее соотношение для h':

$$h'=\alpha_1\frac{a\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+1\right\}C_2^2+b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+1\right\}C_2^2}{\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2}C_2^2\frac{ab}{4}}=$$

$$=\alpha_1\frac{a\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+1\right\}+b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+1\right\}}{\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2}\frac{ab}{4}}.$$

Умножим числитель и знаменатель полученного выражения на g_{mn}^2 и раскроем значение h с помощью формулы (13.35)

$$h=\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{mn}^2}.$$

Тогда

$$h'=\alpha_1\frac{a\left\{\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{mn}^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+g_{mn}^2\right\}+b\left\{\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{mn}^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+g_{mn}^2\right\}}{\omega\mu_a\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{mn}^2}\,\frac{ab}{4}}=$$

$$=\alpha_1\,\omega^2\mu_a\varepsilon_a\left(\frac{\left\{\frac{1-\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right\}}{\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}\,\frac{b}{4}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{b}{a}\left\{\frac{1-\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right\}}{\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}\,\frac{b}{4}}\right).$$

Далее используем соотношение (13.59)

$$\frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}=\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2$$

и произведем необходимые сокращения:

$$h' = \alpha_1 \left\langle \frac{\left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}{g_{mn}^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 \right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \frac{b}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{b}{a}\left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)}{g_{mn}^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 \right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \frac{b}{4}} \right\rangle.$$

Группируя члены, получаем

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2\right\} \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{g_{mn}^2}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \frac{b}{4}}.$$

Рассмотрим отдельно дробь

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{g_{mn}^2} = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Сокращая на π и умножая на b^2, получаем

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2 + n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2} + n^2}.$$

Подставим полученное равенство в выражение для h':

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2\right\} \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2}+n^2}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \frac{b}{4}}. \quad \text{(II.7)}$$

Для упрощения записи используем обозначения:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 = \alpha_2, \quad 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 = 1-\alpha_2 = \alpha_3, \quad \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_c, \quad \text{(II.8)}$$

где Z_c — характеристическое сопротивление среды.

При этом коэффициент затухания поля волн магнитного типа записывается в виде

$$h'=h'_{\mathrm{H}_{mn}}=4\alpha_1\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\alpha_2+\alpha_3\dfrac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2}+n^2}}{Z_c\sqrt{\alpha_3}\,b}. \tag{II.9}$$

Определим коэффициенты затухания h' поля в случае волн магнитного типа с нулевыми индексами. Пусть $m=0$ и исследуется затухание поля волны типа H_{0n}, обладающего составляющими

$$\left.\begin{aligned}\dot H_y&=j\frac{h}{g_{0n}^2}C_2\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\ \dot H_z&=C_2\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\ E_x&=j\frac{\omega\mu_a}{g_{0n}^2}C_2\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}.\end{aligned}\right\} \tag{II.10}$$

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2):

$$2\int_0^a|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2dx=2\int_0^a|\dot H_z|^2dx=2\int_0^a C_2^2dx=2aC_2^2. \tag{II.11}$$

Определим суммарный интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$2\int_0^b|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2dy=2\int_0^b\{|\dot H_y|^2+|\dot H_z|^2\}dy=$$

$$=2\int_0^b\left\{\frac{h^2}{g_{0n}^4}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)+C_2^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\}dy=$$

$$=2\frac{b}{2}\left\{\frac{h^2}{g_{0n}^4}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+C_2^2\right\}=b\left\{\frac{h^2}{g_{0n}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+1\right\}C_2^2, \tag{II.12}$$

а также интеграл в знаменателе выражения (II.2):

$$\int_{S_\text{в}}\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*]d\mathbf{S}=\int_0^a\int_0^b\dot E_x\dot H_y^*\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^a\int_0^b\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{II.13}$$

Подставляя выражения (II.11), (II.12), (II.13) в формулу (II.2), получаем

$$h'=\alpha_1\frac{2aC_2^2+b\left\{\frac{h^2}{g_{0n}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+1\right\}C_2^2}{\frac{ab}{2}\,\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^4}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{II.14}$$

Из выражения (13.22) следует, что

$$g_{0n}^2=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{II.15}$$

Подставляя g_{0n}^2 в формулу (II.14) и проводя необходимые сокращения, находим

$$h'=\alpha_1\frac{2a+b\left(\frac{h^2}{g_{0n}^2}+1\right)}{\frac{ab}{2}\,\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^2}}=2\alpha_1\frac{2\frac{a}{b}\,g_{0n}^2+h^2+g_{0n}^2}{a\omega\mu_a h},$$

или с учетом соотношения (13.35)

$$h'=2\alpha_1\frac{2\frac{a}{b}\,g_{0n}^2+\omega^2\mu_a\varepsilon_a}{a\omega\mu_a\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{0n}^2}}=$$

$$=2\alpha_1\omega^2\mu_a\varepsilon_a\frac{2\frac{a}{b}\,\frac{g_{0n}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}+1}{a\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{g_{0n}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}}.$$

С помощью соотношения (13.59) эту формулу можно записать таким образом:

$$h'=2\alpha_1\frac{1+2\frac{a}{b}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}{a\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Вводя обозначения (II.8), получают

$$h'=h'_{H_{0n}}=2\alpha_1\frac{1+2\frac{a}{b}\alpha_2}{aZ_c\sqrt{\alpha_3}}. \tag{II.16}$$

Пусть $n=0$. Исследуем затухание поля волн типа H_{m0} с составляющими, которые на основании формул (13.52)—(13.57) записываются в виде соотношений

$$\left.\begin{aligned}\dot H_x&=j\frac{h}{g_{m0}^2}C_2\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-jhz},\\ H_z&=C_2\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-jhz},\\ \dot E_y&=-j\frac{\omega\mu_a}{g_{m0}^2}C_2\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-jhz}.\end{aligned}\right\} \tag{II.17}$$

Определим интегралы:

$$2\int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx = 2\int_0^a \{|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2\}\, dx =$$

$$= 2\int_0^a \left\{\frac{h^2}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + C_2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right\} dx =$$

$$= a\left\{\frac{h^2}{g_{m0}^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} C_2^2, \qquad \text{(II.18)}$$

$$2\int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy = 2\int_0^b |\dot{H}_z|^2 dy = 2\int_0^b C_2^2\, dy = 2bC_2^2,$$

$$\int_{S_b} \mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, d\mathbf{S} = -\int_0^a\int_0^b \dot{E}_y \dot{H}_x^*\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dy\, dx = \frac{ab}{2}\,\frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^4}\, C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2. \qquad \text{(II.19)}$$

Подставим полученные выражения в формулу (II.2):

$$h' = h'_{H_{m0}} = \alpha_1 \frac{2bC_2^2 + a\left\{\dfrac{h^2}{g_{m0}^4}\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} C_2^2}{\dfrac{ab}{2}\,\dfrac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^4} C_2^2 \left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Далее, осуществляя преобразования, аналогичные сделанным ранее с помощью соотношений (13.22), (13.35), (13.59), находим

$$h'_{H_{m0}} = 2\alpha_1 \frac{2\dfrac{b}{a} + \left(\dfrac{h^2}{g_{m0}^2} + 1\right)}{b\dfrac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^2}} = 2\alpha_1 \frac{2\dfrac{b}{a} g_{m0}^2 + (h^2 + g_{m0}^2)}{b\omega\mu_a \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{m0}^2}} =$$

$$= 2\alpha_1 \frac{2\dfrac{b}{a} g_{m0}^2 + \omega^2\mu_a\varepsilon_a}{b\omega^2\mu_a \sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \dfrac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}} = 2\alpha_1 \frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a\left(1 + 2\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right)}{b\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \dfrac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}} =$$

$$= 2\alpha_1 \frac{1 + 2\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}{b\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}},$$

или с учетом обозначения (II.8)

$$h'_{H_{m0}} = 2\alpha_1 \frac{1 + 2\dfrac{b}{a}\alpha_2}{bZ_c\sqrt{\alpha_3}}. \qquad \text{(II.20)}$$

§ II.2. Расчет коэффициентов затухания поля h' в прямоугольных волноводах в случае волн электрического типа

Волны электрического типа обладают составляющими поля, определяемыми формулами (13.29)—(13.34).

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2). Интеграл у верхней и нижней стенок волновода:

$$2\int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dx = 2\int_0^a |\dot{H}_x|^2 dx = 2\int_0^a \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx =$$
$$= \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a. \qquad \text{(II.21)}$$

Интеграл у правой и левой стенок волновода:

$$2\int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 dy = 2\int_0^b |\dot{H}_y|^2 dy = 2\int_0^b \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy =$$
$$= \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b. \qquad \text{(II.22)}$$

Интеграл в знаменателе выражения (II.2) вычисляют таким образом:

$$\int_{S_в} \mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, d\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^b (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*)\, dy\, dx =$$
$$= \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right\} dy\, dx =$$
$$= \frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{ab}{4} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\} = \frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^2} C_1^2 \frac{ab}{4}. \qquad \text{(II.23)}$$

Используя формулы (II.2), (II.21), (II.22), (II.23), можно написать следующее выражение для h':

$$h' = \alpha_1 \frac{\frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{\frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^2} C_1^2 \frac{ab}{4}} =$$
$$= 4\alpha_1 \frac{\frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2}\left(\frac{nm}{b}\right)^2 a + \frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{hab},$$

Раскроем значения g_{mn}^2 и h с помощью формул (13.22) и (13.35):

$$h' = 4\alpha_1 \frac{\omega\varepsilon_a\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b\right\}}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2 ab}} =$$

$$= 4\alpha_1 \frac{\omega\varepsilon_a\left\{\left(\frac{n}{b}\right)^2 a + \left(\frac{m}{a}\right)^2 b\right\}}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} ab}} =$$

$$= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} ab}} \cdot \frac{\frac{a}{b^2}\left\{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2\right\}}{\frac{1}{b^2}\left\{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2\right\}} =$$

$$= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} b}} \cdot \frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}.$$

Далее, используя формулу (13.59) и обозначения (II.8), найдем

$$h' = h'_{E_{mn}} = \frac{4\alpha_1}{Z_c\sqrt{\alpha_3 b}} \cdot \frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}. \qquad (II.24)$$

§ II.3. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн магнитного типа

Волны магнитного типа в круглом волноводе обладают составляющими поля, определяемыми формулами (14.51)—(14.56).

Найдем интегралы в числителе выражения (II.2):

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}| r\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \{|\dot{H}_{0\varphi}|^2 + |\dot{H}_{0z}|^2\}\, r\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{h^2 r_0^2}{\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn})\sin^2(m\varphi) + \right.$$

$$\left. + C_2^2 J_m^2(\mu_{mn})\cos^2(m\varphi)\right\} r_0\,d\varphi =$$

$$= C_2^2 J_m^2(\mu_{mn})\,\pi\left(\frac{h^2 r_0^3}{\mu_{mn}^4} m^2 + r_0\right). \qquad (II.25)$$

Интеграл по площади поперечного сечения волновода

$$\int\limits_{S_в} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*]\,d\mathbf{S} = \int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} (\dot{E}_r\dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi\dot{H}_r^*)\, r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} \left\{\frac{\omega\mu_a h r_0^4}{r^2\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\sin^2(m\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\cos^2(m\varphi)\right\} r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{r_0}\left\{\frac{\omega\mu_a h r_0^4}{r^2\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\pi + \frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\pi\right\} r\,dr =$$

$$= \frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2\pi \int\limits_0^{r_0}\left\{\frac{r_0^2}{\mu_{mn}^2 r^2} m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right) + \right.$$

$$\left. + J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\right\} r\,dr = \frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2\pi u, \qquad \text{(II.26)}$$

где

$$u = \int\limits_0^{r}\left\{\frac{r_0^2 m^2}{\mu_{mn}^2 r^2} J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right) + J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\right\} r\,dr. \qquad \text{(II.27)}$$

Осуществим замену переменных, положив

$$r = r_0 x. \qquad \text{(II.28)}$$

Тогда

$$u = r_0^2\int\limits_0^1\left\{\frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2} J_m^2(\mu_{mn}x) + J_m'^2(\mu_{mn}x)\right\} x\,dx. \qquad \text{(II.29)}$$

Используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя:

$$J_m(z) = \frac{z}{2m}\{J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z)\}, \qquad \text{(II.30)}$$

получим

$$u = \frac{r_0^2}{4}\int\limits_0^1\left\langle\frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2}\,\frac{\mu_{mn}^2 x^2}{m^2}\{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) + \right.$$

$$+ 2J_{m-1}(\mu_{mn}x)J_{m+1}(\mu_{mn}x)\} + \{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) -$$

$$\left. - 2J_{m-1}(\mu_{mn}x)J_{m+1}(\mu_{mn}x)\}\right\rangle x\,dx,$$

или

$$u = \frac{r_0^2}{2}\int\limits_0^1\{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x)\}\,x\,dx. \qquad \text{(II.31)}$$

Для цилиндрических функций справедливо соотношение

$$\int Z_p^2(ax)\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\{Z_p^2(ax)-Z_{p-1}(ax)\,Z_{p+1}(ax)\}, \qquad \text{(II.32)}$$

где Z_p — любая цилиндрическая функция.

Следовательно,

$$u=\frac{r_0^2}{2}\frac{x^2}{2}\{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x)-J_{m-2}(\mu_{mn}x)\,J_m(\mu_{mn}x)+J_{m+1}^2(\mu_{mn}x)-$$

$$-J_m(\mu_{mn}x)\,J_{m+2}(\mu_{mn}x)\}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{r_0^2}{4}\langle J_{m-1}^2(\mu_{mn})-J_m(\mu_{mn})\times$$

$$\times\{J_{m-2}(\mu_{mn})+J_{m+2}(\mu_{mn})\}+J_{m+1}^2(\mu_{mn})\rangle. \qquad \text{(II.33)}$$

С помощью рекуррентного соотношения (II.30) найдем

$$J_{m-2}(\mu_{mn})=\frac{2(m-1)}{\mu_{mn}}J_{m-1}(\mu_{mn})-J_m(\mu_{mn}),$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn})=\frac{2(m+1)}{\mu_{mn}}J_{m+1}(\mu_{mn})-J_m(\mu_{mn}).$$

Таким образом,

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})=\frac{2(m-1)}{\mu_{mn}}J_{m-1}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn}), \qquad \text{(II.34)}$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})=\frac{2(m+1)}{\mu_{mn}}J_{m+1}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn}). \qquad \text{(II.35)}$$

Далее используем следующие рекуррентные соотношения:

$$J_{m-1}(z)=J'_m(z)+\frac{m}{z}J_m(z), \qquad \text{(II.36)}$$

$$J_{m+1}(z)=\frac{m}{z}J_m(z)-J'_m(z), \qquad \text{(II.37)}$$

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})=\frac{2(m-1)}{\mu_{mn}}J'_m(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})+$$

$$+\frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn}).$$

Поскольку μ_{mn} является корнем производной функций Бесселя, можно написать

$$J'_m(\mu_{mn})=0, \qquad \text{(II.38)}$$

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})=\frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn}). \qquad \text{(II.39)}$$

Аналогично,

$$J_{m+2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})=\frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})-$$

$$-\frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2}J'_m(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn})=$$

$$=\frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})-J_m^2(\mu_{mn}). \qquad \text{(II.40)}$$

Подставляя выражения (II.39), (II.40) в формулу (II.33), получаем

$$u=\frac{r_0^2}{4}\left\langle J_{m-1}^2(\mu_{mn})+J_m^2(\mu_{mn})\left\{1-\frac{2(m-1)m}{\mu_{mn}^2}+1-\frac{2(m+1)m}{\mu_{mn}^2}\right\}+\right.$$

$$\left.+J_{m+1}^2(\mu_{mn})\right\rangle=\frac{r_0^2}{4}\left\{J_{m-1}^2(\mu_{mn})+J_{m+1}^2(\mu_{mn})+2J_m^2(\mu_{mn})-\right.$$

$$\left.-\frac{4m^2}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})\right\}. \qquad (II.41)$$

С помощью соотношений (II.36), (II.37), (II.38) можно вывести следующие выражения:

$$J_{m-1}^2(\mu_{mn})=\left\{J'_m(\mu_{mn})+\frac{m}{\mu_{mn}}J_m(\mu_{mn})\right\}^2=\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn}),$$

$$J_{m+1}^2(\mu_{mn})=\left\{\frac{m}{\mu_{mn}}J_m(\mu_{mn})-J'_m(\mu_{mn})\right\}^2=\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn}).$$

Подставим эти выражения в формулу (II.41):

$$u=\frac{r_0^2}{4}\left\{\frac{2m^2}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})+2J_m^2(\mu_{mn})-\frac{4m^2}{\mu_{mn}^2}J_m^2(\mu_{mn})\right\}=$$

$$=\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)J_m^2(\mu_{mn}). \qquad (II.42)$$

Подставим выражение (II.42) в формулу (II.26):

$$\int\limits_{S_{\text{в}}}\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\right]dS=\frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2}C_2^2\pi\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)J_m^2(\mu_{mn}). \qquad (II.43)$$

Подставим выражения (II.25), (II.43) в формулу (II.2):

$$h'_{\text{H}mn}=\alpha_1\frac{\dfrac{h^2r_0^3}{\mu_{mn}^4}m^2+r_0}{\dfrac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2}\cdot\dfrac{r_0^2}{2}\left(1-\dfrac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)}. \qquad (II.44)$$

Далее используем выражения (14.57), (14.59):

$$h=\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2},$$

$$\lambda=\frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}},$$

с помощью которых получается соотношение

$$h=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2 4\pi^2 f^2\mu_a\varepsilon_a}}=$$

$$=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{c^2}{\lambda_{\text{кр}}^2 f^2}}=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \qquad (II.45)$$

Используя формулы (14.59), (II.45), выражение (II.44) можно представить в форме

$$h'_{\text{H}mn}=2\alpha_1 r_0\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a\left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2\right\}m^2r_0^2+\mu_{mn}^4}{\mu_{mn}^4\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2\frac{r_0^4}{\mu_{mn}^2}\left(1-\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)}}=$$

$$=2\alpha_1\frac{m^2\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2-m^2+\mu_{mn}^2}{r_0\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}(\mu_{mn}^2-m^2)}=$$

$$=2\alpha_1\frac{1+\frac{m^2}{\mu_{mn}^2-m^2}\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2}{r_0\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}},$$

или окончательно

$$h'_{\text{H}mn}=2\alpha_1\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2+\frac{m^2}{\mu_{mn}^2-m^2}}{r_0\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \tag{II.46}$$

Для упрощения записи воспользуемся обозначениями (II.8). Тогда

$$h'_{\text{H}mn}=2\alpha_1\frac{\alpha_2+\frac{m^2}{\mu_{mn}^2-m^2}}{r_0Z_c\sqrt{\alpha_3}}. \tag{II.47}$$

Рассмотрим вывод выражения для коэффициента затухания поля в случае волн типа H_{0n}, обладающего составляющими

$$\left.\begin{aligned}\dot H_r&=-j\frac{hr_0}{\mu_{0n}}C_2J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz},\\ \dot H_z&=C_2J_0\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz},\\ \dot E_\varphi&=j\frac{\omega\mu_a r_0}{\mu_{0n}}C_2J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz}.\end{aligned}\right\} \tag{II.48}$$

Запишем выражения для интегралов:

интеграл у металлической поверхности волновода

$$\int_0^{2\pi}\left|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}\right|^2\cdot rd\varphi=\int_0^{2\pi}\left|\dot H_z\right|^2r_0d\varphi=C_2^2J_0^2(\mu_{0n})\,r_0 2\pi; \tag{II.49}$$

интеграл по площади поперечного сечения волновода

$$u=\int_{S_\text{в}}\text{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\right]dS=-\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\dot E_\varphi\dot H_r^*\,rd\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2}{\mu_{0n}^2}J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)rd\varphi dr=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int_0^{r_0}J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)rdr.$$

На основании рекуррентного соотношения (II.37) при $m=0$ справедливы формулы

$$J_1(z)=-J_0'(z) \text{ и } J_0'^2(z)=J_1^2(z).$$

Тогда

$$u=\int\limits_{S_\text{в}} \operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\right] d\mathbf{S}=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int\limits_0^{r_0} J_1^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right) r\,dr.$$

Осуществим замену переменных, положив $r=r_0x$:

$$u=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int\limits_0^1 J_1^2(\mu_{0n}x)\,x\,dx.$$

Полученный интеграл является интегралом вида (II.32), поэтому можно записать

$$u=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2}\frac{x^2}{2}J_1^2(\mu_{0n}x)-J_0(\mu_{0n}x)\,J_2(\mu_0 x)\Big|_{x=1}=$$

$$=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2}\left\{\frac{1}{2}J_1^2(\mu_{0n})-J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})\right\}.$$

Из рекуррентных соотношений (II.36), (II.37) следует формула

$$J_{m-1}(z)\,J_{m+1}(z)=\frac{m^2}{z^2}J_m^2(z)-J_m'^2(z), \tag{II.50}$$

на основании которой можно написать

$$J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})=\frac{1}{\mu_{0n}^2}J_1^2(\mu_{0n})-J_1'^2(\mu_{0n}).$$

Из рекуррентного соотношения (II.36) следует также, что

$$J_1(z)=-J_0'(z),\quad J_1^2(z)=J_0'^2(z), \tag{II.51}$$

откуда

$$\frac{1}{2}J_1^2(\mu_{0n})-J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})=\frac{1}{2}J_0'^2(\mu_{0n})-\frac{1}{\mu_{0n}^2}J_0'^2(\mu_{0n})+J_1'^2(\mu_{0n})=J_1'^2(\mu_{0n}). \tag{II.52}$$

С учетом выведенных соотношений, формул (II.36), (II.50) получаем

$$J_0(z)=J_1'(z)+\frac{1}{z}J_1(z)=J_1'(z)-\frac{1}{z}J_0'(z).$$

При $z=\mu_{0n}$

$$J_0(\mu_{0n})=J_1'(\mu_{0n})-\frac{1}{\mu_{0n}}J_0'(\mu_{0n}),\qquad J_0(\mu_{0n})=J_1'(\mu_{0n}),$$

$$u=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2}J_1'^2(\mu_{0n})=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi}{\mu_{0n}^2}J_0^2(\mu_{0n}). \tag{II.53}$$

Подставим выражения (II.49), (II.53) в формулу (II.2):

$$h'_{H0n}=\alpha_1\frac{\mu_{0n}^2 C_2 J_0^2(\mu_{0n})\, r_0 2\pi}{hC_2^2\omega\mu_a r_0^4 2\pi J_0^2(\mu_{0n})}=\frac{\alpha_1 4\pi^2}{r_0\dfrac{4\pi^2 r_0^2}{\mu_{0n}^2}h\omega\mu_a}=$$

$$=\frac{\alpha_1 4\pi^2\varepsilon_a}{r_0\dfrac{4\pi^2 r_0^2}{\mu_{0n}^2}\omega^2\mu_a\varepsilon_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

С учетом соотношения (14.59) это выражение может быть записано в форме

$$h'_{H0n}=\alpha_1\frac{1}{r_0\left(\dfrac{\lambda_{кр}}{\lambda}\right)^2\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \qquad (II.54)$$

или в обозначениях (II.8)

$$h'_{H0n}=\alpha_1\frac{\alpha_2}{r_0 Z_c\sqrt{\alpha_3}}. \qquad (II.55)$$

§ II.4. Расчет коэффициентов затухания поля h' в круглых волноводах в случае волн электрического типа

Волны электрического типа в круглом волноводе обладают составляющими поля, определяемыми формулами (14.33)—(14.38).

Найдем выражения для интегралов:

интеграл у металлической поверхности волновода, стоящий в числителе выражения (II.2):

$$\int_0^{2\pi}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 r d\varphi=\int_0^{2\pi}|\dot H_\varphi|^2 r_0 d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\omega^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2}C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn})\cos^2(m\varphi)\,d\varphi=\frac{\omega^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2}C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn})\,\pi; \qquad (II.56)$$

интеграл по площади поперечного сечения волновода:

$$\int_{S_в}\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\right]d\mathbf{S}=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}(\dot E_r\dot H_\varphi^*-\dot E_\varphi\dot H_r^*)\,r\,d\varphi dr=$$

$$=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2 hC_1^2}{\eta_{mn}^2}J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\cos^2(m\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega\varepsilon_a r_0^4 hC_1^2 m^2}{\eta_{mn}^4}\cdot\frac{1}{r^2}J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\sin^2(m\varphi)\right\} r\,d\varphi dr=$$

$$=\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2 hC_1^2\pi}{\eta_{mn}^2}\int_0^{r_0}\left\{J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)+\frac{r_0^2 m^2}{\eta_{mn}^2 r^2}J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\right\}r\,dr. \qquad (II.57)$$

Введем обозначение

$$u_1=\int_0^{r_0}\left\{J'^2_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)+\frac{r_0^2m^2}{\eta_{mn}^2r^2}J^2_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\right\}rdr.$$

Осуществим замену переменных, положив $r=r_0x$:

$$u_1=r_0^2\int_0^1\left\{\frac{m^2}{\eta_{mn}^2x^2}J^2_m(\eta_{mn}x)+J'^2_m(\eta_{mn}x)\right\}xdx. \qquad (II.58)$$

Интеграл u_1 по математической форме совпадает с интегралом (II.29). Решение его может быть представлено в форме, сходной с выражением (II.33):

$$u_1=\frac{r_0^2}{4}\langle J^2_{m-1}(\eta_{mn})-J_m(\eta_{mn})\{J_{m-2}(\eta_{mn})+J_{m+2}(\eta_{mn})\}+J^2_{m+1}(\eta_{mn})\rangle. \qquad (II.59)$$

Поскольку η_{mn}—корни функций Бесселя J_m, справедливо соотношение

$$J_m(\eta_{mn})=0 \qquad (II.60)$$

и

$$u_1=\frac{r_0^2}{4}\{J^2_{m-1}(\eta_{mn})+J^2_{m+1}(\eta_{mn})\}. \qquad (II.61)$$

Из рекуррентных соотношений (II.36), (II.37) следуют формулы

$$J^2_{m-1}(\eta_{mn})=\left\{J'_m(\eta_{mn})+\frac{m}{\eta_{mn}}J_m(\eta_{mn})\right\}^2,$$

$$J^2_{m+1}(\eta_{mn})=\left\{\frac{m}{\eta_{mn}}J_m(\eta_{mn})-J'_m(\eta_{mn})\right\}^2,$$

или с учетом равенства (II.60)

$$J^2_{m-1}(\eta_{mn})=J'^2_m(\eta_{mn}),$$

$$J^2_{m+1}(\eta_{mn})=J'^2_m(\eta_{mn}).$$

Подставим полученные соотношения в формулу (II.61):

$$u_1=\frac{r_0^2}{2}J'^2_m(\eta_{mn}). \qquad (II.62)$$

Далее интеграл u_1 подставим в выражение (II.57):

$$\int_{S_\text{в}}\mathrm{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*]\,dS=\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2hC_1^2\pi}{\eta_{mn}^2}\cdot\frac{r_0^2}{2}J'_m(\eta_{mn}). \qquad (II.63)$$

Соотношения (II.56), (II.63), (II.2) дают возможность определить коэффициент затухания $h'_{\text{E}mn}$ в случае волн электрического типа:

$$h'_{\text{E}mn}=\alpha_1\frac{\dfrac{\omega^2\varepsilon_a r_0^3}{\eta_{mn}^2}}{\dfrac{\omega r_0^2h}{\eta_{mn}^2}\cdot\dfrac{r_0^2}{2}}=2\alpha_1\frac{\varepsilon_a}{r_0\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_\text{кр}}\right)^2}},$$

или

$$h'_{\mathrm{E}mn} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \tag{II.64}$$

Используя обозначения (II.8), получаем окончательное выражение для $h'_{\mathrm{E}mn}$:

$$h'_{\mathrm{E}mn} = 2\alpha_1 \frac{1}{r_0 Z_c \sqrt{\alpha_3}}. \tag{II.65}$$

Далее рассмотрим вывод коэффициента затухания для волн типа E_{0n}, когда $m=0$. Выражения для составляющих поля при этом приобретают вид

$$\dot{E}_r = -j \frac{hr_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0' \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}, \tag{II.66}$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_0 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}, \tag{II.67}$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega\varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0' \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}. \tag{II.68}$$

Найдем выражения для интегралов:
интеграл в числителе выражения (II.2)

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 r_0 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} |H_\varphi|^2 r_0 \, d\varphi = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 (\eta_{0n}) \, 2\pi; \tag{II.69}$$

интеграл в знаменателе выражения (II.2)

$$\int_{S_\text{в}} \mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*] \, d\mathbf{S} = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* \, r d\varphi \, dr = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r d\varphi \, dr =$$

$$= \int_0^{r_0} \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 \, 2\pi}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r \, dr =$$

$$= \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 \, 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r \, dr = \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 \, 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} u_2. \tag{II.70}$$

Здесь

$$u_2 = \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r \, dr. \tag{II.71}$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_0'^2 (\eta_{0n} x) \, x \, dx. \tag{II.72}$$

В силу справедливости равенства $J_0'^2(z) = J_1(z)$ можно написать

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_1^2(\eta_{0n}x)\, x\, dx.$$

Полученный интеграл является интегралом вида (II.32), на основании чего

$$u_2 = r_0^2 \left\{ \frac{x^2}{2} J_1^2(\eta_{0n}x) - J_0(\eta_{0n}x)\, J_2(\eta_{0n}x) \right\} \Big|_{x=1},$$

или с учетом равенства (II.60)

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\eta_{0n}).$$

Заменяя $J_1^2(\eta_{0n}) = J_0'^2(\eta_{0n})$, получаем соотношение

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(II.73)}$$

Подставим полученную формулу в выражение (II.70):

$$\int_{S_\text{в}} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, d\mathbf{S} = \frac{\omega \varepsilon_\text{a} h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(II.74)}$$

Подставляя выражения (II.69), (II.74) в формулу (II.2), найдем коэффициент затухания $h'_{\text{E}_{0n}}$:

$$h'_{\text{E}_{0n}} = \alpha_1 \frac{\dfrac{\omega^2 \varepsilon_\text{a}^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, 2\pi}{\dfrac{\omega \varepsilon_\text{a} h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \dfrac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n})},$$

или

$$h'_{\text{E}_{0n}} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\dfrac{\mu_\text{a}}{\varepsilon_\text{a}}} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_\text{кр}}\right)^2}}. \qquad \text{(II.75)}$$

Полученное выражение не отличается от формулы (II.64), справедливой при $m \neq 0$. Окончательное выражение для коэффициента затухания в рассматриваемом случае совпадает с формулой (II.65).