ном случае прямоугольного резонатора с волной типа H_{101} определяется формулой (VI.16). При этом мощность потерь в резонаторе

$$P_{п\Sigma}=\frac{|\dot{U}|^2}{2R_{вх}}. \qquad \text{(VII.2)}$$

Мощность, теряемая на внутреннем сопротивлении источника,

$$P_{н}=\frac{|\dot{U}|^2}{2R_{н}}. \qquad \text{(VII.3)}$$

Отношение этих мощностей

$$P_{н}/P_{п\Sigma}=R_{вх}/R_{н}. \qquad \text{(VII.4)}$$

Добротность нагруженного резонатора в соответствии с формулой (VII.1) определяется выражением

$$Q_{н}=Q\frac{1}{1+R_{вх}/R_{н}}. \qquad \text{(VII.5)}$$

При бесконечно большом сопротивлении нагрузки $Q_{н}=Q$, где Q — добротность ненагруженного резонатора. При сопротивлении нагрузки, равном нулю, $Q_{н}=0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ VIII

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННОГО ПОЛЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОТВЕРСТИИ В ИДЕАЛЬНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ

Допустим, что рассматривается случай нормального падения плоской волны на бесконечный идеально проводящий плоский экран, в котором имеется прямоугольное отверстие со сторонами a (вдоль оси x) и b (вдоль оси y). Пусть площадь отверстия $ab=S_0$. Постановка подобной задачи рассматривалась § 35.5, где были найдены формулы, определяющие дифракционные поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ и $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\left\langle \operatorname{rot}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\}+\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\dot{\mathbf{E}}_x\mathbf{1}_z]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\}-\right.$$
$$\left.-j\omega\tilde{\varepsilon}_a[\dot{\mathbf{E}}_x\mathbf{1}_z]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\rangle dS,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\left\langle \operatorname{rot}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\}-\frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\dot{\mathbf{H}}_y\mathbf{S}_z]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\}+\right.$$
$$\left.+j\omega\tilde{\mu}_a[\mathbf{H}_y\mathbf{1}_z]\frac{e^{-i\gamma r}}{r}\right\rangle dS.$$

Введем сферическую систему координат, начало координат которой совместим с началом декартовых координат на рис. 35.3. Обозначим буквой R радиус-вектор точки наблюдения, в которой определяются поля $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ и $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$. Обозначим буквой ρ радиус-вектор точки интегрирования, под которым будем понимать расстояние от начала координат до текущей точки интегрирования, находящейся на плоскости x, y в пределах отверстия в экране. Радиус-вектор r, входящий в формулы для $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ и $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$, представляет собой расстояние между текущей точкой интегрирования на плоскости x, y и точкой наблюдения. В соответствии с известными тригонометрическими формулами

$$r=\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\chi}, \tag{VIII.1}$$

где χ — угол между радиусами-векторами R и ρ.

Разложим выражение (VIII.1) по степеням ρ/R — малой дроби при больших значениях R:

$$r=R\sqrt{1+\frac{\rho^2}{R^2}-2\frac{\rho}{R}\cos\chi}=R\Big(1-\frac{\rho}{R}\cos\chi+\frac{\rho^2}{2R^2}-$$
$$-\frac{\rho^2}{2R^2}\cos^2\chi+\frac{\rho^3}{2R^3}\cos\chi-\frac{\rho^4}{8R^4}+\ldots\Big). \tag{VIII.2}$$

Назовем дальней зоной область таких расстояний R, при которых становится справедливым неравенство

$$\frac{\rho^2}{2R^2}\ll\frac{\rho}{R}. \tag{VIII.3}$$

Тогда в дальней зоне формула (VIII.2) может быть представлена в виде

$$r\approx R\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\chi\right)=R-\rho\cos\chi. \tag{VIII.4}$$

Соответственно в дальней зоне функция $\frac{e^{-j\gamma r}}{r}$ может быть записана в виде

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\approx\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}. \tag{VIII.5}$$

Запишем формулы (35.38), (35.39) с учетом выражения (VIII.5), помня, что интегрирование по поверхности S_0 осуществляется в координатах источника поля, а дифференцирование — в координатах точки наблюдения:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\Big\langle\mathrm{rot}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\}+$$
$$+\frac{j}{\omega\tilde{\mu}_a}\,\mathrm{grad\,div}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\}+$$
$$+j\omega\tilde{\varepsilon}_a[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\Big\rangle dS=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left\langle\mathrm{rot}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]e^{j\gamma\rho\cos\chi}dS\right\}\right\rangle+$$
$$+\frac{j}{4\pi\omega\tilde{\mu}_a}\left\langle\mathrm{grad\,div}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}dS\right\}\right\rangle+$$
$$+\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}dS, \tag{VIII.6}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\Big\langle \mathrm{rot}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\} -$$

$$-\frac{j}{\omega\tilde{\varepsilon}_a}\,\mathrm{grad\,div}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\} -$$

$$-j\omega\tilde{\mu}_a[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\Big\rangle dS = \frac{1}{4\pi}\Big\langle \mathrm{rot}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS\right\}\Big\rangle -$$

$$-\frac{j}{4\pi\omega\tilde{\varepsilon}_a}\Big\langle \mathrm{grad\,div}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS\right\}\Big\rangle -$$

$$-\frac{j\omega\mu_a}{4\pi}\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS = \dot{\mathbf{F}}_E, \qquad \text{(VIII.8)}$$

$$\int\limits_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS = \dot{\mathbf{F}}_H. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае векторные произведения, стоящие под интегралами, являются постоянными величинами и их можно было бы вынести за знак интеграла, т. е. написать в виде

$$\dot{\mathbf{F}}_E = [\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\int\limits_{S_0}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS, \qquad \text{(VIII.10)}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = [\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\int\limits_{S_0}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Подставив введенные обозначения в формулы (VIII.6), (VIII.7), получим

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right) + \frac{j}{4\pi\omega\tilde{\mu}_a}\mathrm{grad\,div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right) +$$

$$+\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E, \qquad \text{(VIII.12)}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right) - \frac{j}{4\pi\omega\tilde{\varepsilon}_a}\mathrm{graddiv}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right) -$$

$$-\frac{j\omega\mu_a}{4\pi}\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Осуществим дифференциальные операции в сферических координатах, используем формулы (I.28), (I.29), (I.30), приведенные в приложении I. При этом, рассчитывая поля в дальней зоне, сохраним члены не менее порядка $1/R$:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right) \approx -\mathbf{1}_\varphi\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta}\right) +$$

$$+\mathbf{1}_\theta\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta}\right) \approx \mathbf{1}_\varphi j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta} - \mathbf{1}_\theta j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\varphi}. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Аналогично,

$$\operatorname{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right)\approx \mathbf{1}_\varphi j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_\theta}-\mathbf{1}_\theta j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_\varphi}, \qquad (VIII.15)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right)\approx\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right)\approx -j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}, \qquad (VIII.16)$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right)\approx \mathbf{1}_R\frac{\partial}{\partial R}\left(-j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right)\approx$$

$$\approx -\mathbf{1}_R j\gamma(-j\gamma)\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}=-\mathbf{1}_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}, \qquad (VIII.17)$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right)=-\mathbf{1}_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_R}. \qquad (VIII.18)$$

При проведении этих операций векторы $\dot{\mathbf{F}}_E$ и $\dot{\mathbf{F}}_H$ были представлены в виде суммы составляющих в сферической системе координат:

$$\mathbf{F}_E=\mathbf{1}_R\dot{F}_{E_R}+\mathbf{1}_\varphi\dot{F}_{E\varphi}+\mathbf{1}_\theta\dot{F}_{E\theta}, \qquad (VIII.19)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H=\mathbf{1}_R\dot{F}_{H_R}+\mathbf{1}_\varphi\dot{F}_{H\varphi}+\mathbf{1}_\theta F_{H\theta}. \qquad (VIII.20)$$

Подставим выражения (VIII.14), (VIII.15), (VIII.17), (VIII.18), (VIII.19), (VIII.20) в формулы (VIII.12), (VIII.13):

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{1}_\varphi j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta}-\mathbf{1}_\theta j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\varphi}\right)+$$

$$+\frac{j}{4\pi\omega\tilde{\mu}_a}\left(-\mathbf{1}_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right)+$$

$$+\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\left(\mathbf{1}_R\dot{F}_{E_R}+\mathbf{1}_\varphi\dot{F}_{E_\varphi}+\mathbf{1}_\theta\dot{F}_{E_\theta}\right).$$

Учитывая, что $\gamma^2=\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a$, получим

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\left(\mathbf{1}_\varphi j\gamma\dot{F}_{H_\theta}-\mathbf{1}_\theta j\gamma\dot{F}_{H\varphi}\right)+$$

$$+\left(-\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\mathbf{1}_R\dot{F}_{E_R}+\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\mathbf{1}_R\dot{F}_{E_R}\right)\frac{e^{-j\gamma R}}{R}+$$

$$+\left(\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\mathbf{1}_\varphi\dot{F}_{E_\varphi}+\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\mathbf{1}_\theta\dot{F}_{E_\theta}\right)\frac{e^{-j\gamma R}}{R}.$$

Сокращая подобные члены и группируя орты, можно получить следующую формулу:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma=\frac{j}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\left\{\mathbf{1}_\varphi\left(\gamma\dot{F}_{H_\theta}+\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{F}_{E\varphi}\right)+\mathbf{1}_\theta\left(\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{F}_{E_\theta}-\gamma\dot{F}_{H\varphi}\right)\right\}. \qquad (VIII.21)$$

Аналогично,

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma=\frac{j}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\left\{\mathbf{1}_\varphi\left(\gamma\dot{F}_{E_\theta}-\omega\mu_a F_{H\varphi}\right)+\mathbf{1}_\theta\left(-\omega\tilde{\mu}_a\dot{F}_{H_\theta}-\gamma\dot{F}_{E\varphi}\right)\right\}. \qquad (VIII.22)$$

Как следует из полученных соотношений, в дальней зоне отсутствуют радиальные составляющие поля. Поле является поперечным. Интегралы $\dot{\mathbf{F}}_E$ и $\dot{\mathbf{F}}_H$ рассчитывают в декартовой системе координат. Учитывая, что

$$[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]=\mathbf{1}_y\dot{E}_x,$$

$$[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]=-\mathbf{1}_x\dot{H}_y,$$

эти интегралы можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{F}}_E = \mathbf{1}_y \dot{E}_x \int\limits_{S_0} e^{j\gamma\rho\cos\chi}\, dS = \mathbf{1}_y \dot{E}_x \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho\cos\chi}\, dx\, dy, \qquad (VIII.23)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = -\overline{\mathbf{1}}_x \dot{H}_y \int\limits_{S_0} e^{j\gamma\rho\cos\chi}\, dS = -\overline{\mathbf{1}}_x \dot{H}_y \int\limits_{-b/2}^{b/2} \int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho\cos\chi}\, dx\, dy. \qquad (VIII.24)$$

В формулы (VIII.21), (VIII.22) функции $\dot{F}_E$ и $\dot{F}_H$ входят в виде координатных составляющих в сферических координатах. Переход от декартовой к сферической системе координат осуществляется с помощью обычных формул:

$$\begin{aligned} \dot{F}_\varphi &= -\dot{F}_x \sin\varphi + \dot{F}_y \cos\varphi, \\ \dot{F}_\theta &= \dot{F}_x \cos\theta \cos\varphi + \dot{F}_y \cos\theta \sin\varphi. \end{aligned} \qquad (VIII.25)$$