Глава 1

МЕХАНИКА

§ 1. КИНЕМАТИКА

Основные формулы

Положение точки в пространстве определяется радиусом-вектором **r**, т. е. вектором, проведенным из начала координат в данную точку.

Перемещение (Δ**r**) точки есть вектор, проведенный из ее начального положения в конечное и равный приращению радиуса вектора данной точки.

Скорость есть производная от радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1.1}$$

Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{1.2}$$

В равномерном прямолинейном движении (**v** = const) выполняется соотношение

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t. \tag{1.3}$$

Формулы движения с постоянным ускорением (**a** = const):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \tag{1.4}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость.

В криволинейном движении точки полное ускорение **a** есть векторная сумма тангенциального $\mathbf{a}_\tau$ и нормального $\mathbf{a}_n$ ускорений. Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \tag{1.6}$$

при этом

$$a_\tau = dv/dt, \tag{1.7}$$

$$a_n = v^2/R, \tag{1.8}$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке.

Среднее значение модуля скорости точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ равно

$$\langle v \rangle = \Delta s/\Delta t, \tag{1.9}$$

где Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt*.

Угловая скорость тела есть производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.10}$$

---

* Величину $\langle v \rangle$ часто называют средней скоростью на пути Δs за промежуток времени Δt.

Угловое ускорение тела есть производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.11)$$

В равномерном вращательном движении (ω = const) выполняется соотношение

$$\varphi = \omega t. \qquad (1.12)$$

Формулы равнопеременного вращательного движения тела вокруг неподвижной оси (ε = const):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (1.13)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2. \qquad (1.14)$$

Связь угловых величин с линейными:

$$s = \varphi R,\ v = \omega R,\ a^\tau = \varepsilon R,\ a_n = \omega^2 R, \qquad (1.15)$$

где s — путь, пройденный точкой вращающегося тела (длина дуги), R — расстояние точки от оси вращения (радиус дуги)

Угловая скорость тела, вращающегося равномерно, связана с числом оборотов в секунду n и периодом вращения T соотношением

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T \qquad (1.16)$$

А. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Методические указания

1. Для решения задачи по кинематике надо знать закон (уравнение) движения точки, определяющий ее положение в любой момент времени. В случае равномерного прямолинейного движения такой закон выражается формулой (1.3). Так как при этом модуль вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ точки равен пути s, то формуле (1.3) соответствует скалярное уравнение $s = vt$.

2. Часто в условии задают равномерное прямолинейное движение не одного, а нескольких (обычно двух) тел по отношению к системе отсчета, связанной с Землей, или иной системе отсчета. В таких случаях решение задачи упрощается, если рассматривать все движения в системе отсчета, связанной с одним из движущихся тел (см. задачу № 1-2). Иногда такой выбор системы отсчета необходим (см. задачу № 1-1). При этом полезно иметь в виду, что если тело A движется относительно тела B со скоростью $\mathbf{v}_1$, то, как это следует из относительности движения, тело B движется относительно тела A со скоростью $\mathbf{v}_2$, где

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1. \qquad (1.17)$$

3. Если материальная точка участвует в двух движениях, то ее перемещение $\Delta\mathbf{r}$ равно векторной сумме перемещений, полученных в каждом движении, независимо от того, последовательно или одновременно происходили эти движения:

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2.$$

В последнем случае, разделив обе части уравнения на общий промежуток времени Δt и переходя к пределу, получим согласно (1.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \tag{1.18}$$

т. е. скорость точки в сложном движении равна векторной сумме ее скоростей в отдельных движениях.

Решение задач

1-1. Частица A, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}$, ударяется о массивную стенку B, которая движется в том же направлении со скоростью $\mathbf{u}$ (рис. 1-1). Определить скорость частицы после удара, если известно, что при ударе о стенку B, когда она неподвижна, частица отскакивает, сохраняя скорость по модулю и изменяя ее направление на противоположное.

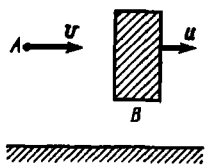

Рис. 1-1

Решение. Условие задачи предполагает скорости движения тел A и B заданными в некоторой системе отсчета, например, связанной с Землей. Но при этом дан закон соударения частицы с *неподвижной* стенкой. Поэтому, для того чтобы решить задачу, необходимо рассмотреть движение частицы в системе отсчета, связанной со стенкой B. В этой системе отсчета стенка будет неподвижной, а движение частицы — сложным, состоящим из двух: относительно Земли со скоростью $\mathbf{v}$ и, как это следует из соотношения (1.17), вместе с Землей относительно стенки со скоростью — $\mathbf{u}$. Поэтому в соответствии с формулой (1.18) скорость частицы относительно стенки равна

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Согласно условию частица отскочит от стенки со скоростью

$$-(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Теперь вернемся к системе отсчета, связанной с Землей, так как в этой системе надо найти скорость частицы после удара. Движение частицы после удара о стенку и в этом случае состоит из двух: относительно стенки со скоростью $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ и вместе со стенкой относительно Земли со скоростью $\mathbf{u}$. Следовательно, искомая скорость

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Отсюда видно, что направление вектора $\mathbf{v}'$ зависит от соотношения модулей векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: 1) если $v < 2u$, то направление скорости частицы после удара сохранится; 2) если $v > 2u$, то изменится на противоположное; 3) если $v = 2u$, то она остановится.

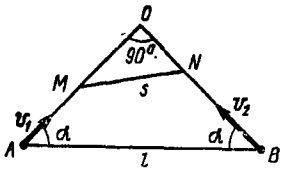

Рис. 1-2

1-2. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми l, одновременно начинают двигаться два корабля со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Векторы скоростей образуют с отрезком AB одинаковые углы $\alpha = 45°$ (рис. 1-2). Считая движение кораблей равномерным и прямолинейным, определить наименьшее расстояние между ними.

Решение. Приведем два способа решения задачи, отличающиеся выбором системы отсчета.

1. Пусть движение кораблей происходит в той системе отсчета (связанной с Землей), в которой заданы их скорости. Сначала расстояние между кораблями будет уменьшаться, затем (если они не столкнутся) — увеличиваться. Чтобы найти наименьшее расстояние $s_{мин}$, применим общий метод исследования функции на экстремум. Для этого рассмотрим положение кораблей спустя произвольный промежуток времени t после начала движения и найдем расстояние между ними как функцию времени. Из чертежа следует:

$$s=\sqrt{(OM)^2+(ON)^2}=\sqrt{(OA-v_1t)^2+(OB-v_2t)^2}.$$

Обозначив $a = OA = OB$, получим

$$s=\sqrt{2a^2-2a(v_1+v_2)t+(v_1^2+v_2^2)t^2}. \qquad (1)$$

Чтобы найти минимум функции $s = s(t)$, продифференцируем ее по времени и приравняем нулю производную:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-2a(v_1+v_2)+2t(v_1^2+v_2^2)}{2\sqrt{2a^2-2a(v_1+v_2)t+(v_1^2+v_2^2)t^2}}=0.$$

Отсюда время, соответствующее наименьшему расстоянию $s_{мин}$, равно

$$t_{мин}=a(v_1+v_2)/(v_1^2+v_2^2).$$

Подставив это значение времени в (1), получим ответ:

$$s_{мин}=\frac{a|v_2-v_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{l|v_2-v_1|}{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2)}}. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует: 1) если $v_1 = v_2$, то $s_{мин} = 0$, т. е., двигаясь с одинаковыми скоростями, корабли встретятся в точке O (рис. 1-2); 2) если $v_1 = 0$ или $v_2 = 0$ (движется только один корабль), то $s_{мин} = a$, т. е. $s = s_{мин}$, когда корабль окажется в точке O.

2. Воспользуемся системой отсчета, связанной с одним из двух кораблей, например с первым. В этой системе отсчета первый корабль будет неподвижен, а движение второго корабля будет сложным: со скоростью $\mathbf{v}_2$ относительно Земли и со скоростью $\mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}_1$ вместе с Землей относительно первого корабля (рис. 1-3). Скорость результирующего движения выразится вектором $\mathbf{v}$, причем

$$v=\sqrt{v_1'^2+v_2^2}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

Минимальным расстоянием между кораблями будет длина перпендикуляра AC, опущенного на направление вектора $\mathbf{v}$. Расчет, основанный на подобии прямоугольных треугольников, приводит к ответу

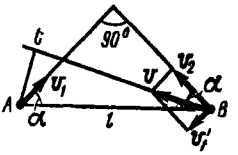

Рис 1-3

$$s_{\text{мин}} = AC = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{2(v_1^2 + v_2^2)}}, \qquad (3)$$

что совпадает с ответом (2), так как в (3) $v_2 > v_1$.

Как видим, второй способ решения, в котором система отсчета привязывается к одному из движущихся тел, значительно проще первого.

Б. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Методические указания

1. Среди задач на неравномерное (переменное) движение большую группу составляют задачи на движение точки с постоянным ускорением $\mathbf{a}$ = const. Если при этом векторы ускорения $\mathbf{a}$ и начальной скорости $\mathbf{v}_0$ лежат на одной прямой, то движение будет прямолинейным. В противном случае точка движется по кривой (параболе) в плоскости, содержащей эти векторы. Движение с постоянным ускорением $\mathbf{a}$ происходит, в частности, под действием силы тяжести: когда сопротивление воздуха пренебрежимо мало, все тела падают вблизи поверхности Земли с одинаковым ускорением, направленным вертикально вниз и равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

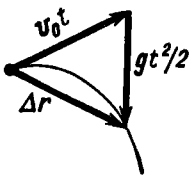

Рис. 1-4

3. Как в прямолинейном, так и в криволинейном движениях с постоянным ускорением скорость $\mathbf{v}$ точки и ее перемещение $\Delta\mathbf{r}$ определяются формулами (1.4), (1.5). На рис. 1-4 вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}$ частицы, брошенной под углом к горизонту, изображен в соответствии с (1.5) в виде суммы векторов $\mathbf{v}_0 t$ и $\mathbf{g}t^2/2$. Отсюда ясен способ *графического* решения задачи на определение скорости $\mathbf{v}$ частицы и ее перемещения $\Delta\mathbf{r}$ в любой момент времени, если известны начальная скорость $\mathbf{v}_0$ и ускорение $\mathbf{a}$.

Однако основным методом решения задач по кинематике (как и по остальным разделам курса физики) является *аналитический* (численный) метод, при котором от векторной формы записи уравнений переходят к скалярной. Для этого выберем прямоугольную систему координат с осями Ox, Oy, лежащими в плоскости, в которой движется частица. Проектируя все векторы, входящие в уравнения (1.4), (1.5) на оси координат, и учитывая, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций, получим четыре скалярных уравнения соответственно для осей Ox и Oy:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ \Delta x &= v_{0x} t + a_x t^2/2; \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a_y t, \\ \Delta y &= v_{0y} t + a_y t^2/2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ — проекции вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$ на оси Ox, Oy, равные приращениям соответствующих координат; v_x, v_y, v_{0x}, v_{0y}, a_x, a_y — проекции векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{a}$ на те же оси. Теперь решение задачи сводится к решению системы уравнений. Например, если неизвестными являются векторы $\mathbf{v}$, $\Delta \mathbf{r}$, то, найдя из уравнений их проекции, легко затем вычислить модули и направления самих векторов.

Выбор осей определяется условием конкретной задачи. При этом надо стремиться к тому, чтобы часть проекций оказалась равной нулю и уравнения упростились бы. Обычно начало координат совмещают с положением точки в начальный момент времени, т. е. полагают $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, а одну из осей, например Oy, направляют вдоль вектора $\mathbf{a}$. Тогда $a_x = 0$, $a_y = a$. Если при этом векторы $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{a}$ лежат на одной прямой (оси Oy), то $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = v_0$, $v_y = v$ и вместо (1.19), (1.20) получим два уравнения прямолинейного равнопеременного движения:

$$v = v_0 + at, \tag{1.21}$$

$$y = v_0 t + at^2/2. \tag{1.22}$$

Хотя величины v, v_0, a, y, входящие в (1.21), (1.22), называют обычно скоростью, ускорением и перемещением, они являются, по существу, проекциями соответствующих векторов на ось Oy, т. е. величинами алгебраическими. Эти проекции равны по модулю самим векторам.

Знаки всех проекций, входящих в уравнения (1.19)—(1.22), определяются правилом: если вектор образует с направлением оси проекций острый угол, его проекция положительна, если этот угол тупой — проекция отрицательна. Если направление искомого вектора заранее неизвестно, то поступают так. Предполагают некоторое направление этого вектора и записывают в уравнениях его проекции со знаками, соответствующими выбранному направлению. Если в ответе получен положительный знак, то составляющая вектора вдоль соответствующей оси направлена так, как было предположено, отрицательный знак говорит об обратном (см. задачи № 1-3, 1-4).

3. Формулы (1.21), (1.22) применимы также к *криволинейному равнопеременному* движению, т. е. с постоянным по модулю тангенциальным ускорением. В этом случае $y = y(t)$ — *криволинейная координата* движущейся точки (длина дуги), отсчитываемая в одну сторону от начальной точки положительной, а в другую — отрицательной; $v = dy/dt$ — скорость, $a = dv/dt$ — тангенциальное ускорение.

4. В общем случае путь s, отсчитываемый вдоль траектории движущейся точки, больше модуля вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}$; лишь для прямолинейного движения, происходящего все время в одном направлении, $s = |\Delta \mathbf{r}|$. Следовательно, координата y в формуле (1.22), равная по модулю вектору перемещения, выражает пройденный путь также лишь в том случае, когда точка движется по прямой все время в одном направлении. Криволинейная координата y (см. п. 3) также выражает пройденный путь только тогда, когда точка движется вдоль кривой в одном направлении. Способ вычисления пути в том случае, когда точка, двигаясь по траектории, изменяет направление своего движения, рассмотрен в задаче № 1-5.

5. В случае *равнопеременного* движения точки (прямолинейного или криволинейного), происходящего все время в *одном направлении*, средняя скорость за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ вычисляется по формуле

$$\langle v \rangle = (v_1 + v_2)/2, \qquad (1.23)$$

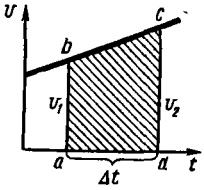

Рис. 1-5

где v_1, v_2 — значения скорости в моменты t_1 и t_2.

Действительно, в этом случае на графике скорости пройденный путь численно равен площади трапеции (трапеции *abcd* на рис. 1-5), поэтому

$$\Delta s = [(v_1 + v_2)/2]\Delta t.$$

Подставив это значение Δs в (1.9), получим формулу (1.23).

Существенно, что в остальных случаях переменного движения формула (1.23) может привести к ошибке. Тогда для вычисления средней скорости применяют общую формулу (1.9).

Решение задач

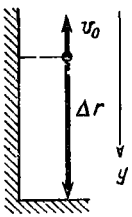

Рис. 1-6

1-3. Мячик, брошенный с балкона в вертикальном направлении, через $t = 3{,}0$ с упал на Землю. Определить начальную скорость мячика, если высота балкона над Землей равна 14,1 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. В условии не указано направление, в котором брошен мяч, — вертикально вниз или вверх. Однако эта неопределенность не является существенной для решения задачи. В любом случае движение мяча будет равнопеременным с ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, а высота балкона над Землей, данная в условии, полностью определяет вектор перемещения $\Delta\mathbf{r}$ мяча (рис. 1-6). Поэтому для решения задачи достаточно воспользоваться формулой (1.22), выражающей модуль этого перемещения.

Предположим, что мяч брошен со скоростью $\mathbf{v}_0$ вертикально вверх. Направим ось проекций y вертикально вниз. Соблюдая правило знаков, получим по (1.22)

$$y = -v_0 t + gt^2/2.$$

Решив уравнение относительно v_0, найдем

$$v_0 = \frac{gt^2 - 2y}{2t} = \frac{9{,}8 \cdot 9{,}0 - 2 \cdot 14{,}1}{2 \cdot 3{,}0}\ \frac{м}{с} = 10\ м/с.$$

Положительный знак величины v_0 показывает, что начальная скорость мяча направлена именно так, как мы предположили, т. е. вертикально вверх.

Замечания: 1. Легко убедиться в том, что выбор положительного направления оси отсчета произволен. Так, направив ось y вверх, получим уравнение

$$-y = v_0 t - gt^2/2,$$

которое, очевидно, равносильно предыдущему.

2. Если предположить, что начальная скорость $\mathbf{v}_0$ направлена вертикально вниз, т. е. по оси y, то будем иметь

$$y = v_0 t + gt^2/2.$$

Решив это уравнение, найдем $v_0 = -10$ м/с. Отрицательный знак показывает, что на самом деле начальная скорость мяча направлена не так, как мы предположили, а вертикально вверх, т. е. пришли к прежнему результату.

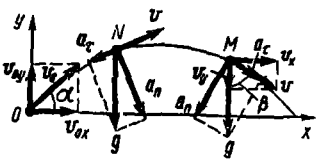

Рис 1-7

1-4. Тело брошено со скоростью $v_0 = 20{,}0$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость тела, а также его нормальное и тангенциальное ускорения через $t = 1{,}50$ с после начала движения. На какое расстояние l переместится за это время тело по горизонтали и на какой окажется высоте h?

Решение. Так как тело движется с постоянным ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, его скорость и перемещение определяются векторными уравнениями (1.4), (1.5) или соответствующими им скалярными уравнениями (1.19), (1.20). Мы не знаем, в какой точке траектории будет тело через 1,50 с после начала движения, — на восходящей или нисходящей ветвях параболы. Предположим, что оно находится в точке M (рис. 1-7).

Введем координатные оси, направленные по горизонтали (Ox) и вертикали (Oy) и совместим начало координат с положением тела в начальный момент времени. Тогда, подставив в уравнения (1.19), (1.20) значения $a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ и учитывая, что проекция скорости тела в точке M на ось Oy направлена вниз, получим:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \tag{1}$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{2}$$

$$-v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \tag{3}$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2. \tag{4}$$

Искомые величины l, h равны соответственно координатам x, y точки M в момент $t \doteq 1{,}50$ с:

$$l = x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 20{,}0 \cdot 0{,}87 \cdot 1{,}50 \text{ м} = 26 \text{ м}.$$

$$h = y = v_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2 = \left[20{,}0 \cdot 0{,}50 \cdot 1{,}50 - \frac{9{,}8 \cdot (1{,}50)^2}{2}\right] \text{ м} = 4{,}0 \text{ м}.$$

Скорость v в точке M найдем через ее проекции, определяемые по формулам (1) и (3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (gt - v_0 \sin\alpha)^2}. \qquad (5)$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$v = \sqrt{20{,}0^2 \cdot 0{,}87^2 + (9{,}8 \cdot 1{,}50 - 20{,}0 \cdot 0{,}50)^2} \text{ м/с} = 17 \text{ м/с}.$$

Для определения нормального и тангенциального ускорений учтем, что полное ускорение тела, движущегося в поле земного тяготения, есть не что иное как ускорение $\mathbf{g}$ силы тяжести. Разложив вектор $\mathbf{g}$ на составляющие по касательному и нормальному направлениям к траектории в точке M, получим (рис. 1-7):

$$a_n = g \sin\beta = g\,(v_x/v),$$

$$a_\tau = g \cos\beta = g\,(v_y/v),$$

где β — угол между вертикалью и касательной к траектории в точке M. Подставим вместо величин v_x, v_y, v их значения из формул (1), (3), (5):

$$a_n = \frac{g v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (gt - v_0 \sin\alpha)^2}}, \qquad (6)$$

$$a_\tau = \frac{g\,(gt - v_0 \sin\alpha)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (gt - v_0 \sin\alpha)^2}}. \qquad (7)$$

Вычисления по формулам (6) и (7) дают:

$$a_n = 9{,}5 \text{ м/с}^2;\ a_\tau = 2{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Положительное значение величины a_τ подтверждает правильность нашего предположения относительно места тела на траектории. Отрицательное значение a_τ свидетельствовало бы, что скорость тела убывает и что, следовательно, оно находится на восходящей ветви параболы.

Замечания: 1. Предположим, что тело находится в данный момент в точке N (рис. 1-7), тогда

$$v_y \doteq v_0 \sin\alpha - gt, \qquad (8)$$

$$a_\tau = \frac{g\,(v_0 \sin\alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}} = -2{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Однако этот результат совпадает с полученным ранее. Дело в том, что в положении N ускорение a_τ направлено против скорости $\mathbf{v}$. Поэтому его отрицательное значение, вычисленное для $t = 1{,}50$ с, свидетельствует

о том, что фактически в этот момент ускорение $\mathbf{a}_\tau$ имеет направление, противоположное тому, которое мы предположили, т. е. в сторону скорости $\mathbf{v}$. Но это значит, что скорость растет, следовательно, тело движется по нисходящей ветви параболы. Таким образом, убеждаемся, что, приступая к решению задачи, можно произвольно задавать положение тела на траектории.

2. Величину a_τ можно найти другим путем, учитывая, что она, согласно формуле (1.7), равна производной от модуля скорости по времени. Подставив в (1.7) вместо скорости ее значение по (5) и выполнив дифференцирование, получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g(gt - v_0 \sin\alpha)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (gt - v_0 \sin\alpha)^2}}$$

независимо от того, будем ли подставлять значение v_y по (3) или по (8). При таком методе нахождения a_τ неравенство $(dv/dt) > 0$ всегда будет означать возрастание скорости и, значит, движение тела по нисходящей ветви параболы. Наоборот, неравенство $(dv/dt) < 0$ будет означать убывание скорости и, следовательно, движение тела по восходящей ветви параболы.

1-5. Точка движется по кривой согласно уравнению $y = 6t - t^3/8$ (длина — в метрах, время — в секундах). Найти среднюю скорость движения точки в промежутке времени от $t_1 = 2{,}0$ с до $t_2 = 6{,}0$ с.

Решение. Так как средняя скорость определяется формулой (1.9), то задача сводится к вычислению пути Δs, пройденного точкой за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. В условии задачи y — криволинейная координата движущейся точки (см. стр. 10).

Если бы точка двигалась по кривой в течение всего промежутка времени Δt в одном направлении, то имело бы место очевидное равенство $\Delta s = |\Delta y|$, где $\Delta y = y_2 - y_1$ — приращение координаты y за Δt. В противном случае $\Delta s > |\Delta y|$. Действительно, если, например, координата y увеличивалась, то после изменения направления движения она начнет уменьшаться, в то время как путь, пройденный телом, продолжает расти. Тогда для нахождения пути Δs надо разбить промежуток времени Δt на такие n промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$, чтобы в течение каждого из них точка двигалась в одном направлении. Вычислив изменение координаты Δy_i, соответствующее каждому из этих промежутков Δt_i, определим путь Δs по формуле

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{i=n} |\Delta y_i|. \qquad (1)$$

Исследуем данную функцию $y = y(t)$. Учтем, что в моменты изменения направления движения точки по траектории скорость обращается в нуль. Поэтому, предположив, что такие моменты t_i' существуют, найдем их из соотношения

$$v = \frac{dy}{dt} = 6 - \frac{3t^2}{8} = 0.$$

Отсюда $t'_{1,2} = \pm 4$ с. Значит, в течение промежутка $t_2 - t_1$ действительно имеется один момент времени $t' = 4{,}0$ с, когда направление движения точки изменяется. Обозначив ее координаты в моменты t_1, t', t_2 соответственно через y_1, y', y_2, получим по формуле (1)

$$\Delta s = |y' - y_1| + |y_2 - y'|. \qquad (2)$$

Из заданного уравнения $y = y(t)$ находим: $y_1 = 11$ м, $y' = 16$ м, $y_2 = 9{,}0$ м. Теперь по формулам (2) и (1.9) получим ответ:

$$\Delta s = (|16 - 11| + |9{,}0 - 16|)\ \text{м} = 12\ \text{м}; \quad \langle v \rangle = \frac{12}{4{,}0}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}0\ \text{м/с}.$$

В. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания

1. Поскольку угловое перемещение φ, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ связаны между собой так же, как и соответствующие им линейные величины $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, методы решения задач на вращательное движение твердого тела во многом совпадают с теми, что были рассмотрены для движения точки. Это относится прежде всего к задачам на равнопеременное вращательное движение тела вокруг неподвижной оси, которое описывается формулами (1.13), (1.14), аналогичными формулам равнопеременного движения точки (1.21), (1.22).

В формулах (1.13), (1.14) величины φ, ω_0, ω, ε — алгебраические. Знак φ определяется направлением поворота тела за время t, а знаки ω, ω_0 — направлением вращения тела в соответствующие моменты времени. Величины ω и ε имеют одинаковые знаки при ускоренном вращении и противоположные — при замедленном. Приступая к решению задачи, можно любое из двух направлений вращения — по часовой стрелке или против — принять за положительное.

2. Если тело одновременно участвует в двух вращательных движениях с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ относительно двух пересекающихся осей, то результирующее движение будет также вращательным с угловой скоростью, равной $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Напомним, что направления вектора угловой скорости и вращения тела связаны правилом правого винта.

Решение задач

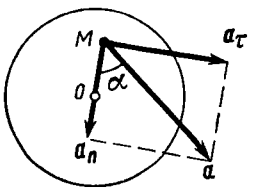

Рис. 1-8

1-6. Маховик вращается равноускоренно. Найти угол α, который составляет вектор полного ускорения $\mathbf{a}$ любой точки маховика с радиусом в тот момент, когда маховик совершит первые $N = 2{,}0$ оборота.

Решение. Разложив вектор **a** точки M на тангенциальное $\mathbf{a}_\tau$ и нормальное $\mathbf{a}_n$ ускорения, видим (рис. 1-8), что искомый угол определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = a_\tau/a_n.$$

Поскольку в условии дано лишь число оборотов, перейдем к угловым величинам, применив формулы (1.15). Тогда получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon r}{\omega^2 r} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (1)$$

Так как маховик вращается равноускоренно, найдем связь между величинами ε и ω с помощью формул равнопеременного вращения (1.13), (1.14), исключив из них время: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$. Поскольку $\omega_0 = 0$, а $\varphi = 2\pi N$, то

$$\omega^2 = 2\varepsilon\cdot 2\pi N = 4\pi N\varepsilon. \qquad (2)$$

Подставив значение ω^2 из (2) в (1), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = 1/(4\pi N) = 0{,}040;\ \alpha = 17'.$$

Замечание. Из ответа видно, что угол, образуемый вектором **a** с радиусом, одинаков для всех точек тела и целиком определяется углом поворота $\varphi = 2\pi N$, т. е. при заданном угле поворота не зависит от промежутка времени, в течение которого произошел этот поворот. При этом в начальный момент времени $N = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, $\alpha = \pi/2$, т. е. вектор **a** направлен по касательной к траектории точки M. Наоборот, при возрастании N угол α убывает (стремясь к нулю при $N \to \infty$).

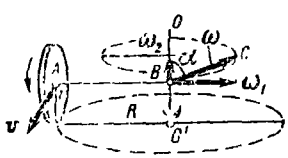

Рис. 1-9

1-7. При движении автомобиля его колесо радиуса $r = 0{,}75$ м катится по окружности радиуса $R = 6{,}00$ м в горизонтальной плоскости. При этом центр колеса движется с постоянной скоростью $v = 1{,}50$ м/с. Определить: 1) угловую скорость и угловое ускорение колеса; 2) угол, образуемый вектором $\boldsymbol{\omega}$ с вертикалью.

Решение. Качение колеса по окружности представим как сумму двух вращательных движений: 1) с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг горизонтальной оси AB (рис. 1-9) и 2) с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ вместе с осью AB вокруг вертикальной оси OO'. Направление векторов $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ на рисунке соответствует правилу правого винта. Результирующий вектор угловой скорости по модулю равен

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \qquad (1)$$

Величины ω_1, ω_2 найдем по второй из формул (1.15). Предварительно определим линейную скорость наружных точек колеса в его вращении вокруг оси AB. Для этого все движения рассмотрим в системе отсчета, связанной с автомобилем. Тогда колесо будет вращаться вокруг неподвижной оси AB, а точки дороги, соприкасающиеся с ко-

лесом, будут в силу относительности движения иметь скорость $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Так как между колесом и дорогой нет скольжения, то его наружные точки также будут иметь скорость $\mathbf{v}'$, равную по модулю v. Таким образом, из (1) и (1.15) получим

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2} = \frac{v}{r}\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}}.$$

Как видно из чертежа, вектор $\boldsymbol{\omega}$ образует с вертикалью угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\omega_1/\omega_2) = \operatorname{arctg}(R/r) = 83^\circ.$$

Чтобы найти угловое ускорение колеса, учтем, что оно согласно определяющей его формуле (1.11), равно скорости изменения вектора $\boldsymbol{\omega}$. Хотя при качении колеса модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$ не изменяется, сам вектор изменяется: он поворачивается около оси OO'. Так как его начало (точка B на рис. 1-9) неподвижно, то скорость изменения $\boldsymbol{\omega}$, т. е. величина ε, равна скорости перемещения конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ — точки C. Точка C опишет окружность радиуса, численно равного ω_1, за время, равное периоду T_2 вращения колеса вокруг оси OO'. Поэтому с учетом (1.16) получим

$$\varepsilon = \frac{2\pi\omega_1}{T_2} = \omega_1\omega_2 = \frac{v^2}{rR} = 0{,}50 \text{ рад/с}^2.$$

§ 2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Основные формулы

Второй закон Ньютона для материальной точки постоянной массы

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{2.1}$$

где $\Sigma\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к телу, m и $\mathbf{a}$ — его масса и ускорение.

Закон трения скольжения: сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления между поверхностями трущихся тел, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{2.2}$$

где μ — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств поверхностей.

В неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно инерциальной системы, второй закон Ньютона имеет вид

$$\Sigma\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}} = m\mathbf{a}, \tag{2.3}$$

где $\Sigma\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на данное тело со стороны других тел, $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0$ — сила инерции, $\mathbf{a}$ — ускорение тела в неинерциальной системе отсчета.

А. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И УПРУГИХ СИЛ

Методические указания

1. Важно помнить, что второй закон Ньютона, выражаемый уравнением (2.1), справедлив только в инерциальных системах отсчета. В подавляющем большинстве задач, в которых рассматривают дви-