лесом, будут в силу относительности движения иметь скорость $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Так как между колесом и дорогой нет скольжения, то его наружные точки также будут иметь скорость $\mathbf{v}'$, равную по модулю v. Таким образом, из (1) и (1.15) получим

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2} = \frac{v}{r}\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}}.$$

Как видно из чертежа, вектор $\boldsymbol{\omega}$ образует с вертикалью угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\omega_1/\omega_2) = \operatorname{arctg}(R/r) = 83^\circ.$$

Чтобы найти угловое ускорение колеса, учтем, что оно согласно определяющей его формуле (1.11), равно скорости изменения вектора $\boldsymbol{\omega}$. Хотя при качении колеса модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$ не изменяется, сам вектор изменяется: он поворачивается около оси OO'. Так как его начало (точка B на рис. 1-9) неподвижно, то скорость изменения $\boldsymbol{\omega}$, т. е. величина ε, равна скорости перемещения конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ — точки C. Точка C опишет окружность радиуса, численно равного ω_1, за время, равное периоду T_2 вращения колеса вокруг оси OO'. Поэтому с учетом (1.16) получим

$$\varepsilon = \frac{2\pi\omega_1}{T_2} = \omega_1\omega_2 = \frac{v^2}{rR} = 0{,}50 \text{ рад/с}^2.$$

§ 2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Основные формулы

Второй закон Ньютона для материальной точки постоянной массы

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{2.1}$$

где $\Sigma\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к телу, m и $\mathbf{a}$ — его масса и ускорение.

Закон трения скольжения: сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления между поверхностями трущихся тел, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \tag{2.2}$$

где μ — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств поверхностей.

В неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно инерциальной системы, второй закон Ньютона имеет вид

$$\Sigma\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}} = m\mathbf{a}, \tag{2.3}$$

где $\Sigma\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на данное тело со стороны других тел, $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0$ — сила инерции, $\mathbf{a}$ — ускорение тела в неинерциальной системе отсчета.

А. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И УПРУГИХ СИЛ

Методические указания

1. Важно помнить, что второй закон Ньютона, выражаемый уравнением (2.1), справедлив только в инерциальных системах отсчета. В подавляющем большинстве задач, в которых рассматривают дви-

жение тел относительно поверхности Земли, систему отсчета, связанную с Землей, можно считать практически инерциальной. Тогда следует считать инерциальной и всякую другую систему отсчета, которая движется поступательно и без ускорения относительно Земли.

2. Сила тяжести, согласно ее определению (см., например, [4]), равна $m\mathbf{g}$, где m — масса тела, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения в системе отсчета, связанной с Землей. Вследствие суточного вращения Земли сила тяжести немного отличается от силы, с которой тело притягивается к Земле. Однако при решении задач этим различием обычно пренебрегают, полагая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной.

3. Во многих задачах динамики можно пренебречь силами трения, возникающими при движении тел, и считать тогда, что тела находятся лишь под действием силы тяжести и упругих сил реакции связей (давлений опор, натяжений нитей и т. д.). Здесь, как и в остальных разделах § 2, ограничимся лишь теми случаями, когда размеры тел оказываются несущественными для решения задачи, т. е. будем рассматривать тела как материальные точки.

4. Для решения задач динамики составляется уравнение движения материальной точки, выражающее второй закон Ньютона (2.1). При этом рекомендуется следующий порядок действий:

а) сделать чертеж и на нем изобразить все силы, действующие на данное тело.

Выражение «на тело действует сила» всегда означает, что данное тело взаимодействует с другим телом, в результате чего приобретает ускорение. Следовательно, к данному телу всегда приложено столько сил, сколько имеется других тел, с которыми оно взаимодействует.

Чтобы правильно определить направление сил, действующих на тело, надо помнить, что сила тяжести направлена вниз по линии отвеса, сила реакции опоры при отсутствии трения — по нормали к соприкасающимся поверхностям в точке их касания в сторону тела, сила натяжения нити — вдоль нити в сторону точки подвеса;

б) записать второй закон Ньютона в векторной форме (2.1),

в) если силы действуют не по одной прямой, то выбирают две взаимно перпендикулярные оси (два направления) x и y, лежащие в плоскости действия сил*. Спроектировав все векторы, входящие в уравнение (2.1), на эти оси, записывают второй закон в виде двух скалярных уравнений:

$$\Sigma F_x = ma_x, \quad \Sigma F_y = ma_y. \tag{1}$$

В случае прямолинейного движения одну из осей (x) направляют вдоль ускорения $\mathbf{a}$, а другую (y) — перпендикулярно вектору $\mathbf{a}$. Тогда $a_x = a$, $a_y = 0$ и уравнения (1) упрощаются:

$$\Sigma F_x = ma, \quad \Sigma F_y = 0. \tag{2}$$

В более общем случае криволинейного движения одну ось направляют вдоль тангенциального ускорения $\mathbf{a}$ (т. е. по касательной к кривой), другую — вдоль нормального ускорения $\mathbf{a}_n$.

---

* В курсе общей физики рассматривают, как правило, лишь плоские системы сил.

Если все силы, действующие на тело, лежат на одной прямой и, следовательно, вдоль этой прямой направлен вектор **a**, то, выбрав ее за ось проекций и направив в сторону вектора **a**, сразу записывают второй закон в скалярной форме:

$$\Sigma F = ma, \tag{3}$$

где ΣF — сумма проекций сил, действующих на тело.

Знаки всех проекций в уравнениях (1)—(3) определяются правилом, изложенным на стр. 10.

5. Если в задаче рассматривается движение системы связанных между собой тел, то уравнение движения записывают для каждого тела в отдельности. Кроме того, записывают уравнения, выражающие так называемые кинематические условия, связывающие ускорения отдельных тел системы (например, равенство по модулю ускорений двух грузов, висящих на нерастяжимой нити, перекинутой через блок). Таким образом, получают систему уравнения, число которых равно числу неизвестных.

Если тела связаны нитью, массой которой можно пренебречь, то силу натяжения нити считают одинаковой по всей ее длине. Действительно, предположив, что на участок нити длиной Δl действуют со стороны соседних частей силы $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, запишем по второму закону Ньютона

$$T_1 - T_2 = \Delta ma,$$

где Δm — масса рассматриваемого участка нити. Полагая $\Delta m = 0$, получим $T_1 = T_2$. Если нить перекинута через блок, то равенство $T_1 = T_2$ выполняется только в том случае, когда можно пренебречь массами нити и блока, а также силами трения, возникающими при вращении блока.

Решение задач

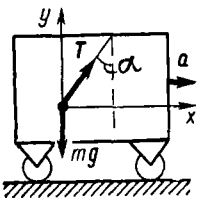

Рис 2 1

2-1. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a = 3{,}0$ м/с^2, висит на проволоке груз массой $m = 2{,}00$ кг. Определить силу натяжения T проволоки и угол α ее отклонения от вертикали, если груз неподвижен относительно вагона.

Решение. На груз действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения **T** проволоки (рис. 2-1). Так как груз неподвижен относительно вагона, его ускорение равно ускорению вагона. При этом нить должна быть отклоненной от вертикали назад, так как только в этом случае равнодействующая сил $m\mathbf{g}$ и **T** будет направлена вперед, сообщая

грузу ускорение **a**. Второй закон Ньютона (2.1) в применении к грузу выразится уравнением

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}.$$

Проектируя векторы $m\mathbf{g}$, $\mathbf{T}$, $m\mathbf{a}$ на оси x и y (рис. 2-1), получим соответственно два скалярных уравнения:

$$T \sin \alpha = ma, \quad T \cos \alpha - mg = 0.$$

Совместное решение этих уравнений и последующее вычисление дают:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(a/g), \quad T = m\sqrt{a^2 + g^2};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3{,}0}{9{,}8} = \operatorname{arctg} 0{,}31 = 17^\circ,$$

$$T = 2{,}0\sqrt{(3{,}0)^2 + (9{,}8)^2}\ \text{Н} = 21\ \text{Н}.$$

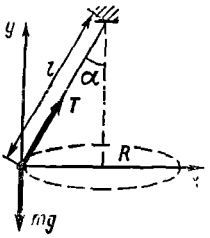

Рис. 2-2

2-2. Груз массой $m = 45$ кг вращается на канате длиной $l = 5{,}0$ м в горизонтальной плоскости, совершая $n = 16{,}0$ об/мин. Какой угол α с вертикалью образует канат и какова сила его натяжения?

Решение. На груз действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения $\mathbf{T}$ каната (рис. 2-2). По второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}. \tag{1}$$

Так как движение по окружности происходит здесь с постоянной по модулю скоростью, то полное ускорение тела есть нормальное ускорение $\mathbf{a}_n$, направленное к центру окружности радиуса R:

$$a = a_n = (v^2/R) = 4\pi^2 n^2 R.$$

Выберем оси x и y так, чтобы одна из них была направлена в сторону ускорения (рис. 2-2). Проектируя векторы, входящие в уравнение (1) на эти оси, получим:

$$T \sin \alpha = m \cdot 4\pi^2 n^2 R, \tag{2}$$

$$T \cos \alpha - mg = 0. \tag{3}$$

Из чертежа видно, что $R = l \sin \alpha$. Решив совместно уравнения (2), (3) с учетом последнего равенства, имеем

$$T = 4\pi^2 n^2 l m; \ \alpha = \arccos(g/4\pi^2 n^2 l).$$

Подставив числовые значения величин в единицах СИ и выполнив вычисление, находим:

$$T = 0{,}63\ \text{кН}, \ \cos \alpha = 0{,}71, \ \alpha = 45^\circ.$$

Замечание. Решения двух последних задач имеют много общего: движение тел в обоих случаях происходит под действием сил одинаковой природы и сходных по направлению. Различие в движениях тел объясняется лишь тем, что в одном случае равнодействующая приложенных сил направлена вдоль скорости тела (прямолинейное движение), в другом — равнодействующая, будучи постоянной по модулю, направлена под прямым углом к скорости (равномерное движение по окружности).

Более сложные задачи на неравномерное движение по окружности рассмотрены в § 3 «Законы сохранения», так как решение этих задач весьма упрощается благодаря применению кроме законов Ньютона закона сохранения энергии.

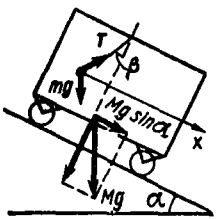

Рис. 2-3

2-3. В вагоне укреплен отвес (шарик массой m на нити). Какое направление примет отвес, когда вагон будет скатываться без трения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 2-3)? Считать, что отвес неподвижен относительно вагона.

Решение. Предположим, что отвес составляет с нормалью к наклонной плоскости искомый угол β (рис. 2-3). На шарик действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения $\mathbf{T}$ нити. По второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение шарика, равное ускорению вагона. Так как вагону сообщает ускорение составляющая его силы тяжести, направленная вдоль наклонной плоскости и равная $Mg \sin \alpha$, где M — масса вагона, то, по второму закону Ньютона, ускорение вагона

$$a = \frac{Mg \sin \alpha}{M} = g \sin \alpha. \tag{2}$$

Выберем ось проекций x, направив ее вдоль ускорения $\mathbf{a}$. Тогда вместо векторного уравнения (1) с учетом (2) получим

$$mg \sin \alpha + T \sin \beta = mg \sin \alpha,$$

отсюда

$$T \sin \beta = 0. \tag{3}$$

Так как $T \neq 0$ (одна лишь сила тяжести не может сообщить шарику ускорение $g \sin \alpha$), то из (3) имеем

$$\sin \beta = 0, \quad \beta = 0.$$

Таким образом, при спуске вагона отвес расположен по нормали к наклонной плоскости.

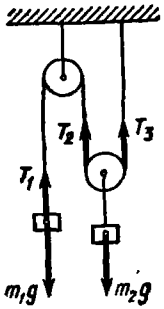

Рис. 2-4

2-4. Определить ускорения a_1 и a_2, с которыми движутся грузы m_1 и m_2 в установке, изображенной на рис. 2-4, а также силу натяжения T нити. Трением и массой блоков пренебречь. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

Решение. На груз m_1 действуют силы тяжести $m_1\mathbf{g}$ и сила натяжения $\mathbf{T}_1$ нити, на груз m_2 — сила тяжести $m_2\mathbf{g}$ и силы натяжения $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ нитей. При этом $T_1 = T_2 = T_3 = T$ (см. указания на стр. 19). Поскольку все силы направлены по вертикали, запишем уравнения, выражающие второй закон Ньютона, применительно к грузам сразу в скалярном виде, выбрав положительным направление вниз и предположив, что ускорение груза m_1 направлено вниз и, следовательно, ускорение груза m_2 — вверх:

$$m_1g - T = m_1a_1, \tag{1}$$

$$m_2g - 2T = -m_2a_2. \tag{2}$$

Рассматривая кинематическую схему установки и учитывая условие нерастяжимости нити, запишем соотношение между модулями перемещений грузов, происходящих за одно и то же время: $s_1 = 2s_2$. Очевидно, такое же соотношение существует и между модулями ускорений грузов:

$$a_1 = 2a_2. \tag{3}$$

Решив совместно уравнения (1), (2), (3), получим:

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}g; \quad a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g; \quad T = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

Отсюда следует: 1) если $2m_1 > m_2$, то $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, т. е. ускорения грузов направлены так, как мы предположили; 2) если $2m_1 = m_2$, то $a_1 = a_2 = 0$ — грузы покоятся или движутся равномерно; 3) если $2m_1 < m_2$, то $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. В этом случае ускорение груза m_1 направлено вверх, ускорение груза a_2 — вниз.

Замечание. Во всех трех случаях направления скоростей грузов остаются неопределенными, так как они зависят от направлений начальных скоростей и времени движения. Например, при $2m_1 > m_2$ груз m_1 может двигаться ускоренно вниз или замедленно вверх. В обоих случаях вектор $\mathbf{a}_1$ направлен вниз.

Методические указания

1. При движении тела по поверхности какого-либо другого тела между ними возникает взаимодействие, при этом к первому телу оказывается приложенной сила **R** (рис. 2-5), которую называют силой реакции опоры. Во всех реальных случаях эта сила направлена не по нормали к соприкасающимся поверхностям, а отклонена от нее в сторону, противоположную скорости **v** движения тела. Разложив силу **R** на составляющие по нормали и по касательной к соприкасающимся поверхностям, получим $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр}$, где **N** — сила нормального давления, $\mathbf{F}_{тр}$ — сила трения. Таким образом, сила трения является, по существу, одной из составляющих силы реакции опоры.

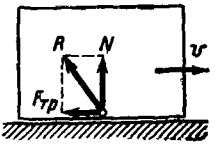

Рис. 2-5

2. Сила трения скольжения подчиняется закону трения скольжения (2.2) и направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости тела. Появление силы трения не может изменить направление относительной скорости тела: в крайнем случае под действием силы трения тело остановится и тогда сила трения скольжения исчезнет. Этим обстоятельством пользуются в тех задачах, где заранее неизвестно направление движения тела (см. задачу № 2-6).

3. Сила трения покоя $F_{пок}$ всегда равна по модулю и противоположна по направлению той силе, которая должна была бы вызвать скольжение. Поэтому сила $F_{пок}$ есть величина переменная даже при постоянном значении силы N. Однако она имеет предел — величину $F_{пок\ макс}$, определяемую законом трения покоя: $F_{пок\ макс} = \mu_0 N$, где μ_0 — коэффициент трения покоя. Решая задачи, мы будем приближенно считать $\mu_0 = \mu$, т. е. будем полагать максимальное значение силы трения покоя равной силе трения скольжения.

Решение задач

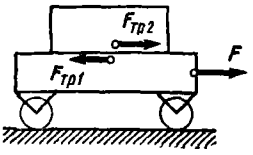

Рис. 2-6

2-5. Тележку массой $M = 20{,}0$ кг, на которой лежит груз массой $m = 10{,}0$ кг, тянут с силой F, направленной горизонтально (рис. 2-6). Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu = 0{,}100$. Пренебрегая трением между тележкой и опорой, найти ускорения тележки a_1 и груза a_2, а также силу трения между грузом и тележкой в двух случаях: 1) $F = 2{,}00$ кгс, 2) $F = 6{,}00$ кгс.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на оба тела. При этом, поскольку их ускорения направлены по горизонтали, достаточно учитывать лишь силы, действующие горизонтально, так как остальные — направленные по вертикали — заведомо уравновешиваются.

На тележку действуют сила **F** и сила со стороны груза $\mathbf{F}_{тр1}$. Последняя направлена против скорости тележки относительно груза при трении скольжения или против силы **F** при трении покоя, т. е. в любом случае сила $\mathbf{F}_{тр1}$ направлена влево (рис. 2-6). На груз действует сила трения со стороны тележки $\mathbf{F}_{тр2}$, направленная, согласно третьему закону Ньютона, вправо, причем по модулю $F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр}$. Направив ось проекций в сторону ускорения, т. е. по горизонтали вправо, запишем в скалярном виде уравнения движения тележки и груза:

$$F - F_{тр} = Ma_1, \tag{1}$$

$$F_{тр} = ma_2 \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) содержат три неизвестных. Чтобы получить еще одно уравнение, выясним характер силы трения между тележкой и грузом. Если тележка выскальзывает из-под груза, то между ними действует сила трения скольжения, подчиняющаяся закону (2.2). Так как в данном случае сила N равна по модулю силе тяжести груза, то

$$F_{тр} = \mu mg. \tag{3а}$$

Если же тележка и груз двигаются как одно целое, то между ними действует сила трения покоя $F_{пок} \neq \mu mg$. Однако в этом случае выполняется равенство

$$a_1 = a_2. \tag{3б}$$

Таким образом, в обоих возможных случаях получим систему трех уравнений.

Итак, необходимо выяснить характер сил трения, действующих между телами. Рассмотрим подробнее оба возможных варианта:

а) тележка выскальзывает из-под груза. Между ними действует сила трения скольжения, которую найдем по формуле (3а):

$$F_{тр} = 0{,}100 \cdot 10{,}0 \cdot 9{,}8 \text{ Н} = 9{,}8 \text{ Н};$$

б) тележка и груз движутся как одно целое, удерживаемые трением покоя. Тогда, обозначив $a_1 = a_2 = a$, запишем систему уравнений (1), (2) в виде

$$F - F_{пок} = Ma, \; F_{пок} = ma.$$

Решив эту систему, получим

$$a = F/(M + m), \tag{4}$$

$$F_{пок} = Fm/(M + m). \tag{5}$$

Формула (5) выражает пропорциональную зависимость между F и $F_{пок}$. Однако значение $F_{пок}$ имеет предел, равный силе $F_{тр}$, которая уже найдена. Поэтому в действительности два тела будут двигаться как одно целое лишь при таких значениях силы F, при которых значение $F_{пок}$, определяемое по (5), не будет превышать ее предельного значения. Проделав расчеты, получим:

1) если $F = 2{,}00$ кгс $= 19{,}6$ Н, то $F_{пок} = 6{,}5$ Н;

2) если $F = 6{,}00$ кгс $= 58{,}8$ Н, то $F_{пок} = 19$ Н, что невозможно, ибо предельное значение $F_{пок}$ равно 9,8 Н. Значит, в этом случае между телами будет действовать трение скольжения.

Теперь легко ответить на все вопросы задачи:

1) $F = 19{,}6$ Н. Между телами действует сила трения покоя $F_{пок} = 6{,}5$ Н. Из формулы (4) находим $a = 0{,}65$ м/с^2;

2) $F = 58{,}8$ Н. Между телами действует сила трения скольжения $F_{тр} = 9{,}8$ Н. Из (1) и (2) находим ускорения тел: $a_1 = 2{,}5$ м/с^2, $a_2 = 0{,}98$ м/с^2.

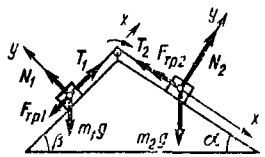

Рис. 2-7

2-6. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$, укреплен блок (рис. 2-7). Грузы $m_1 = 1{,}00$ кг, и $m_2 = 2{,}00$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение a, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонных плоскостей, и силу натяжения T нити. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать. Рассмотреть случаи: 1) $\mu = 0{,}10$, 2) $\mu = 0{,}20$.

Решение. На каждый из грузов действуют четыре силы: сила тяжести, сила нормального давления **N** опоры, сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ и сила натяжения **T** нити. В этой задаче мы заранее не знаем направления сил трения и, следовательно, не можем сразу приступить к составлению уравнений движения грузов в скалярной форме. В самом деле, сила трения направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости движущегося тела. Но куда движутся грузы — неизвестно.

Воспользуемся тем правилом, что сила трения, возникающая при движении тела, не может изменить направления его относительной скорости. Выясним направление движения грузов, предположив, что трение отсутствует. Так как в этом случае ускорение грузов определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль соответствующих плоскостей, то найдем эти составляющие:

$$m_1 g \sin\beta = 1{,}00 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 \text{ Н} = 6{,}9 \text{ Н},$$

$$m_2 g \sin\alpha = 2{,}00 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50 \text{ Н} = 9{,}8 \text{ Н}.$$

Так как $m_1 g \sin\beta < m_2 g \sin\alpha$, то груз m_1 будет двигаться по наклонной плоскости вверх, груз m_2 — вниз. А поскольку силы трения не могут изменить направление движения тел, то и при наличии трения грузы будут двигаться так же.

Теперь приступим к составлению уравнений движения грузов. Выбрав для каждого груза оси проекций x и y так, чтобы одна из осей была направлена вдоль ускорения (рис. 2-7), запишем для каждого груза m_1 и m_2 в проекциях на оси соответственно по два скалярных

уравнения (учитывая при этом, что $T_1 = T_2 = T$, см. указания на стр. 19):

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin\beta - F_{тр1} = m_1 a, \\ N_1 - m_1 g \cos\beta = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_2 g \sin\alpha - T - F_{тр2} = m_2 a, \\ N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, по закону трения скольжения,

$$F_{тр1} = \mu N_1, \; F_{тр2} = \mu N_2. \quad (3)$$

Систему уравнений (1) — (3) с неизвестными a, T, N_1, N_2, $F_{тр1}$, $F_{тр2}$ преобразуем в систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin\beta - \mu m_1 \cos\beta = m_1 a, \\ m_2 g \sin\alpha - T - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 a, \end{cases} \quad (4)$$

в которой два неизвестных: a и T. Решив эту систему, получим:

$$a = [m_2 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - m_1 (\sin\beta + \mu \cos\beta)] g/(m_1 + m_2), \quad (5)$$

$$T = [\sin\alpha + \sin\beta - \mu(\cos\alpha - \cos\beta)] m_1 m_2 g/(m_1 + m_2). \quad (6)$$

Подставив в формулы (5) и (6) числовые данные для первого случая ($\mu = 0{,}10$), получим:

$$a = 0{,}18 \text{ м/с}^2, \; T = 7{,}9 \text{ Н}.$$

Для второго случая ($\mu = 0{,}20$) из формулы (5) имеем

$$a = -0{,}19 \text{ м/с}^2.$$

Прежде чем выполнять дальнейшие расчеты, проанализируем полученный результат. Отрицательное значение ускорения показывает, что при $\mu = 0{,}20$ направления движения грузов противоположны тем, что были бы при отсутствии трения (при этом учитываем, что в обоих случаях начальные скорости грузов равны нулю). Но этого не может быть, так как сила трения не в состоянии изменить направление движения тела. Таким образом, получен неверный ответ для ускорения. Следовательно, система уравнений (1)—(3) не соответствует действительности при $\mu = 0{,}20$. Единственной ошибкой, которую мы могли здесь допустить, является предположение о том, что грузы находятся в состоянии движения и между ними и плоскостями действуют силы трения скольжения [это отражено в уравнениях (3)]. Следовательно, на самом деле при $\mu = 0{,}20$ грузы находятся в состоянии покоя, удерживаемые силами трения покоя, для которых соотношения (3) несправедливы. Итак, $a = 0$ при $\mu = 0{,}20$.

Теперь вместо системы (4) получим систему

$$T - m_1 g \sin\beta - F_{пок1} = 0,$$

$$m_2 g \sin\alpha - T - F_{пок2} = 0,$$

в которой неизвестны T, $F_{пок1}$, $F_{пок2}$ и которая, очевидно, не имеет единственного решения для T. Задача стала неопределенной: величина T теперь зависит от некоторых дополнительных обстоятельств, не указанных в условии, а именно от того, каким образом грузы были помещены в положение, изображенное на рис. 2-7.

В. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Методические указания

1. В задачах, в которых идет речь о физических явлениях, происходящих внутри ускоренно движущегося тела (вагона, лифта, куска металла и т. д.), решение, основанное на применении второго закона Ньютона, упрощается, если рассматривать явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся телом. Соответственно двум движениям тела — поступательному и вращательному — применяют как поступательно движущиеся, так и вращающиеся неинерциальные системы отсчета. В поступательно движущихся неинерциальных системах отсчета второй закон Ньютона выражается уравнением (2.3).

Это же уравнение применимо и во вращающихся системах отсчета при условии, что рассматриваемая материальная точка (частица) в ней покоится. Тогда в выражении (2.3) $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_n$ — центростремительное ускорение той точки вращающейся системы отсчета, в которой находится данная частица; величину $\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}_n$ называют центробежной силой инерции.

Сила инерции, входящая в уравнение (2.3), отличается от других сил тем, что она существует только в неинерциальной системе отсчета и для нее нельзя указать тех конкретных тел, со стороны которых она действует.

2. Существует другой способ объяснить поведение тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно (или вращающейся, если рассматриваемая материальная точка в ней покоится). При этом никаких сил инерции не вводят, но считают, что происходит изменение поля тяготения: ускорение силы тяжести* изменяется по модулю и направлению и вместо $\boldsymbol{g}$ становится равным $\boldsymbol{g}'$, причем

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} + (-\mathbf{a}_0), \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{a}_0$ — ускорение той точки неинерциальной системы отсчета (относительно инерциальной), в которой находится данная частица (рис. 2-8).

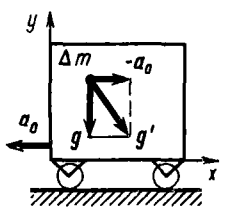

Рис. 2.8

На рисунке: $\mathbf{a}_0$ — ускорение вагона относительно Земли, $\boldsymbol{g}'$ — ускорение частицы Δm относительно вагона. В системе отсчета, связанной с вагоном, поле тяготения таково, что линия отвеса (направление вектора $\boldsymbol{g}'$) оказывается наклоненной к полу вагона, а сила тяжести отличается от той, что была в неподвижном вагоне.

* Правильнее в этом случае величину $\boldsymbol{g}$ называть напряженностью поля тяготения (см § 5).

Этот метод объяснения поведения тел в неинерциальных системах отсчета получил обоснование в общей теории относительности.

3. Из двух рассмотренных методов второй гораздо быстрее приводит к цели в тех случаях, когда искомая величина определяется в инерциальной системе отсчета какой-либо известной формулой, содержащей ускорение силы тяжести. Тогда достаточно принять это ускорение равным величине g', выражаемой уравнением (2.4), и произвести необходимые вычисления. Сюда относятся задачи на распределение давления в жидкости или газе в ускоренно движущихся сосудах (см. задачу № 6-4), на колебания математического или физического маятника в ускоряемых кабинах и т. п.

Решение задач

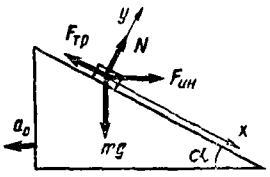

Рис 2 9

2-7. Тело массой m, находящееся на вершине наклонной плоскости, удерживается силой трения. За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a_0 = 1{,}00$ м/с² (рис. 2-9)? Длина плоскости $l = 1{,}00$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}60$.

Решение. Выберем систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. Пока плоскость покоится, на тело действуют три силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила нормального давления $\mathbf{N}$ опоры и сила трения покоя $\mathbf{F}_{пок}$, которые уравновешивают друг друга. Как только начнется ускоренное движение плоскости и «привязанная» к ней система отсчета станет неинерциальной, появится четвертая сила, действующая на тело, — сила инерции $\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}_0$. Равновесие нарушится и тело начнет скользить вниз по наклонной плоскости с ускорением $\mathbf{a}$. Так как искомое время определяется известной формулой пути равноускоренного движения без начальной скорости

$$t = \sqrt{2l/a}, \tag{1}$$

то надо найти ускорение $\mathbf{a}$. Для этого запишем второй закон Ньютона в нашей неинерциальной системе отсчета:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_{ин} = m\mathbf{a}. \tag{2}$$

Выберем оси проекций, как показано на рисунке. Проектируя все векторы, входящие в уравнение (2), на оси x и y, получим соответственно два скалярных уравнения:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} + ma_0\cos\alpha = ma, \tag{3}$$

$$-mg\cos\alpha + N + ma_0\sin\alpha = 0. \tag{4}$$

Решив систему (3), (4) с учетом $F_{тр} = \mu N$, найдем ускорение

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Теперь по формуле (1) имеем

$$t=\sqrt{2l\,[g\,(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)+a_0\,(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)]^{-1}}.$$

Подставив числовые значения величин, найдем

$$t = 0{,}8 \text{ с}$$

Итак, рассмотрев поведение тела в неинерциальной системе отсчета и введя силу инерции, мы свели дело к простой задаче, решаемой стандартным методом динамики. Решение же в инерциальной системе отсчета оказалось бы значительно более трудным.

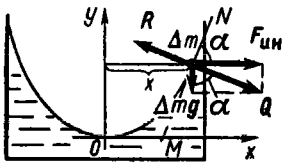

Рис. 2-10

2-8. Сосуд с жидкостью вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить форму поверхности жидкости.

Решение. Каждая точка вращающегося сосуда с жидкостью имеет ускорение, направленное к оси вращения и равное $a_0 = \omega^2 x$, где x — расстояние точки от оси вращения. Рассмотрим явление в неинерциальной системе отсчета, «привязанной» к вращающемуся сосуду. В ней жидкость будет неподвижной. Решим задачу двумя способами, соответствующими двум методам объяснения поведения тела в неинерциальной системе отсчета:

1. На частицу жидкости массой Δm, лежащую на поверхности на расстоянии x от оси вращения, действуют три силы: 1) сила тяжести $\Delta m\mathbf{g}$, 2) центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{ин}=-\Delta m\mathbf{a}_0$, 3) сила реакции $\mathbf{R}$ соседних частиц жидкости (рис. 2-10). Равнодействующая внешних сил, действующих на частицу Δm покоящейся жидкости, должна быть направлена по нормали к поверхности жидкости в данной точке (здесь внешними являются силы $\Delta m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}_{ин}$, а сила $\mathbf{Q}$ — их равнодействующая). В противном случае существовала бы направленная по касательной MN составляющая силы $\mathbf{Q}$, которая вызвала бы скольжение частицы по поверхности жидкости.

Отсюда можно найти угол α наклона касательной MN к линии горизонта (оси Ox). Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta m a_0}{\Delta m g}=\frac{\omega^2 x}{g}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = (dy/dx)$, получим дифференциальное уравнение кривой, вращение которой вокруг оси Oy образует поверхность жидкости:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2}{g}\,x,$$

откуда

$$y=\frac{\omega^2}{2g}\,x^2+C. \qquad (1)$$

Очевидно, при данном выборе оси Ox постоянная $C = 0$.

Из (1) следует, что кривая на рис. 2-10 — парабола. Следовательно, поверхность жидкости является параболоидом вращения.

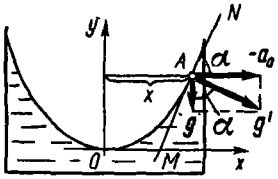

Рис. 2-11

2. Не будем вводить сил инерции, но учтем, что при вращении сосуда в связанной с ним системе отсчета изменяется поле тяготения. При этом «новое» ускорение силы тяжести $\mathbf{g}'$ выражается через «старое» ускорение $\mathbf{g}$ соотношением (2.4): $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_0)$.

Выберем точку A поверхности жидкости, расположенную на расстоянии x от оси вращения (рис. 2-11). Пусть векторы $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{g}$ образуют в этой точке угол α. Так как поверхность покоящейся жидкости всегда нормальна к направлению силы тяжести, то, как видно из чертежа, между касательной MN и линией горизонта (осью Ox) также будет угол α, при этом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Дальнейший ход решения совпадает с тем, что получен при первом способе.

§ 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Основные формулы

Импульс (количество движения) материальной точки есть векторная величина

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{3.1}$$

Импульс системы материальных точек равен (по определению) векторной сумме импульсов всех частиц, образующих систему:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i. \tag{3.2}$$

Центром инерции системы материальных точек называется точка C, положение которой в пространстве определяется радиусом-вектором, имеющим начало в произвольной точке O и равным

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{3.3}$$

Здесь m_i — масса i-й материальной точки, $\mathbf{r}_i$ — ее радиус-вектор с началом в той же точке O, M — масса всей системы

Импульс системы материальных точек равен произведению массы M системы на скорость движения $\mathbf{v}_C$ ее центра инерции:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C. \tag{3.4}$$

Систему взаимодействующих тел называют замкнутой, если на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы есть величина постоянная, т. е.

$$\mathbf{p} = \text{const}. \tag{3.5}$$