или окончательно

$$u_1 = 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \tag{III.47}$$

Вычислим интеграл u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, r_0\, d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, d\varphi\, dr =$$

$$= 4\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2\, 2\pi\, l J_0'^2(\eta_{0n}) +$$

$$+ 16\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2}\cdot C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n}x)\, x\, dx =$$

$$= 8\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2}\cdot C_1^2 \pi l\, J_0'^2(\eta_{0n}) +$$

$$+ 16\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi\,\frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

или окончательно

$$u_2 = 8\,\frac{\omega_p^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n})\,(l + r_0). \tag{III.48}$$

Подставим выражения (III.47), (III.48) в формулу (III.2):

$$Q_{E_{0n0}} = \frac{\alpha_1}{2}\cdot\frac{r_0 l}{l + r_0}. \tag{III.49}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДАХ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

§ IV.1. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе

Допустим, что возбуждение волновода осуществляется сторонним электрическим током, плотность которого равна $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$. Требуется найти амплитудный коэффициент $\dot{A}_1$ электромагнитного поля в волноводе.

Основным для расчета является соотношение (32.21)

$$\dot{A}_1 = \frac{\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\, \dot{\mathbf{E}}_1\, dV}{\int\limits_{S_в} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1]\}\, \mathbf{1}_z\, dS}.$$

В этом выражении $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ представляет собой электромагнитное поле, распространяющееся в сторону положительных значений оси z волновода, в то время как поле $\dot{\mathbf{E}}_{-1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-1}$ распространяется в обратном направлении. Составляющие поля волны типа H_{10} можно определить из общих выражений (13.52)—(13.57).

При использовании выражений для составляющих поля в формуле (32.21) следует помнить, что амплитудный коэффициент C_2 должен быть равен единице. В соответствии со сказанным можно написать следующие выражения для составляющих поля волны типа H_{10}:

$$\dot{H}_x = j\frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{IV.1}$$

$$\dot{H}_z = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{IV.2}$$

$$\dot{E} = -j\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \tag{IV.3}$$

Под интегралом, стоящим в знаменателе выражения (32.21), векторные произведения умножают скалярно на $\mathbf{1}_z$. Скалярное произведение будет отлично от нуля, если в векторных произведениях участвуют составляющие поля $\dot{H}_x$ и $\dot{E}_y$. В силу этого следует записать

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{E}_y = -\mathbf{1}_y j\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\
\dot{\mathbf{H}}_1 &= \dot{\mathbf{H}}_x = \mathbf{1}_x j\frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\
\dot{\mathbf{E}}_{-1} &= -\mathbf{1}_y j\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}, \\
\dot{\mathbf{H}}_{-1} &= -\mathbf{1}_x j\frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}.
\end{aligned}\right\} \tag{IV.4}$$

При записи поля $\dot{\mathbf{E}}_{-1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-1}$ был изменен знак у продольного волнового числа в волноводе h, как у волны, распространяющейся в сторону отрицательных значений оси z.

Интеграл в знаменателе выражения (32.21) записывают в виде

$$\int\limits_{S_в} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1]\}\, \mathbf{1}_z dS =$$

$$= \int\limits_0^b \int\limits_0^a 2\frac{\omega\mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx\, dy = \frac{\omega\mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 ab. \tag{IV.5}$$

Для вычисления интеграла в числителе выражения (32.21) следует задаться распределением плотности тока $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$. Допустим, что возбуждение волновода осуществляется коротким штырем длиной l, помещенным в середине широкой части волновода, в сечении $x=a/2$, $z=0$ (рис. IV.1).

Далее предположим, что плотность тока $\dot{\mathbf{J}}_{э2}$ неизменна вдоль длины штыря. При этих условиях интеграл в числителе выражения (32.21) можно записать таким образом:

$$\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV = \int\limits_0^l \int\limits_{S_1} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1\, d\mathbf{S}\, d\mathbf{l},$$

где S_1 — площадь поперечного сечения штыря, или с учетом постоянства плотности тока

$$\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV = \int\limits_0^l \dot{I}_{э2}\dot{\mathbf{E}}_1 \big|_{x=a/2}\, d\mathbf{y} =$$

$$= -I_{э2}\int\limits_0^l j\,\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\,dy = -I_{э2}\, j\,\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\,l. \qquad \text{(IV.6)}$$

Подставляя выражения (IV.5), (IV.6) в формулу (32.21), получаем соотношение для амплитудного коэффициента поля в прямоугольном волноводе:

$$\dot{A}_1 = \frac{-\dot{I}_э j\,\dfrac{\omega\mu_a}{g_{10}^2}\cdot\dfrac{\pi}{a}\,l}{\dfrac{\omega\mu_a h}{g_{10}^4}\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 ab},$$

или

$$\dot{A}_1 = -j\,\frac{\dot{I}_{э2}\, l g_{10}^2}{\pi b h}. \qquad \text{(IV.7)}$$

§ IV.2. Пример расчета амплитудного коэффициента волны типа H_{101} в прямоугольном объемном резонаторе

При расчете в качестве основного используют выражение (33.44):

$$\dot{A}_{q\text{р}} = -\frac{Q\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_э\dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV}{\omega_\text{р}\,\varepsilon_a \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2\, dV},$$

которое дает значение амплитудного коэффициента поля при резонансе.

С помощью формул (21.29)—(21.34) выведем выражение для напряженности электрического поля в резонаторе в случае волны типа $H_{10\bar{1}}$:

$$\dot{E}_{yp} = -\frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right). \qquad (IV.8)$$

Допустим, что возбуждение резонатора осуществляется коротким штырем длиной l, плотность тока $\dot{J}_э$ в котором неизменна вдоль длины штыря. Штырь расположен в сечении $x = a/2$, $z = l/2$.

Рассчитаем интеграл в числителе выражения (33.44), положив $C_2 = 1$:

$$\int_{V_1} \dot{J}_э \dot{E}_q^* dV = -\int_0^l \int_{S_1} \dot{J}_э \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} dS\, dl = -\dot{I}_э \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l. \qquad (IV.9)$$

Найдем интеграл в знаменателе выражения (33.44):

$$\int_{V_1} |\dot{E}_q|^2 dV = \int_0^l \int_0^b \int_0^a \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \times$$
$$\times \sin^2\left(\frac{\pi}{l} z\right) dx\, dy\, dz = \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{abl}{4}. \qquad (IV.10)$$

Подставим выражения (IV.9), (IV.10) в формулу (33.44):

$$\dot{A}_{qrp} = \frac{Q \dot{I}_э \frac{\omega_p \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l}{\omega_p \varepsilon_a \frac{\omega_p^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{abl}{4}},$$

или окончательно

$$\dot{A}_{qrp} = \frac{Q \dot{I}_э}{\frac{\omega_p^2 \mu_a \varepsilon_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{ab}{4}}. \qquad (IV.11)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Пример 1. Рассмотрим простой случай, когда электродинамическая задача моделируется в отсутствие сторонних электрического и магнитного токов. Допустим, что при моделировании желательно получить значения электрического и магнитного полей, совпадающие с натурной задачей. Далее предположим, что электрическая и магнитная проводимости сред в натурной и модельной задачах равны нулю, а диэлектрическая и магнитная проницаемости натурной задачи — соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостям модельной задачи. При этих условиях в соответствии