Очевидно, при данном выборе оси Ox постоянная $C = 0$.

Из (1) следует, что кривая на рис. 2-10 — парабола. Следовательно, поверхность жидкости является параболоидом вращения.

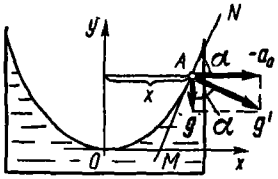

Рис. 2-11

2. Не будем вводить сил инерции, но учтем, что при вращении сосуда в связанной с ним системе отсчета изменяется поле тяготения. При этом «новое» ускорение силы тяжести $\mathbf{g}'$ выражается через «старое» ускорение $\mathbf{g}$ соотношением (2.4): $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_0)$.

Выберем точку A поверхности жидкости, расположенную на расстоянии x от оси вращения (рис. 2-11). Пусть векторы $\mathbf{g}'$ и $\mathbf{g}$ образуют в этой точке угол α. Так как поверхность покоящейся жидкости всегда нормальна к направлению силы тяжести, то, как видно из чертежа, между касательной MN и линией горизонта (осью Ox) также будет угол α, при этом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Дальнейший ход решения совпадает с тем, что получен при первом способе.

§ 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Основные формулы

Импульс (количество движения) материальной точки есть векторная величина

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{3.1}$$

Импульс системы материальных точек равен (по определению) векторной сумме импульсов всех частиц, образующих систему:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i. \tag{3.2}$$

Центром инерции системы материальных точек называется точка C, положение которой в пространстве определяется радиусом-вектором, имеющим начало в произвольной точке O и равным

$$\mathbf{r}_C = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{3.3}$$

Здесь m_i — масса i-й материальной точки, $\mathbf{r}_i$ — ее радиус-вектор с началом в той же точке O, M — масса всей системы

Импульс системы материальных точек равен произведению массы M системы на скорость движения $\mathbf{v}_C$ ее центра инерции:

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_C. \tag{3.4}$$

Систему взаимодействующих тел называют замкнутой, если на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы есть величина постоянная, т. е.

$$\mathbf{p} = \text{const}. \tag{3.5}$$

Работа, совершаемая силой **F** при элементарном перемещении $\Delta \mathbf{r}$,

$$\Delta A = \mathbf{F}\Delta \mathbf{r} = F\Delta s \cos \alpha, \tag{3.6}$$

где $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$ — элементарный путь, α — угол между векторами **F**, $\Delta \mathbf{r}$.

Работа переменной силы **F** на пути s

$$A = \int_0^s F \cos \alpha ds. \tag{3.7}$$

Изменение полной энергии системы равно работе, совершенной внешними силами, приложенными к системе:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}}. \tag{3.8}$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно со скоростью v,

$$W_{\text{к}} = mv^2/2. \tag{3.9}$$

Потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту h,

$$W_{\text{п}} = mgh \tag{3.10}$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_{\text{п}} = kx^2/2, \tag{3.11}$$

где k — коэффициент упругости, определяемый отношением упругой силы к величине x упругой деформации

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, т. е

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const}. \tag{3.12}$$

Общие замечания Как импульс, так и кинетическая энергия тела зависят от выбора системы отсчета, изменяясь при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому, составляя уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии, необходимо рассматривать движения всех тел в одной и той же инерциальной системе отсчета*. В большинстве случаев, решая задачи, пользуются той инерциальной системой отсчета, к которой относится условие задачи. Это так называемая «лабораторная» система отсчета, обычно связанная с Землей.

Если в условии задачи фигурирует относительная скорость $v_{\text{отн}}$ сближения (или удаления) двух движущихся по одной прямой частиц в некоторый момент времени их взаимодействия, то целесообразно рассматривать явление в такой инерциальной системе отсчета, в которой одна из частиц в этот момент неподвижна. Тогда скорость другой будет $v_{\text{отн}}$.

Иногда решение задачи упрощается, если выбрать такую систему отсчета, которая движется поступательно относительно «лабораторной» со скоростью центра инерции системы частиц** и в которой, следо-

---

* В неинерциальной системе отсчета на тела действуют силы инерции, внешние по отношению к данной системе тел. Поэтому всякая система тел в этом случае является неизолированной системой, для которой ни полный импульс, ни полная энергия не сохраняются.

** Здесь и далее имеется в виду изолированная система частиц.

вательно, центр инерции неподвижен. Будем для краткости называть такую систему отсчета *связанной с центром инерции*. Этой системой отсчета пользуются в тех случаях, когда необходимо рассматривать относительное перемещение частей системы, центр инерции которой движется относительно «лабораторной» системы отсчета (см. задачи № 3-2, 11-9, 31-4).

Из формул (3.3), (3.4), (3.5) вытекают следующие свойства системы отсчета, связанной с центром инерции:

а) скорость центра инерции системы частиц в любой инерциальной системе отсчета есть величина постоянная, т. е.

$$\mathbf{v}_C = \text{const}, \tag{3.13}$$

и, следовательно, система отсчета, связанная с центром инерции, также является инерциальной,

б) в этой и только в этой системе отсчета выполняются соотношения:

$$\Sigma m_i \Delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{p} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i = 0, \tag{3.15}$$

где m_i, $\mathbf{v}_i$ — масса и скорость i-й частицы, $\Delta \mathbf{r}_i$ — ее перемещение, соответствующее переходу системы из начального положения в конечное, $\mathbf{p}$ — импульс системы частиц;

в) в этой и только в этой системе отсчета суммарная кинетическая энергия частиц может обращаться в нуль в случае их относительного покоя.

А ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Методические указания

1. Ценность закона сохранения импульса для решения задач динамики в том, что он, связывая начальное и конечное значения импульса замкнутой системы, позволяет исключать из рассмотрения внутренние силы, т. е. силы взаимодействия частей системы. Поэтому закон применяют в тех задачах, в которых силы взаимодействия между отдельными телами системы являются величинами переменными, причем характер их изменения во времени сложен или вообще неизвестен (например, силы, возникающие при ударе).

2. Уравнение (3.5), выражающее закон сохранения импульса, является векторным. Поэтому, находя вектор $\mathbf{p} = \Sigma \mathbf{p}_i$, надо руководствоваться правилом сложения векторов или, выбрав оси проекций Ox и Oy, записать закон сохранения импульса в скалярной форме двумя уравнениями:

$$p_x = \text{const}, \; p_y = \text{const}.$$

Если импульсы всех тел системы направлены вдоль одной прямой, то, выбрав эту прямую за ось проекций, сразу записывают закон со-

хранения импульса в скалярной форме:

$$p = \text{const},$$

где $p = \Sigma p_i$ — сумма проекций импульсов всех тел системы.

3. Закон сохранения импульса справедлив для замкнутых систем. Однако его можно применять и для систем, на которые действуют внешние силы при условии, что их сумма равна нулю: $\Sigma \mathbf{F}_{внеш} = 0$.

Если же $\Sigma \mathbf{F}_{внеш} \neq 0$, но окажется, что сумма проекций всех внешних сил на некоторую ось (Ox) равна нулю, то

$$p_x = \text{const},$$

т. е. проекция импульса системы на направление, в котором внешние силы не действуют (или уравновешиваются), есть величина постоянная.

Решение задач

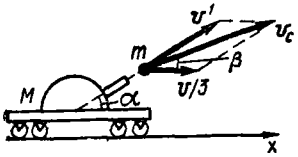

Рис 3-1

3-1. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью v, укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол α (рис. 3-1). Орудие произвело выстрел, в результате чего скорость платформы с орудием уменьшилась в 3 раза. Найти скорость v' снаряда (относительно орудия) при вылете из ствола. Масса снаряда m, масса платформы с орудием M.

Решение. Выясним возможность применения закона сохранения импульса. На систему платформа с орудием — снаряд извне действуют две силы: сила тяжести системы $(M + m)\mathbf{g}$ и сила нормального давления $\mathbf{N}$ рельсов. До выстрела эти силы уравновешивались, так как система двигалась равномерно. Во время выстрела сила взаимодействия между платформой и рельсами возрастает вследствие явления отдачи, поэтому равновесие сил, приложенных к системе, нарушается: $\mathbf{N} > (M + m)\mathbf{g}$. Следовательно, во время выстрела система не является замкнутой, ее импульс изменяется. Учтем, однако, что обе рассмотренные силы действуют по вертикали, в то время как в горизонтальном направлении никакие силы на систему не действуют (трением платформы о рельсы пренебрегаем). Поэтому проекция импульса системы на горизонтальное направление (ось x на рис. 3-1) есть величина постоянная:

$$p_x = \text{const}. \qquad (1)$$

Пусть состояниям системы до и после выстрела соответствуют значения величины p_x, равные p_{x1} и p_{x2}. Рассматривая все движения относительно Земли, получим:

$$p_{x1} = (M + m)v, \qquad (2)$$

$$p_{x2} = M\frac{v}{3} + mv_c \cos\beta, \qquad (3)$$

где $v_c \cos\beta$ — проекция на ось x скорости $\mathbf{v}_c$ снаряда относительно Земли (рис. 3-1).

Чтобы связать величину v_c с искомой скоростью v', будем рассматривать движение снаряда относительно Земли как сложное, состоящее из двух: со скоростью $\mathbf{v}'$ относительно орудия и со скоростью $\mathbf{v}/3$ вместе с орудием относительно Земли. Тогда в соответствии с формулой (1.18) получим

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}' + \mathbf{v}/3. \tag{4}$$

Спроектируем векторы, входящие в (4), на ось x:

$$v_c \cos\beta = v' \cos\alpha + v/3. \tag{5}$$

Заменив в (3) величину $v_c \cos\beta$ ее значением по (5) и приравняв согласно (1) правые части формул (2) и (3), найдем

$$v' = \frac{2(M+m)}{3m\cos\alpha} v.$$

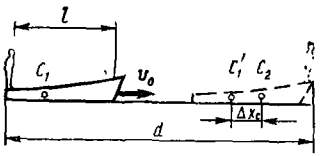

Рис 3-2

3-2. На корме лодки длиной l и массой M сидит человек массой m. В результате кратковременного толчка лодка с человеком приобретает скорость $\mathbf{v}_0$ и начинает двигаться от одного берега канала шириной d к другому (рис. 3-2), при этом человек переходит с кормы на нос лодки. Пренебрегая сопротивлением воды, найти время движения лодки.

Решение. Рассматривая систему лодка — человек как замкнутую и применяя к ней закон сохранения импульса (3.5), приходим к выводу, что, поскольку закон движения человека относительно лодки нам неизвестен, движение лодки относительно воды (или Земли) нельзя считать равномерным. Однако на основании соотношения (3.13) можно утверждать, что скорость центра инерции системы относительно воды есть величина постоянная: $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_0 = \text{const}$. Отсюда следует, что искомое время

$$t = \overrightarrow{C_1 C_2}/\mathbf{v}_0, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — начальное и конечное положения центра инерции системы, $\overrightarrow{C_1C_2}$ и $\mathbf{v}_0$ — его перемещение и скорость. Далее возможны два пути решения задачи:

1. Как видно из рисунка, выполняется соотношение

$$C_1C_2 = d - l + |\Delta x_C|, \tag{2}$$

где $d - l$ — модуль перемещения лодки относительно воды, $|\Delta x_C|$ — модуль перемещения центра инерции системы относительно лодки.

Чтобы найти величину $|\Delta x_C|$, выберем систему отсчета, связанную с центром инерции системы лодка — человек.

Пусть s_1, s_2 — модули перемещений лодки и человека. При этом, как видно из рис. 3-3, $s_2 = l - s_1$. Тогда, направив ось проекций вправо и учитывая направление перемещений двух тел, запишем соотношение (3.14) в скалярной форме:

$$-Ms_1 + m(l - s_1) = 0,$$

откуда

$$s_1 = [m/(M + m)]l. \qquad (3)$$

Но в силу относительности движения $|\Delta x_C| = s_1$. Теперь из (1)—(3) находим ответ:

$$t = \frac{d - lM/(M+m)}{v_0}. \qquad (4)$$

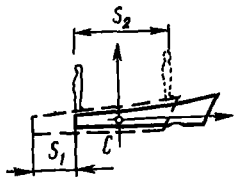

Рис 3 3

2. Из формулы (1) следует, что ответ не зависит от характера движения человека. Предположим, что оно было равномерным в течение всего промежутка времени t*. Тогда будет равномерным и движение лодки. Пусть $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ — импульсы системы соответственно в начальный и некоторый промежуточный моменты времени. Тогда, по закону сохранения импульса, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$, т. е.

$$(M + m)v_0 = M[(d - l)/t] + m(d/t), \qquad (5)$$

где $(d - l)/t$ — скорость лодки, d/t — скорость человека (все скорости даны в системе отсчета, связанной с Землей).

Решив уравнение (5) относительно t, получим тот же ответ (4).

5. РАБОТА, ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Методические указания

1 В механике применяют закон сохранения энергии главным образом в тех задачах, где между телами, образующими замкнутую систему, действуют потенциальные силы (гравитационные и упругие), *изменяющиеся во времени*. В этих случаях расчет скоростей тел или их координат при помощи второго закона Ньютона приводит к необходимости интегрирования, для выполнения которого надо знать закон изменения силы $F = F(t)$. Применение закона сохранения энергии, связывающего начальное и конечное состояния системы взаимодействующих тел, упрощает решение подобных задач, так как позволяет не рассматривать действующие между телами силы (см. задачу № 3-4).

В задачах на движение тела по окружности в вертикальной плоскости на тело также действуют изменяющиеся во времени силы. При этом наряду с законом сохранения энергии приходится все же использовать второй закон Ньютона. Однако и в этом случае можно решить задачу, не зная зависимости $F = F(t)$ (см. задачу № 3-5).

* Мы пренебрегаем промежутком времени Δt ($\Delta t \ll t$), в течение которого скорость человека возрастала от v_0 до v. Скорость v сохранялась затем до конца. Существенно, что при данном способе решения задачи величину Δt можно считать как угодно малой.

2. Подчеркнем, что закон сохранения механической энергии можно применять к системе взаимодействующих тел при одновременном выполнении следующих условий: а) система должна быть замкнутой (закон применим и для систем, на которые действуют внешние силы, в том случае, если их суммарная работа равна нулю, т. е. $\Sigma A_{внеш} = 0$); б) внутри системы должны отсутствовать силы трения (кроме сил трения покоя) и силы неупругих деформаций, так как иначе механическая энергия системы будет рассеиваться, превращаясь во внутреннюю энергию.

3. Если тело (или система тел) движется под действием силы тяжести, его нельзя считать изолированным. В этом случае изолированной системой, к которой можно применять закон сохранения энергии, будет система тело — Земля. Однако, исключая при этом из рассмотрения энергию Земли, мы практически не совершим ошибки по следующим причинам: а) само понятие потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли предполагает энергию *взаимодействия* тела и Земли, и уже поэтому характеризует энергию всей системы, а не одного тела; б) изменением кинетической энергии Земли в результате ее взаимодействия с падающим телом можно пренебречь (легко показать, что кинетическая энергия, получаемая телами в результате их взаимодействия, обратно пропорциональна массам тел*). Поэтому при решении задач на движение тела (или системы тел) в поле тяготения Земли не рассматривают ни потенциальную, ни кинетическую энергию Земли.

4. Выбор нулевого уровня отсчета высоты h, входящей в формулу (3.10) потенциальной энергии поднятого тела, произволен. При изменении нулевого уровня на величину Δh в обеих частях уравнения, выражающего закон сохранения энергии, появится один и тот же член $mg\Delta h$, что, разумеется, не повлияет на решение задачи. Обычно за нулевой уровень принимают самое нижнее положение движущегося тела.

Если потенциальная энергия какого-либо тела системы не изменяется, то, составляя уравнение, выражающее закон сохранения энергии для системы, эту энергию вообще можно не рассматривать.

Решение задач

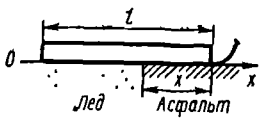

Рис 3 4

3-3. Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью v, въезжают на асфальт. Считая, что длина полозьев санок равна l, а коэффициент трения их об асфальт равен μ, определить путь s, пройденный санками по асфальту, если известно, что $s > l$. Массу санок считать равномерно распределенной по длине полозьев Трением санок о лед пренебречь.

* Действительно, из закона сохранения импульса следует, что импульсы, получаемые телами при взаимодействии без начальных скоростей, равны друг другу по модулю: $m_1v_1 = m_2v_2$. Поэтому можно записать следующие равенства:

$$\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} : \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Решение. Когда сани въезжают на асфальт, происходит постепенное увеличение силы давления N полозьев на асфальт от нуля до максимального значения, равного силе тяжести mg санок. В связи с этим возрастает и сила трения $F_{тр} = \mu N$, действующая на сани со стороны асфальта.

Поскольку санки движутся под действием переменной силы, воспользуемся для решения понятиями работы и энергии. Работа силы трения, действующей на санки, определяется изменением их кинетической энергии от $W_1 = mv^2/2$ до $W_2 = 0$. Тогда на основании соотношения (3.8) можно записать

$$A_{тр} = -mv^2/2. \qquad (1)$$

С другой стороны, работу $A_{тр}$ можно вычислить по формулам (3.6) и (3.7). Для этого разобьем весь путь, пройденный санками, на два участка: $s = l + s'$. На пути l на санки действует переменная сила трения $F_{тр} = \mu N$. Найдем совершенную ею работу A_1. Пусть санки уже прошли по асфальту путь x (рис. 3-4), тогда сила давления полозьев на асфальт равна $N = mgx/l$, сила трения $F_{тр} = \mu mgx/l$. Теперь по (3.7) получим

$$A_1 = -\int_0^l \mu mg \frac{x}{l}\, dx = -\frac{\mu mg}{2} l. \qquad (2)$$

Интеграл взят со знаком минус потому, что величина $F_{тр} = \mu mgx/l$ и dx имеют противоположные знаки. На пути s' сила трения постоянна и равна μmg, и поэтому совершаемая ею работа

$$A_2 = -\mu mgs'.$$

Полная работа сил трения

$$A_{тр} = A_1 + A_2 = -\mu mg[(l/2) + s']. \qquad (3)$$

Приравнивая правые части равенства (1) и (3) и сокращая массу, найдем

$$s' = (v^2 - \mu gl)/2\mu g.$$

Таким образом, весь путь, пройденный санями,

$$s = l + s' = (v^2 + \mu gl)/2\mu g.$$

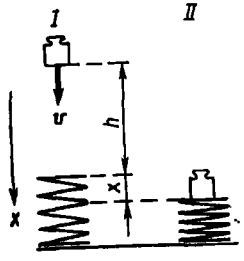

Рис. 3-5

3-4. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на $x_0 = 1{,}0$ мм. На сколько сожмет пружину эта же гиря, брошенная вертикально вниз с высоты $h = 0{,}20$ м со скоростью $v = 1{,}0$ м/с?

Решение. Искомая величина x деформации пружины определяет по формуле (3.11) потенциальную энергию тела. Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии. Так как на гирю действует сила тяжести, рассмотрим систему Земля— гиря — пружина. Поскольку при движении гири и сжатии пружины трения практически не возникает, полная механическая энергия этой изолированной системы будет сохраняться.

Подсчитаем энергию системы в ее начальном (I) и конечном (II) положениях (рис. 3-5). Выберем за нулевой уровень отсчета высоты самое нижнее положение гири, соответствующее сжатой пружине. В начальном положении энергия системы W_1 складывается из потенциальной и кинетической энергии гири:

$$W_1 = mg(h + x) + mv^2/2. \qquad (1)$$

В конечном положении у гири не будет кинетической энергии, зато сжатая пружина будет обладать энергией упругой деформации. Теперь полная энергия системы согласно формуле (3.11)

$$W_2 = kx^2/2, \qquad (2)$$

где коэффициент упругости k, согласно его определению, равен

$$k = mg/x_0. \qquad (3)$$

Приравнивая по закону сохранения энергии, правые части выражений (1) и (2) с учетом соотношения (3), получим после простых преобразований квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - 2gx_0x - (2gx_0h + v^2x_0) = 0.$$

Решив уравнение, найдем

$$x_{1,2} = gx_0 \pm \sqrt{g^2x_0^2 + 2gx_0h + v^2x_0}.$$

Отрицательный корень уравнения должен быть отброшен: $x < 0$ означает растяжение пружины, тогда как на самом деле она сжимается.

Выразив величины, входящие в формулу, в единицах СИ и подставив их числовые значения, выполним вычисление:

$$x = (9{,}8\cdot10^{-3} + \sqrt{(9{,}8)^2\cdot10^{-6} + 2\cdot9{,}8\cdot10^{-3}\cdot0{,}20 + 10^{-3}})\ \text{м} =$$
$$= 8\cdot10^{-2}\ \text{м} = 8\ \text{см}.$$

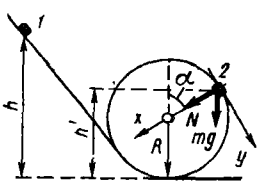

Рис. 3-6

3-5. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты h по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса R (рис. 3-6). На какой высоте h' выпадет тело из петли? Трением пренебречь.

Решение. Сначала выясним, почему, двигаясь вдоль петли, тело может оторваться от нее. На тело в произвольный момент времени его движения вверх по петле действуют две силы (рис. 3-6): сила тя-

жести $m\mathbf{g}$ и сила давления $\mathbf{N}$ петли, направленная по радиусу к центру окружности. По второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}. \qquad (1)$$

Направим оси проекций x и y по векторам нормального и тангенциального ускорений $\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_\tau$, т. е. по радиусу и касательной к окружности. Учитывая, что $a_n = v^2/R$ и $a_\tau = dv/dt$, получим вместо (1) два скалярных уравнения для осей x и y соответственно:

$$mg \cos \alpha + N = mv^2/R, \qquad (2)$$

$$mg \sin \alpha = m\,(dv/dt). \qquad (3)$$

Так как при движении вверх по петле величина $mg\cos\alpha$ возрастает, а mv^2/R убывает, то величина $N = (mv^2/R) - mg\cos\alpha$ в уравнении (2) должна и подавно убывать. При обращении N в нуль тело оторвется от петли.

Приняв $N = 0$, перепишем, сокращая величину m, уравнения (2) и (3) для момента отрыва тела от петли:

$$g \cos \alpha = v^2/R, \qquad (2')$$

$$g \sin \alpha = dv/dt. \qquad (3')$$

В систему (2′) и (3′) явно не вошла искомая величина h', однако она весьма просто связана с углом α. Как видно из чертежа,

$$\cos \alpha = (h' - R)/R. \qquad (4)$$

Поэтому было бы достаточно найти величину α. Однако найти ее из системы (2′), (3′) невозможно, так как эта система содержит более двух неизвестных.

Исчерпав возможности, которые дает второй закон Ньютона для движущегося вдоль петли тела, воспользуемся законом сохранения энергии. Так как трение отсутствует и, следовательно, на тело действуют только потенциальные силы, то полная механическая энергия тела (точнее: замкнутой системы тело — желоб — Земля) во время его движения будет сохраняться.

В начальный момент времени тело обладает только потенциальной энергией $W_1 = mgh$. В момент отрыва движущегося со скоростью v тела его полная энергия $W_2 = mgh' + mv^2/2$. Приравняв по закону сохранения энергии величины W_1 и W_2, получим

$$v^2 = 2g\,(h - h'). \qquad (5)$$

Теперь из (2′), (4) и (5) легко найдем ответ:

$$h' = (2h + R)/3.$$

З а м е ч а н и я: 1. Мы решили задачу, не использовав уравнения (3), выражающего второй закон Ньютона для касательного к окружности направления. В задачах на движение по окружности в вертикальной плоскости закон сохранения энергии по существу заменяет дифференциальное уравнение (3), которое поэтому составлять вообще не надо.

2. Интересно отметить, что тело выпадет из петли не при любых значениях h. Действительно, так как h' не может быть больше $2R$ и меньше R (при $h' < R$, даже полностью потеряв скорость, тело, не отрываясь от петли, начнет скользить обратно), т. е. $h'_{макс} = 2R$ и $h'_{мин} = R$, то, подставив эти значения h' в (6), получим: $h_{макс} = 2{,}5R$, $h_{мин} = R$. Следовательно, при $h > 2{,}5\ R$ и $h < R$ тело из петли не выпадет.

В. СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Методические указания

1. Сюда относятся в основном задачи на упругий удар или иное взаимодействие тел, представляющих собой замкнутую систему, когда отсутствуют силы трения и силы неупругих деформаций и когда у тел в результате взаимодействия изменяются скорости. При этом сохраняются как импульс, так и энергия системы, что дает два уравнения, позволяющих определить, например, скорости обоих тел после взаимодействия, если известны скорости до взаимодействия.

2. В случае неупругого удара возникающие остаточные деформации тел всегда сопровождаются частичным или полным переходом механической энергии во внутреннюю энергию (тела нагреваются). Поэтому механическая энергия системы не сохраняется. Тогда энергия, затраченная на деформацию, определяется как разность между начальным и конечным значениями механической энергии системы.

3. При помощи совместного применения законов сохранения полной (а не только механической) энергии и импульса, решаются задачи № 11-9, 27-7, 31-3, 31-4, 31-5 руководства.

Решение задач

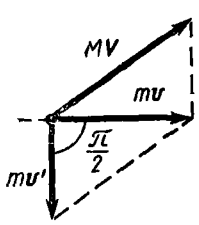

Рис. 3 7

3-6. При упругом ударе нейтрона о ядро углерода он движется после удара в направлении, перпендикулярном начальному. Считая, что масса M ядра углерода в $n = 12$ раз больше массы m нейтрона, определить, во сколько раз уменьшается энергия нейтрона в результате удара.

Решение. Введем обозначения: $\mathbf{v}$ — скорость нейтрона до удара, $\mathbf{v}'$ — после удара; $\mathbf{V}$ — скорость ядра углерода после удара (до удара она равна нулю).

В результате упругого удара импульс и энергия, которыми до удара обладал нейтрон, распределяются между двумя частицами. При этом

по законам сохранения импульса и энергии соответственно имеем:

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \tag{2}$$

По условию задачи требуется найти отношение

$$\alpha = \frac{mv^2}{2} : \frac{mv'^2}{2} = \left(\frac{v}{v'}\right)^2.$$

Для выполнения расчетов необходимо перейти от векторной формы записи уравнения (1) к скалярной форме. Это можно сделать, применив метод проекций, который неоднократно использовался. Однако в данном случае можно поступить проще. Изобразим на чертеже импульсы $m\mathbf{v}'$, $M\mathbf{V}$ и их векторную сумму $m\mathbf{v}$, учитывая, что угол между векторами $m\mathbf{v}$ и $m\mathbf{v}'$ равен $\pi/2$ (рис.3-7). Из треугольника импульсов имеем

$$(mv)^2 + (mv')^2 = (MV)^2. \tag{3}$$

Почленно разделив уравнение (2) на m и (3) на m^2 и учитывая условие $M/m = n$, получим:

$$v^2 - v'^2 = nV^2, \tag{4}$$

$$v^2 + v'^2 = n^2V^2. \tag{5}$$

Чтобы исключить из системы величину V, разделим почленно (5) на (4):

$$\frac{v^2 + v'^2}{v^2 - v'^2} = n,$$

а числитель и знаменатель полученного соотношения — на v'^2, тогда находим

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = n,$$

откуда

$$\alpha = \frac{n+1}{n-1} = \frac{13}{11} = 1{,}2.$$

3-7. Молот массой $m = 5{,}00$ кг, двигаясь со скоростью $v = 4{,}00$ м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием равна $M = 95$ кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен к. п. д. процесса ковки при данных условиях?

Решение. Сначала обоснуем возможность применения законов сохранения для решения данной задачи. Строго говоря, система молот—изделие—наковальня не является замкнутой. На нее действуют извне сила тяжести $(M + m)g$ и сила давления N опоры, на которой стоит

наковальня. *Во время удара* молота вторая сила в той или иной степени, определяемой упругими свойствами опоры, будет превышать первую силу и к рассматриваемой системе будет приложена извне равнодействующая $R = N - (M + m)g$.

Однако силы ударного взаимодействия тел весьма велики. Очевидно, условие задачи предполагает, что по сравнению с этими силами величиной R можно пренебречь, и, таким образом, считать систему замкнутой*.

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что энергия, затраченная на деформацию изделия, равна разности значений механической энергии системы до и после удара. Так как во время удара изменяется только кинетическая энергия тел (незначительным перемещением тел по вертикали за время удара мы пренебрегаем), то получим для энергии деформации

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)\,v'^2}{2}, \tag{1}$$

где v' — общая скорость всех тел системы после неупругого удара. Ее найдем на основании закона сохранения импульса:

$$mv = (m + M)v'. \tag{2}$$

Подставив в формулу (1) значение v' из уравнения (2), получим ответ на первый вопрос задачи:

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m}. \tag{3}$$

Так как энергия, расходуемая на ковку изделия, является по смыслу задачи полезной, то к. п. д. процесса ковки

$$\eta = \frac{W_{\text{полезн}}}{W_{\text{полн}}} = \left(\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m}\right) : \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{M+m}. \tag{4}$$

Подставив числовые значения заданных величин в формулы (3) и (4) и выполнив вычисление, получим:

$$W_{\text{деф}} = 38 \text{ Дж}, \ \eta = 0{,}95.$$

Из (4) видно, что к. п. д. процесса ковки тем больше, чем больше масса наковальни по сравнению с массой молота. При $(m/M) \to 0$ $\eta \to 1$.

§ 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

Второй закон Ньютона для движения центра инерции твердого тела

$$\Sigma \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_C. \tag{4.1}$$

* Практически это будет в том случае, когда железная наковальня стоит на сравнительно мягком основании, скажем, на деревянном полу. Наоборот, если упругие свойства наковальни и опоры близки друг к другу (например, железная наковальня стоит на чугунном основании), то рассмотренную выше систему нельзя считать замкнутой. Тогда будет точнее считать замкнутой систему молот — изделие — наковальня — основание.