ПРИЛОЖЕНИЕ III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБРОТНОСТЕЙ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ III.1. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн магнитного типа

Добротность объемных резонаторов вычисляют с помощью общего соотношения (25.8)

$$Q=\frac{\sqrt{\omega_{\text{р}}}\,\mu_{\text{а}}\int\limits_{V_1}|\dot{H}|^2\,dV}{\sqrt{\frac{\mu_{\text{а}2}}{2\gamma_{\text{э}2}}}\oint\limits_{S_1}|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2\,dS}.$$

Для упрощения записи введем обозначение

$$\frac{\sqrt{\omega_{\text{р}}}\,\mu_{\text{а}}}{\sqrt{\frac{\mu_{\text{а}2}}{2\gamma_{\text{э}2}}}}=\alpha_4. \tag{III.1}$$

Тогда

$$Q=\alpha_4\frac{\int\limits_{V_1}|\dot{H}|^2\,dV}{\oint\limits_{S_1}|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2\,dS}=\alpha_4\frac{u_1}{u_2}, \tag{III.2}$$

где

$$u_1=\int\limits_{V_1}|\dot{H}|^2\,dV,\quad u_2=\oint\limits_{S_1}|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2\,dS. \tag{III.3}$$

В случае волн магнитного типа составляющие поля в объемном резонаторе определяются выражениями (21.29)—(21.31).

Найдем интеграл u_1:

$$u_1=\int\limits_0^l\int\limits_0^b\int\limits_0^a\left(|\dot{H}_{x\text{p}}|^2+|\dot{H}_{y\text{p}}|^2+|H_{z\text{p}}|^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_0^l\int\limits_0^b\int\limits_0^a\left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4l^2}C_2^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+\right.$$

$$+4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4l^2}C_2^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+$$

$$\left.+4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=4C_2^2\frac{abl}{8}\left\{\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4l^2}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)+1\right\}.$$

С учетом соотношения (13.23)

$$g_{mn}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

интеграл u_1 можно записать в форме

$$u_1 = C_2^2 \frac{abl}{2}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} + 1\right). \qquad \text{(III.4)}$$

Определим интеграл u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l\int_0^a \{|\dot{H}_{x\text{p}}|^2 + |\dot{H}_{z\text{p}}|^2\}\,dx\,dz\,|_{y=0} +$$
$$+ 2\int_0^l\int_0^b \{|\dot{H}_{y\text{p}}|^2 + |\dot{H}_{z\text{p}}|^2\}\,dy\,dz\,|_{x=0} +$$
$$+ 2\int_0^b\int_0^a \{|\dot{H}_{x\text{p}}|^2 + |\dot{H}_{y\text{p}}|^2\}\,dx\,dy\,|_{z=0} =$$
$$= 2\int_0^l\int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$
$$\left. + 4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dz +$$
$$+ 2\int_0^l\int_0^b \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$
$$\left. + 4C_2^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dy\,dz +$$
$$+ 2\int_0^b\int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) +\right.$$
$$\left. + 4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_2^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\}dx\,dy =$$
$$= 8\frac{al}{4}C_2^2\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2} + 1\right) + 8\frac{bl}{4}C_2^2\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2} + 1\right) +$$
$$+ 8\frac{ab}{4}C_2^2\left\{\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\right\}.$$

Используя выражение (13.23), получаем

$$u_2 = 2C_2^2 al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2} + 1\right) +$$
$$+ 2C_2^2 bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2} + 1\right) + 2C_2^2 ab\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}. \qquad \text{(III.5)}$$

Подставим выражения (III.4), (III.5) в формулу (III.2):

$$Q=\frac{\alpha_4\cdot C_2\,\frac{abl}{2}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}+1\right)}{2C_2^2\left\{al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right)+bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+1\right)+ab\,\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}\right\}}=$$

$$=\frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}+1\right)}{al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right)+bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+1\right)+ab\,\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}}=$$

$$=\frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{abl\left(\frac{p^2\pi^2}{l^2}+g_{mn}^2\right)g_{mn}^2}{al\left\{\left(\frac{p\pi^2 m}{la}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+bl\left\{\left(\frac{p\pi^2 n}{lb}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+ab\left(\frac{p\pi g_{mn}}{l}\right)^2}.$$

Используя выражение (13.23) и формулу (21.37)

$$\omega_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

запишем окончательное выражение для добротности прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{mnp}:

$$Q_{H_{mnp}}=\frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{abl\omega_p^2 g_{mn}^2\mu_a\varepsilon_a}{al\left\{\left(\frac{p\pi^2 m}{la}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+bl\left\{\left(\frac{p\pi^2 a}{lb}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+ab\left(\frac{l\pi g_{mn}}{l}\right)^2}. \qquad (III.6)$$

Далее определим добротность прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{m0p}. При $n=0$ из выражений (21.29)—(21.31) найдем составляющие магнитного поля:

$$\dot H_{xp}=j2\frac{p\pi}{g_{m0}^2 l}C_2\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \qquad (III.7)$$

$$\dot H_{zp}=-j\,2C_2\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \qquad (III.8)$$

Определим интеграл u_i:

$$u_i=\int_0^l\int_0^b\int_0^a\left(|\dot H_{xp}|^2+|\dot H_{zp}|^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^l\int_0^b\int_0^a\left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2}C_2^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+\right.$$

$$\left.+4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=4C_2^2\frac{abl}{4}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right)=C_2^2 abl\left(\frac{p^2\pi^4 m^2}{g_{m0}^4 l^2 a^2}+1\right). \qquad (III.9)$$

Найдем интеграл u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l\int_0^a (|\dot H_{xp}|^2 + |\dot H_{zp}|^2)\,dx\,dz\,|_{y=0} +$$

$$+2\int_0^l\int_0^b |\dot H_{zp}|^2\,dy\,dz\,|_{x=0} + 2\int_0^b\int_0^a |\dot H_{xp}|^2\,dx\,dy\,|_{z=0} =$$

$$= 2\int_0^l\int_0^a \left\{4\,\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2}\,C_2^2\,\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$

$$\left. + 4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dz +$$

$$+2\int_0^l\int_0^b 4C_2^2\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)dy\,dz + 2\int_0^b\int_0^a 4\,\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2}\,C_2^2\,\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx\,dy =$$

$$= 2C_2^2\,\frac{al}{4}\left(4\,\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 4\right) + 8C_2^2\,\frac{bl}{2} + 8C_2^2\,\frac{ab}{2}\cdot\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}\,.$$

При выводе этого соотношения была использована формула

$$g_{m0}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}\,. \tag{III.10}$$

Преобразуем выражение для u_2:

$$u_2 = 2C_2^2\,al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2\,bl + 4C_2^2\,ab\,\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}\,. \tag{III.11}$$

Подставим выражения (III.9), (III.11) в формулу (III.2):

$$Q = \alpha_4\,\frac{C_2^2\,abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right)}{2C_2^2\,al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2\,bl + 4C_2^2\,ab\,\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}}\,.$$

Окончательное выражение для добротности резонатора в случае волн типа H_{m0p} имеет вид

$$Q_{\mathrm{H}_{m0p}} = \frac{\alpha_4}{2}\cdot\frac{abl\omega_{\mathrm{p}}^2\mu_{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{a}}}{al\omega_{\mathrm{p}}^2\mu_{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{a}} + 2blg_{m0}^2 + 2ab\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\,. \tag{III.12}$$

Выведем выражение для добротности в случае волн типа H_{0np}. Из выражений (21.29)—(21.31) найдем составляющие магнитного поля:

$$\dot H_{y\mathrm{p}} = j2\,\frac{p\pi}{g_{0n}^2 l}\,C_2\,\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{III.13}$$

$$\dot H_{z\mathrm{p}} = -j2C_2\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{b}z\right). \tag{III.14}$$

Определим интеграл u_1:

$$u_1=\int_0^l\int_0^b\int_0^a(|\dot H_{y\mathrm{p}}|^2+|\dot H_{z\mathrm{p}}|^2)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^l\int_0^b\int_0^a\left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}C_2^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+\right.$$

$$\left.+4C_2^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=4C_2^2\frac{abl}{4}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^4l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+1\right)=C_2^2abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}+1\right). \qquad (III.15)$$

Определим интеграл u_2:

$$u_2=2\int_0^l\int_0^a|\dot H_{z\mathrm{p}}|^2\,dx\,dz\,|_{y=0}+2\int_0^l\int_0^b(|\dot H_{y\mathrm{p}}|^2+|\dot H_{z\mathrm{p}}|^2)\,dy\,dz\,|_{x=0}+$$

$$+2\int_0^b\int_0^a|\dot H_{y\mathrm{p}}|^2\,dx\,dy\,|_{z=0}=2\int_0^l\int_0^a4C_2^2\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)dx\,dz+$$

$$+2\int_0^l\int_0^b\left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^4l^2}C_2^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+\right.$$

$$\left.+4C_2^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dy\,dz+$$

$$+2\int_0^b\int_0^a4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^4l^2}C_2^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dx\,dy=$$

$$=8C_2^2\frac{al}{2}+8C_2^2\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}\cdot\frac{bl}{4}+8C_2^2\frac{bl}{4}+8C_2^2\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}\cdot\frac{ab}{2}=$$

$$=4C_2^2al+2C_2^2bl\left(\frac{p^2\pi}{g_{0n}^2l^2}+1\right)+4C_2^2ab\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}. \qquad (III.16)$$

Подставляя выражения (III.15), (III.16) в формулу (III.2), найдем добротность прямоугольного объемного резонатора в случае волн типа H_{0np}:

$$Q_{\mathrm{H}_{0np}}=\alpha_4\frac{C_2^2abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}+1\right)}{4C_2^2al+2C_2^2bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}+1\right)+4C_2^2ab\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2l^2}},$$

или в окончательном виде

$$Q_{\mathrm{H}_{0np}}=\frac{\alpha_4}{2}\cdot\frac{abl\omega_{\mathrm{p}}^2\mu_{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{a}}}{2alg_{0n}^2+bl\omega_{\mathrm{p}}^2\mu_{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{a}}+2ab\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \qquad (III.17)$$

§ III.2. Определение добротностей прямоугольных объемных резонаторов в случае волн электрического типа

В случае волн электрического типа составляющие поля в объемном резонаторе определяются выражениями (21.18)—(21.20).

Выведем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mnp}.

Найдем интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{x\mathrm{p}}|^2 + |\dot{H}_{y\mathrm{p}}|^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= 4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{abl}{8} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) = \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{2g_{mn}^2} C_1^2 abc. \qquad \text{(III.18)}$$

Определим интеграл u_2:

$$u_2 = 2 \int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{x\mathrm{p}}|^2\, dx\, dz\, |_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{y\mathrm{p}}|^2\, dy\, dz\, |_{x=0} +$$

$$+ 2 \int_0^b \int_0^a (|H_{x\mathrm{p}}|^2 + |\dot{H}_{y\mathrm{p}}|^2)\, dx\, dy\, |_{z=0} =$$

$$= 2 \int_0^l \int_0^a 4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) dx\, dz +$$

$$+ 2 \int_0^l \int_0^b 4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) dy\, dz +$$

$$+ 2 \int_0^b \int_0^a \left\{4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\right\} dx\, dy =$$

$$= 8 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{al}{4} \cdot \frac{n^2\pi^2}{b^2} + 8 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{bl}{4} \cdot \frac{m^2\pi^2}{a^2} +$$

$$+ 8 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{ab}{4} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right) =$$

$$= 2 \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \varepsilon_\mathrm{a}^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(al \frac{n^2\pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2\pi^2}{a^2} + abg_{mn}^2\right). \qquad \text{(III.19)}$$

Подставляя найденные значения u_1 и u_2 в формулу (III.2), определим добротность резонатора в случае волн типа E_{mnp}:

$$Q_{E_{mnp}} = \alpha_4 \frac{\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 abl}{2 \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(al \frac{n^2\pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2\pi^2}{a^2} + abg_{mn}^2 \right)},$$

$$Q_{E_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{4} \cdot \frac{g_{mn}^2 \, abl}{al \frac{n^2\pi^2}{b^2} + bl \frac{m^2\pi^2}{a^2} + abg_{mn}^2}. \qquad \text{(III.20)}$$

Найдем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mn0}. При $p = 0$ составляющие магнитного поля записываются в виде

$$\dot{H}_{xp} = -j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \qquad \text{(III.21)}$$

$$\dot{H}_{yp} = j2 \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \qquad \text{(III.22)}$$

Определим интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left(|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{4\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 abl \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^2} C_1^2 abl. \qquad \text{(III.23)}$$

Найдем интеграл u_2:

$$u_2 = 2 \int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{xp}|^2 dx\, dz \,|_{y=0} + 2 \int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{yp}|^2 dy\, dz \,|_{x=0} +$$

$$+ 2 \int_0^b \int_0^a \left(|\dot{H}_{xp}|^2 + |\dot{H}_{yp}|^2\right) dx\, dy \,|_{z=0} =$$

$$=2\int\limits_0^l\int\limits_0^a 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx\,dz+$$

$$+2\int\limits_0^l\int\limits_0^b 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\,dz+$$

$$+2\int\limits_0^b\int\limits_0^a\left\{4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)+\right.$$

$$\left.+4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\}dx\,dy=$$

$$=4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}al+4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}bl+$$

$$+2\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)ab=2\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\times$$

$$\times\left(2al\,\frac{n^2\pi^2}{b^2}+2bl\,\frac{m^2\pi^2}{a^2}+g_{mn}^2ab\right). \qquad \text{(III.24)}$$

Подставим найденные значения u_1 и u_2 в формулу (III.2):

$$Q_{E_{mn0}}=\alpha_4\,\frac{\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^2}C_1^2abl}{2\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(2al\,\frac{n^2\pi^2}{b^2}+2bl\,\frac{m^2\pi^2}{a^2}+g_{mn}^2ab\right)}.$$

Проводя необходимые сокращения, получаем следующее выражение для добротности объемного резонатора, работающего на волнах типа E_{mn0}:

$$Q_{E_{mn0}}=\frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{g_{mn}^2abl}{al\,\frac{n^2\pi^2}{b^2}+bl\,\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{g_{mn}^2}{2}ab}. \qquad \text{(III.25)}$$

§ III.3. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн магнитного типа

В случае волн магнитного типа составляющие магнитного поля в цилиндрическом объемном резонаторе определяются с помощью выражений (22.23)—(22.25).

Выведем выражение для добротности резонатора в случае волн типа H_{mnp}.

Найдем интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r\text{p}}|^2 + |\dot{H}_{\varphi\text{p}}|^2 + |\dot{H}_{z\text{p}}|^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4\, \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 J'^2_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$+ 4\, \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \sin^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) +$$

$$\left. + 4C_2^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \right\} r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4C_2^2 \frac{l\pi}{2} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} J'^2_m \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) + \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) + J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \right\} r\, dr.$$

Осуществим замену переменных, положив $r = r_0 x$:

$$u_1 = 2C_2^2 l\pi r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} J'^2_m (\mu_{mn} x) + \right.$$

$$\left. + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 x^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2 (\mu_{mn} x) + J_m^2 (\mu_{mn} x) \right\} x\, dx =$$

$$= 2C_2^2 l\pi r_0^2 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2\mu_{mn}^2} J_m^2 (\mu_{mn} x) + \right.$$

$$\left. + J'^2_m (\mu_{mn} x) \right\} x\, dx + 2C_2^2 l\pi r_0^2 \int_0^1 J_m^2 (\mu_{mn} x)\, x\, dx. \qquad \text{(III.26)}$$

Первый из написанных интегралов аналогичен интегралу (II.29). Его решение дается выражением (II.42). Второй интеграл находят с помощью формулы (II.32). Следовательно,

$$u_1 = 2C_2^2 l\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2 (\mu_{mn}) +$$

$$+ 2C_2^2 l\pi r_0^2 \frac{1}{2} \left\{ J_m^2 (\mu_{mn}) - J_{m-1} (\mu_{mn})\, J_{m+1} (\mu_{mn}) \right\}.$$

С учетом соотношений (II.50), (II.38) второе слагаемое видоизменяется, в результате чего выражение для u_1 приобретает вид

$$u_1 = C_2^2 l\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} r_0^2 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2 (\mu_{mn}) +$$

$$+ C_2^2 l\pi r_0^2 \left\{ J_m^2 (\mu_{mn}) - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2 (\mu_{mn}) \right\},$$

или иначе

$$u_1 = C_2^2 l\pi r_0^2 J_m^2(\mu_{mn})\left(1-\frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\left(1+\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\right). \qquad \text{(III.27)}$$

Далее определим интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} (|\dot{H}_{\varphi p}|^2 + |\dot{H}_{zp}|^2)\, r_0\, d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rp}|^2 + |\dot{H}_{\varphi p}|^2)\, r d\varphi\, dr\,|_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{4\frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r_0^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \sin^2(m\varphi)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$

$$\left.+ 4C_2^2 J_m^2(\mu_{mn})\cos^2(m\varphi)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\} r_0\, d\varphi\, dz +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left\{4\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\cos^2(m\varphi) +\right.$$

$$\left.+ 4\frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\sin^2(m\varphi)\right\} r\, d\varphi\, dr =$$

$$= 4\frac{p^2\pi^2 r_0^3}{l^2\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn})\frac{\pi l}{2} + 4C_2^2 J_m^2(\mu_{mn})\, r_0 \frac{\pi l}{2} +$$

$$+ 8\pi\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 \int_0^{r_0}\left\{\frac{r_0^2 m^2}{r^2\mu_{mn}^2} J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right) + J'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}r\right)\right\} r\, dr.$$

Сделаем замену переменных в соответствии с выражением (II.28) и осуществим некоторые преобразования:

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn})\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^4} m^2\right) +$$

$$+ 8\pi\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{\frac{m^2}{x^2\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}x) + J_m'^2(\mu_{mn}x)\right\} x\, dx.$$

Полученный интеграл аналогичен интегралу (II.29), решение которого соответствует формуле (II.42). В результате выражение для u_2 приобретает вид

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn})\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^4} m^2\right) +$$

$$+ 8\pi\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 \frac{r_0^2}{2}\left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2(\mu_{mn}),$$

или иначе

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi J_m^2(\mu_{mn}) \left\{ l \left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2 m^2}{l^2 \mu_{mn}^4}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\, r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) \right\}. \qquad \text{(III.28)}$$

Подставляя значения интегралов (III.27), (III.28) в формулу (III.2), получаем

$$Q_{\mathrm{H}_{mn\mathrm{p}}} = \alpha_4 \frac{l r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\right)}{2\left\{ l \left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2 m^2}{l^2\mu_{mn}^4}\right) + 2\,\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\, r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\right\}}. \qquad \text{(III.29)}$$

Определим добротность цилиндрического объемного резонатора в случае волн типа $\mathrm{H}_{\mathrm{onp}}$. При $m = 0$ составляющие магнитного поля в резонаторе могут быть представлены в виде

$$\dot{H}_{r\mathrm{p}} = -2j\,\frac{p\pi r_0}{l\mu_{0n}}\, C_2^2 J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \qquad \text{(III.30)}$$

$$\dot{H}_{z\mathrm{p}} = -2j C_2^2 J_0\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right). \qquad \text{(III.31)}$$

Найдем интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r\mathrm{p}}|^2 + |\dot{H}_{z\mathrm{p}}|^2)\, r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4\,\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2}\, C_2^2 J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$\left. + 4C_2^2 J_0^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right)\sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Проводя интегрирование и осуществляя замену переменных в соответствии с формулой (II.28), получаем

$$u_1 = \pi l 4 C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2}\, J_0'^2(\mu_{0n}x) + J_0^2(\mu_{0n}x)\right\} x\,dx.$$

В соответствии с рекуррентным соотношением $J_0'^2(z) = J_1^2(z)$ выражение для u_1 можно несколько видоизменить:

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2}\, J_1^2(\mu_{0n}x) + J_0^2(\mu_{0n}x)\right\} x\,dx.$$

Интеграл u_1 можно вычислить с помощью формулы (II.32):

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\langle \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} \{J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n})\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \{J_0^2(\mu_{0n}) - J_{-1}(\mu_{0n}) J_1(\mu_{0n})\} \right\rangle. \qquad \text{(III.32)}$$

Для функций Бесселя справедливо рекуррентное соотношение

$$z \frac{d}{dz} J_m(z) - mJ_m(z) = -zJ_{m+1}(z). \qquad \text{(III.33)}$$

При $m=0$ из него следует, что

$$J_0'(z) = -J_1(z),$$
$$J_0'(\mu_{0n}) = -J_1(\mu_{0n}) = 0. \qquad \text{(III.34)}$$

Далее воспользуемся соотношением

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}), \qquad \text{(II.35)}$$

которое при $m=0$ записывается в виде

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = \frac{2}{\mu_{0n}} J_1(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) - J_0^2(\mu_{0n}),$$

или в силу справедливости равенства (III.34)

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = -J_0^2(\mu_{0n}). \qquad \text{(III.35)}$$

С учетом формул (III.34) и (III.35) в выражении (III.32), получаем

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) + \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) \right\} =$$
$$= 2\pi l C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}) \left(\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} + 1 \right). \qquad \text{(III.36)}$$

Найдем интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{z\text{p}}|^2 r_0 \, d\varphi \, dz \,|_{r=r_0} + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |\dot{H}_{z\text{p}}|^2 r \, d\varphi \, dr \,|_{z=0} =$$
$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) \sin^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0 \, d\varphi \, dz +$$
$$+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 J_0'^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r \, d\varphi \, dr =$$
$$= 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 \int_0^{r_0} J_0'^2 \left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r \, dr.$$

Осуществляя замену переменных и производной функций Бесселя, получаем

$$u_2 = 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \times$$

$$\times \int_0^1 J_1^2(\mu_{0n}x)\, x\, dx = 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 +$$

$$+ 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \frac{1}{2} \{J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n})\} =$$

$$= 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 8\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}),$$

$$u_2 = 4\pi C_2^2 r_0 J_0^2(\mu_{0n}) \left(l + 2\frac{p^2\pi^2 r_0^3}{l^2\mu_{0n}^2}\right). \qquad (III.37)$$

Подставим значения интегралов (III.36) и (III.37) в формулу (III.2). Тогда

$$Q_{\mathrm{H}_{0np}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{l r_0 \left(\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} + 1\right)}{l + 2\frac{p^2\pi^2 r_0^3}{l^2\mu_{0n}^2}}. \qquad (III.38)$$

§ III.4. Определение добротностей цилиндрических объемных резонаторов в случае волн электрического типа

В случае волн электрического типа составляющие магнитного поля в цилиндрическом объемном резонаторе определяются с помощью выражений (22.12)—(22.14).

Выведем выражение для добротности резонатора в случае волн типа E_{mnp}.

Найдем интеграл

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{r\mathrm{p}}|^2 + |\dot{H}_{\varphi\mathrm{p}}|^2)\, r dr d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{4 \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2 \varepsilon_{\mathrm{a}}^2 r_0^4}{r^2\eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \sin^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$\left. + 4\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2 \varepsilon_{\mathrm{a}}^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} r dr d\varphi\, dz =$$

$$= 4\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2 \varepsilon_{\mathrm{a}}^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2} r_0^2 \int_0^1 \left\{\frac{m^2}{x^2\eta_{mn}^2} J_m^2(\eta_{mn}x) + J_m'^2(\eta_{mn}x)\right\} x\, dx.$$

Полученный интеграл аналогичен по математической форме интегралу (II.58). Решение этого интеграла дается формулой (II.62), с учетом которой можно написать

$$u_1 = 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2}\cdot\frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}) = \frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi l J_m'^2(\eta_{mn}). \quad \text{(III.39)}$$

Определим интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot H_{\varphi p}|^2 r_0\, d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} + 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} (|\dot H_{rp}|^2 + |\dot H_{\varphi p}|^2)\, r d\varphi\, dz\,|_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \cos^2(m\varphi)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) r_0\, d\varphi\, dz +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\left\{4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^4}{r^2\eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\sin^2(m\varphi) +\right.$$

$$\left. + 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\cos^2(m\varphi)\right\} r d\varphi\, dr =$$

$$= 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn})\frac{l\pi}{2} r_0 + 8\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2\pi r_0^2 \int_0^1 \left\{\frac{m^2}{x^2\eta_{mn}^2} J_m^2(\eta_{mn}x) +\right.$$

$$\left. + J_m'^2(\eta_{mn}x)\right\} x\, dx = 2\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn})\, l\pi r_0 + 8\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1\pi\frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}),$$

или окончательно

$$u_2 = 2\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2} C_1^2\pi J_m'^2(\eta_{mn})(l+2r_0). \quad \text{(III.40)}$$

После подстановки выражений (III.39), (III.40) в формулу (III.2) получается соотношение

$$Q_{E_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{2}\cdot\frac{r_0 l}{l+2r_0}. \quad \text{(III.41)}$$

Найдем добротность резонаторов в случае волн типа E_{onp}. При $m=0$ существует только одна составляющая магнитного поля в резонаторе:

$$\dot H_{\varphi p} = -2j\frac{\omega_p\varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0}r\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \quad \text{(III.42)}$$

Определим интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} |\dot H_{\varphi p}|^2 r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0}r\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2\pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n}x)\, x\, dx.$$

Этот интеграл аналогичен по форме интегралу (II.72), решение которого дается формулой (II.73). В результате использования указанной формулы получаем

$$u_1 = 2\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \tag{III.43}$$

Найдем интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{\varphi p}|^2 r_0 d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} + 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} |\dot{H}_{\varphi p}|^2 r d\varphi dr\,|_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0\, d\varphi\, dz +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r d\varphi\, dr =$$

$$= 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\,\pi l r_0 + 8\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n}x)\, x dx =$$

$$= 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\,\pi l + 16\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

или окончательно

$$u_2 = 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n})(l + 2r_0). \tag{III.44}$$

Подставляя выражения (III.43), (III.44) в формулу (III.2), получаем соотношение для добротности в случае волн типа E_{onp}:

$$Q_{E_{onp}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + 2r_0}. \tag{III.45}$$

Определим добротность цилиндрических объемных резонаторов в случае волн типа E_{0n0}. При этом существует только одна составляющая магнитного поля в резонаторе:

$$\dot{H}_{\varphi p} = -2j\frac{\omega_p \varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right). \tag{III.46}$$

Найдем интеграл u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r dr d\varphi\, dz =$$

$$= 4\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n}x)\, x dx = 8\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

или окончательно

$$u_1 = 4\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \tag{III.47}$$

Вычислим интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, r_0\, d\varphi\, dz\,\Big|_{r=r_0} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} 4\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, d\varphi\, dr =$$

$$= 4\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2\, 2\pi\, l J_0'^2(\eta_{0n}) +$$

$$+ 16\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} \cdot C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx =$$

$$= 8\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} \cdot C_1^2 \pi l\, J_0'^2(\eta_{0n}) +$$

$$+ 16\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi\, \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

или окончательно

$$u_2 = 8\,\frac{\omega_p^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n})(l + r_0). \tag{III.48}$$

Подставим выражения (III.47), (III.48) в формулу (III.2):

$$Q_{E_{0n0}} = \frac{\alpha_1}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + r_0}. \tag{III.49}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДАХ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

§ IV.1. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе

Допустим, что возбуждение волновода осуществляется сторонним электрическим током, плотность которого равна $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$. Требуется найти амплитудный коэффициент $\dot{A}_1$ электромагнитного поля в волноводе.