наковальня. *Во время удара* молота вторая сила в той или иной степени, определяемой упругими свойствами опоры, будет превышать первую силу и к рассматриваемой системе будет приложена извне равнодействующая $R = N - (M + m)g$.

Однако силы ударного взаимодействия тел весьма велики. Очевидно, условие задачи предполагает, что по сравнению с этими силами величиной R можно пренебречь, и, таким образом, считать систему замкнутой*.

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что энергия, затраченная на деформацию изделия, равна разности значений механической энергии системы до и после удара. Так как во время удара изменяется только кинетическая энергия тел (незначительным перемещением тел по вертикали за время удара мы пренебрегаем), то получим для энергии деформации

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)\,v'^2}{2}, \tag{1}$$

где v' — общая скорость всех тел системы после неупругого удара. Ее найдем на основании закона сохранения импульса:

$$mv = (m + M)v'. \tag{2}$$

Подставив в формулу (1) значение v' из уравнения (2), получим ответ на первый вопрос задачи:

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m}. \tag{3}$$

Так как энергия, расходуемая на ковку изделия, является по смыслу задачи полезной, то к. п. д. процесса ковки

$$\eta = \frac{W_{\text{полезн}}}{W_{\text{полн}}} = \left(\frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m}\right) : \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{M+m}. \tag{4}$$

Подставив числовые значения заданных величин в формулы (3) и (4) и выполнив вычисление, получим:

$$W_{\text{деф}} = 38 \text{ Дж}, \ \eta = 0{,}95.$$

Из (4) видно, что к. п. д. процесса ковки тем больше, чем больше масса наковальни по сравнению с массой молота. При $(m/M) \to 0$ $\eta \to 1$.

§ 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

Второй закон Ньютона для движения центра инерции твердого тела

$$\Sigma \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_C. \tag{4.1}$$

* Практически это будет в том случае, когда железная наковальня стоит на сравнительно мягком основании, скажем, на деревянном полу. Наоборот, если упругие свойства наковальни и опоры близки друг к другу (например, железная наковальня стоит на чугунном основании), то рассмотренную выше систему нельзя считать замкнутой. Тогда будет точнее считать замкнутой систему молот — изделие — наковальня — основание.

где $\mathbf{a}_C$ — ускорение центра инерции. При поступательном движении тела уравнение (4.1) определяет ускорение любой точки тела.

Момент силы F относительно центра вращения

$$\mathbf{M} = [\mathbf{Fr}], \tag{4.2}$$

где r — радиус-вектор, проведенный из центра вращения в точку приложения силы.

Момент импульса материальной точки относительно центра вращения

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{vr}], \tag{4.3}$$

где $m\mathbf{v}$ — импульс этой точки, r — ее радиус-вектор.

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I = mr^2, \tag{4.4}$$

где m — масса точки, r — расстояние ее от оси.

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции материальных точек, составляющих это тело:

$$I = \int_{(m)} r^2\, dm. \tag{4.5}$$

Моменты инерции некоторых однородных тел вращения относительно их геометрических осей вращения:

тонкостенный цилиндр $I = mr^2$, (4.5а)

сплошной цилиндр $I = mr^2/2$, (4.5б)

шар $I = 2mr^2/5$. (4.5в)

Момент инерции однородного тонкого стержня длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине,

$$I = ml^2/12. \tag{4.5г}$$

Момент инерции I тела относительно любой оси вращения и момент инерции I_0 тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, связаны соотношением (теорема Штейнера)

$$I = I_0 + md^2, \tag{4.6}$$

где m — масса тела, d — расстояние между осями.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\Sigma \mathbf{M}_i = I\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i$ — результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу, ε — его угловое ускорение.

Момент импульса твердого тела равен произведению момента инерции тела на угловую скорость:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{4.8}$$

Момент импульса системы тел есть векторная сумма моментов импульсов всех тел системы:

$$\mathbf{L} = \Sigma \mathbf{L}_i = \Sigma I_i \boldsymbol{\omega}_i. \tag{4.9}$$

Закон сохранения момента импульса: если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю ($\mathbf{M} = 0$), то момент импульса системы есть величина постоянная, т. е.

$$\mathbf{L} = \text{const}. \tag{4.10}$$

Работа постоянного момента силы, действующей на тело,

$$A = M\varphi, \tag{4.11}$$

где φ — угол поворота тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$W_к = I\omega^2/2. \tag{4.12}$$

Общие замечания. В задачах по курсу общей физики обычно рассматривают вращение твердого тела лишь вокруг неподвижной оси или оси, перемещающейся в пространстве параллельно самой себе. В этом случае все векторы, характеризующие вращательное движение тела: $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, **M**, **L**, — направлены вдоль оси вращения. Это позволяет упростить запись уравнений вращательного движения тела. Выбрав ось вращения за ось проекций, будем в дальнейшем все уравнения писать в скалярном виде. При этом знаки величин ω, ε, M, L определяют следующим образом. Некоторое направление вращения (по часовой стрелке или против нее) выбирают за положительное. Величины ω, L, M берутся со знаком плюс, если их направление соответствует выбранному положительному направлению, в противном случае — со знаком минус. Знак величины ε всегда совпадает со знаком M.

При ускоренном вращении тела знаки всех четырех величин совпадают; при замедленном движении две пары величин — ω, L и M, ε — имеют противоположные знаки..

А. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания

1. Уравнениями движения твердого тела являются второй закон Ньютона для движения центра инерции тела (4.1) и основное уравнение динамики вращательного движения (4.7). Их применяют для расчетов сил и ускорений в случае равнопеременного движения твердого тела (a_C = const, $\boldsymbol{\varepsilon}$ = const).

2. Сложное движение твердого тела удобно рассматривать как сумму двух движений: вращательного относительно какой-либо оси и поступательного со скоростью оси. Обычно выбирают ось вращения так, чтобы она проходила через центр инерции тела.

3. При качении однородного цилиндра (шара) по плоскости между линейными величинами, характеризующими движение центра инерции тела, — скоростью v_C и ускорением a_C — и угловыми величинами, определяющими вращательное движение тела, — угловой скоростью ω и угловым ускорением ε — существуют соотношения*:

$$v_C = \omega R, \tag{4.13}$$

$$a_C = \varepsilon R, \tag{4.14}$$

где R — радиус цилиндра (шара).

* Справедливость этих соотношений становится очевидной, если качение тела рассматривать в системе координат, связанной не с плоскостью, по которой тело катится, а с осью катящегося тела, проходящей через центр инерции.

Решение задач

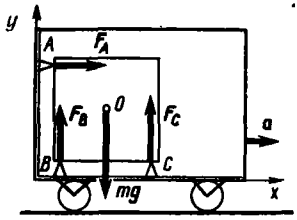

Рис 4-1

4-1. Однородный куб массой $m = 10{,}0$ кг лежит в углу вагона на трех опорах A, B, C (рис. 4-1). Определить силы реакции опор F_A, F_B, F_C, если известно, что вагон движется с ускорением $a = 2{,}00$ м/с^2.

Решение. Так как куб движется только поступательно ($a \neq 0$, $\varepsilon = 0$), уравнения движения твердого тела (4.1) и (4.7) запишутся в виде

$$\text{а) } \Sigma \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}, \quad \text{б) } \Sigma M_i = 0. \tag{1}$$

На куб действуют сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, приложенная в центре куба, и три силы реакции опор, направленные нормально к соответствующим граням куба (рис. 4-1). Так как эти силы в совокупности не параллельны между собой, перепишем соотношение (1а) в виде двух скалярных уравнений, выбрав оси проекций, как показано на рисунке. Тогда для осей x и y соответственно получим:

$$F_A = ma, \quad F_B + F_C - mg = 0. \tag{2}$$

Чтобы не допустить ошибки, составляя уравнение моментов (1б), необходимо иметь в виду, что основное уравнение динамики вращательного движения (4.7), частным случаем которого является уравнение (1б), выведено для вращения тела вокруг какой-либо *неподвижной* оси, т. е. для движения в инерциальной системе отсчета. Однако, выбирая какую-либо точку ускоренно движущегося тела за ось вращения и составляя уравнение моментов относительно этой оси, мы тем самым рассматриваем движение тела в неинерциальной системе отсчета. В этом случае уравнения движения можно записывать, лишь вводя силы инерции (см. § 2, п.В). Оказывается, что, составляя уравнение (1б), можно все-таки не учитывать сил инерции, *если выбрать ось вращения, проходящую через центр инерции тела.* Действительно, сила инерции всегда приложена в центре инерции, поэтому при таком выборе оси вращения момент этой силы равен нулю.

Итак, выбрав ось вращения, проходящую через центр инерции куба, и приняв положительным направление вращения по часовой стрелке, на основании (1б) запишем

$$F_A\,(l/2) + F_B\,(l/2) - F_C\,(l/2) = 0, \tag{3}$$

где l — длина ребра куба. Решая систему (2), (3), находим:

$$F_A = ma; \quad F_B = m\,(g - a)/2; \quad F_C = m\,(g + a)/2.$$

Подставив в эти формулы числовые значения заданных величин и выполнив вычисление, получим:

$$F_A = 10 \cdot 2\text{Н} = 20\text{Н}; \quad F_B = 5 \cdot (9{,}8 - 2)\text{Н} = 39\text{Н}; \quad F_C = 5 \cdot (9{,}8 + 2)\text{Н} = 59\text{ Н}.$$

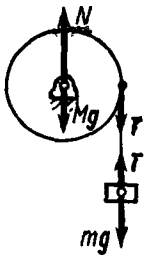

Рис. 4 2

4-2. На горизонтальную ось насажен шкив радиуса R. На шкив намотан шнур, к свободному концу которого подвесили гирю массой m (рис. 4-2). Считая массу M шкива равномерно распределенной по ободу, определить ускорение a, с которым будет опускаться гиря, силу натяжения T нити и силу давления N шкива на ось.

Решение. Поскольку ускорение центра инерции шкива $a_C = 0$ и шкив только вращается, уравнения движения (4.1) и (4.7) для него запишутся в виде

$$\text{а) } \Sigma \mathbf{F}_i = 0, \text{ б) } \Sigma M_i = I\varepsilon. \tag{1}$$

На шкив действуют силы тяжести Mg, натяжения **T** нити и реакции **N** оси. Последняя по третьему закону Ньютона численно равна искомой силе давления шкива на ось. Очевидно, сила **N** направлена вертикально вверх, так как только в этом случае может выполняться соотношение (1а). Так как все три вектора коллинеарны (т. е. параллельны одной и той же прямой), уравнение (1а) можно записать в скалярном виде:

$$Mg + T - N = 0. \tag{2}$$

Шкив вращается под действием лишь момента силы T. Следовательно, уравнение (1б) дает

$$TR = I\varepsilon. \tag{3}$$

Момент инерции шкива, поскольку его масса распределена по ободу, найдем по формуле (4.5а):

$$I = MR^2. \tag{4}$$

Уравнения (2) и (3), описывающие движение шкива, содержат три неизвестных: T, N и ε. Недостающее уравнение запишем, применив второй закон Ньютона для поступательного движения гири:

$$mg - T = ma. \tag{5}$$

Поскольку шнур сматывается со шкива без проскальзывания, ускорение гири равно линейному ускорению точек на ободе шкива. Следовательно,

$$\varepsilon = a/R. \tag{6}$$

Подставив в (3) значения I, ε по формулам (4) и (6), найдем из системы (2), (3), (5) все три неизвестные величины:

$$a = \frac{mg}{M+m}; \quad T = \frac{Mmg}{M+m}; \quad N = \frac{M(M+2m)g}{M+m}.$$

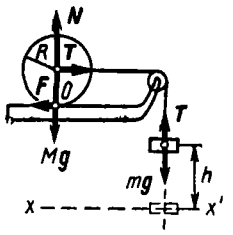

Рис. 4-3

4-3. Система, состоящая из цилиндрического катка радиуса R и гири, связанных нитью, перекинутой через блок (рис. 4-3), под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение a центра инерции катка и силу натяжения T нити. Какую скорость v приобретет гиря, если она опустится с высоты h? Масса цилиндра M, масса гири m, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

Решение. Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. Поэтому воспользуемся уравнениями движения твердого тела (4.1) и (4.7).

На каток действуют четыре силы: сила натяжения **T** нити, сила тяжести Mg, сила давления опоры **N** и сила трения покоя **F**. Последняя сила обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращения тела*. Так как силы Mg и **N** заведомо уравновешиваются (ускорения по вертикали нет), мы их в дальнейшем учитывать не будем.

Возможны два дальнейших пути решения задачи, связанные с двумя способами выбора оси вращения тела:

1. Пусть ось вращения совпадает с геометрической осью цилиндра, проходящей через центр инерции катка. Следовательно, мы будем рассматривать качение тела как сумму двух движений: поступательного со скоростью центра инерции и вращательного вокруг оси, проходящей через центр инерции. Для поступательного движения на основании закона (4.1) получим

$$T - F = Ma. \tag{1}$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создает лишь сила трения**, то согласно (4.7) имеем

$$FR = I\varepsilon.$$

Это уравнение перепишем, учитывая соотношения (4.5б) и (4.14) и сокращая R:

$$F = Ma/2. \tag{2}$$

---

* Действие силы **F** не связано с трением качения. Она появляется как сила реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения **T** нити исчезает и сила **F**.

** Момент силы инерции мы здесь не рассматриваем, поскольку ось вращения проходит через центр инерции тела (см. задачу № 4-1).

Уравнения (1) и (2) содержат три неизвестных: T, F, a. Недостающее уравнение запишем, применив второй закон Ньютона для гири, ускорение которой, очевидно, равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \tag{3}$$

Решив систему (1), (2), (3), найдем неизвестные величины a, T:

$$a = \frac{2mg}{3M+2m}; \quad T = \frac{3Mmg}{3M+2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость по известной формуле скорости равнопеременного движения:

$$v = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{mgh/(3M+2m)}.$$

2. За ось вращения выберем ось, которая проходит через точку касания цилиндра с плоскостью (точка O, рис. 4-3), т. е. будем рассматривать качение тела как вращение вокруг мгновенной оси. Вращающим моментом относительно этой оси является момент силы T, поэтому на основании уравнения (4.7), получим

$$TR = I'\varepsilon. \tag{4}$$

Момент инерции цилиндра относительно этой оси найдем по формуле (4.5б) и теореме Штейнера (4.6):

$$I' = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2. \tag{5}$$

Как и в первом способе, записав второй закон Ньютона для гири (3), из уравнений (4) и (3) с учетом соотношений (5) и (4.14) найдем значения ускорения a и силы T, совпадающие с полученными ранее.

Скорость гири вычислим так же, как в первом способе.

Замечание. Оба способа решения задачи основаны на использовании уравнений движения твердого тела. Ниже дан третий способ решения этой задачи, связанный с применением закона сохранения энергии (см. задачу № 4-5).

Б. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания

1. *Закон сохранения энергии* широко применяется в решении задач на вращательное движение твердого тела, особенно в случаях неравнопеременного вращения, происходящего под действием переменного момента сил. Все замечания о применении закона сохранения энергии, сделанные в § 3, п.Б, относятся и к случаю вращения твердого тела. При этом следует помнить, что полная кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии его поступательного движения со скоростью центра инерции и кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции.

2. *Закон сохранения момента импульса* во вращательном движении, так же как и закон сохранения импульса в поступательном движении, позволяет исключать из рассмотрения любые силы, действующие внутри системы, в том числе силы трения. Поэтому закон применяют в тех задачах на вращательное движение твердого тела (или системы тел), где характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или вообще неизвестен.

Закон сохранения момента импульса можно применять к любой системе при условии, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к этой системе, равен нулю. Силы при этом могут и не уравновешиваться.

Решение задач

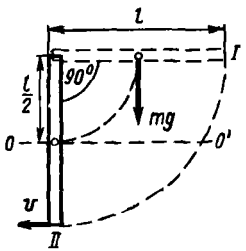

Рис. 4-4

4-4. Тонкий однородный стержень длиной l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему. Стержень отклонили на 90° от положения равновесия и отпустили. Определить скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

Р е ш е н и е. Стержень поворачивается вокруг оси под действием момента силы тяжести. Так как при опускании стержня этот момент уменьшается, вращение стержня не будет равнопеременным, поэтому применение основного уравнения динамики вращательного движения (4.7) здесь нецелесообразно.

Воспользуемся законом сохранения энергии. Так как в данном случае отсутствуют силы трения, энергия стержня (точнее, системы стержень — Земля) не изменяется при его движении, поэтому

$$W_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{II}},$$

где W_{I} есть потенциальная энергия поднятого стержня, W_{II} — кинетическая энергия его вращательного движения, если принять нулевой уровень отсчета высоты (OO', рис. 4-4) проходящим через центр тяжести стержня в его нижнем положении. Следовательно,

$$W_{\mathrm{I}} = mgl/2, \quad W_{\mathrm{II}} = I\omega^2/2.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств и учитывая, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, на основании соотношения (4.5г) и теоремы Штейнера (4.6) равен

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

а также что $v = \omega l$, получим для искомой скорости

$$v = \sqrt{3gl}.$$

4-5. Решить задачу № 4-3 на основе закона сохранения энергии.

Решение. Анализируя условие задачи № 4-3, мы выяснили, что на каток действует сила трения. Несмотря на это, к системе каток — гиря можно применить закон сохранения механической энергии, поскольку эта сила есть сила трения покоя. В отличие от силы трения скольжения и трения качения эта сила не совершает работы, связанной с убылью механической энергии системы.

Начальная энергия системы W_1 есть потенциальная энергия поднятых над Землей тел. При этом, поскольку потенциальная энергия катка во все время его движения не изменяется, вообще не будем ее учитывать при составлении уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Выберем нулевой уровень отсчета высоты проходящим через центр тяжести опущенной гири (xx', см. рис. 4-3). Тогда получим

$$W_1 = mgh. \tag{1}$$

Будем рассматривать качение цилиндра как результат двух движений: поступательного со скоростью центра инерции и вращательного вокруг оси, проходящей через центр инерции. Тогда конечная энергия системы, когда гиря опустится с высоты h, будет равна

$$W_2 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Первые два члена в правой части (2) выражают кинетическую энергию поступательного и вращательного движений катка. Приравнивая на основе закона сохранения энергии правые части (1) и (2), получим

$$mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

Учитывая соотношения (4.5б) и (4.13), из уравнения (3) найдем скорость гири:

$$v = 2\sqrt{mgh/(3M+2m)}. \tag{4}$$

Определим ускорение центра инерции катка, равное ускорению гири, приняв во внимание, что рассматриваемая система движется под действием постоянных сил и, следовательно, ее ускорение постоянно. Сравнивая выражение (4) с формулой скорости равнопеременного движения $v = \sqrt{2ah}$, получим для ускорения прежний ответ: $a = 2mg/(3M + 2m)$.

Для вычисления силы натяжения T нити еще раз воспользуемся законом сохранения энергии. На основании этого закона работа, совершенная силой T, приложенной к центру инерции катка, при перемещении последнего на расстояние $l = h$ равна кинетической энергии, полученной катком при этом перемещении, т. е.

$$Th = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Отсюда, учитывая соотношения (4.5б), (4.13) и (4), найдем силу T:

$$T = 3Mmg/(3M + 2m).$$

Замечание. Сравнивая различные методы решения задачи № 4-3, сделаем выводы, относящиеся к любой системе связанных между собой тел (или одному телу), движущихся лишь под действием сил тяжести и реакций связей: 1) для определения конечной скорости тел целесообразно применять метод, основанный на законе сохранения энергии. При этом можно не рассматривать силы, действующие на систему, достаточно убедиться в отсутствии среди них сил трения, рассеивающих механическую энергию системы; 2) для определения сил и ускорений следует пользоваться уравнениями движения твердого тела (4.1) и (4.7).

4-6. Круглая платформа радиуса $R = 1{,}00$ м, момент инерции которой $I = 130$ кг·м^2, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, делая $n_1 = 1{,}00$ об/с. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 70$ кг. Сколько оборотов в секунду n_2 будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение. Перемещаясь по платформе, человек взаимодействует с ней. О характере этого взаимодействия нам ничего не известно, поэтому основное уравнение динамики вращательного движения к платформе применить невозможно. В этой задаче в отличие от двух предыдущих у нас нет оснований и для применения закона сохранения энергии, поскольку не исключено, что, перемещаясь по вращающейся платформе, человек будет совершать работу, изменяя механическую энергию вращающейся системы платформа — человек.

Учтем, что, согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции. Это означает, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к вращающейся системе, равен нулю. Следовательно, для системы платформа — человек выполняется закон сохранения момента импульса (4.10), который запишем так:

$$L_1 = L_2. \qquad (1)$$

Подсчитаем начальный момент импульса системы L_1 (человек стоит на краю платформы) и конечное его значение L_2 (человек стоит в центре платформы):

$$L_1 = I_1\omega_1 = (I + mR^2)\cdot 2\pi n_1, \qquad (2)$$

где mR^2 — момент инерции человека, $I_1 = I + mR^2$ — начальный момент инерции системы, ω_1 — ее начальная угловая скорость;

$$L_2 = I_2\omega_2 = I\cdot 2\pi n_2, \qquad (3)$$

где I_2 и ω_2 — конечные момент инерции и угловая скорость системы. Здесь учтено, что момент инерции человека, стоящего в центре платформы, согласно формуле (4.4) равен нулю. Решая систему (1) — (3), получаем

$$n_2 = n_1(I + mR^2)/I.$$

Подставив в эту формулу числовые значения заданных величин и выполнив вычисление, находим

$$n_2 = 1{,}5 \text{ об/с}.$$

Замечание. Мы видим, что при уменьшении момента инерции системы, связанном с перемещением человека в центр платформы, увеличилась угловая скорость вращения системы: $\omega_2 > \omega_1$. Следовательно, должно иметь место неравенство $I_2\omega_2^2 > I_1\omega_1^2$, поскольку $I_2\omega_2 = I_1\omega_1$. Но это, согласно формуле (4.12), означает увеличение кинетической энергии вращающейся системы. Таким образом, сделанное нами вначале предположение о том, что человек, перемещаясь от края платформы к центру, совершает работу, изменяя механическую энергию вращающейся системы, соответствует действительности. Решение задачи, основанное на постоянстве механической энергии системы, было бы неверным. Закон сохранения энергии позволяет лишь вычислить работу, совершенную человеком, как величину, равную изменению механической энергии системы:

$$A = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2}.$$

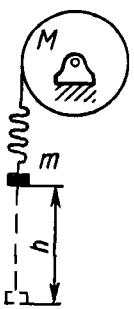

Рис. 4-5

4-7. Маховик, имеющий вид диска радиуса R и массы M, может вращаться вокруг горизонтальной оси. К его цилиндрической поверхности прикреплен шнур, к другому концу которого подвешен груз массы m (рис. 4-5). Груз был приподнят и затем отпущен. Упав свободно с высоты h, груз натянул шнур и благодаря этому привел маховик во вращение. Какую угловую скорость ω приобрел при этом маховик?

Решение. Когда падающий груз натягивает шнур, возникает взаимодействие посредством шнура между грузом и маховиком. Мы ничего не знаем о характере этого взаимодействия, зависящего от упругих свойств тел (в основном шнура). Ясно лишь, что в результате этого взаимодействия увеличивается скорость точек цилиндрической поверхности маховика и уменьшается скорость падения гири. Шнур растягивается до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. Такое весьма кратковременное взаимодействие между грузом и маховиком можно рассматривать как неупругий удар*. Как и при всяком неупругом ударе, закон сохранения механической энергии здесь неприменим.

* Именно при неупругом ударе тела деформируются до тех пор, пока их скорости не станут равными.

Одиако к системе груз — маховик можно применить закон сохранения момента импульса. На эту систему действуют три внешних силы: силы тяжести диска, реакции опоры и сила тяжести груза. Поскольку первые две силы проходят через ось диска, их момент относительно этой оси равен нулю. Действием же момента силы тяжести груза, равного mgR, во время удара можно пренебречь по сравнению с моментом очень больших сил взаимодействия груза и маховика при ударе. Таким образом, можно считать результирующий момент всех внешних сил относительно оси диска *во время удара* равным нулю. Тогда, по закону сохранения момента импульса (4.10),

$$L_1 = L_2, \tag{1}$$

где L_1 и L_2 — моменты импульса системы груз — маховик соответственно в начале и конце удара.

Так как в начале удара диск был еще неподвижен, величина L_1 представляет собой момент импульса падающего груза относительно оси вращения диска. Принимая груз за материальную точку, согласно формуле (4.3) получим

$$L_1 = mv_1R, \tag{2}$$

где скорость v_1 гири найдем по известной формуле скорости при свободном падении:

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \tag{3}$$

Величина L_2 равна суммарному моменту импульса гири и вращающегося диска, когда скорости груза и точек цилиндрической поверхности диска стали одинаковыми:

$$L_2 = mv_2R + I\omega, \tag{4}$$

где величины v_2 и ω связаны соотношением

$$v_2 = \omega R. \tag{5}$$

Подставим в уравнение (1) значения L_1 и L_2 по (2) и (4). Решив его относительно ω с учетом формул (3), (5) и (4.5б), получим

$$= m\sqrt{2gh} \Big/ \left(m + \frac{1}{2} M\right) R.$$

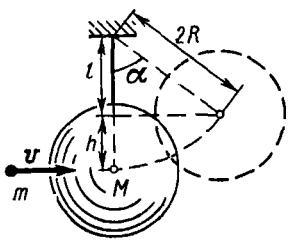

Рис. 4-6

4-8. Маятник в виде однородного шара, жестко скрепленного с тонким стержнем, длина которого равна радиусу шара, может качаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня (рис. 4-6). В шар нормально к его поверхности ударилась пуля массы $m = 10{,}0$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v = 800$ м/с, и застряла в шаре. Масса шара $M = 10{,}0$ кг, радиус его $R = 15$ см. На какой угол α отклонится маятник в результате удара пули? Массой стержня пренебречь.

Решение. Как видно из чертежа, искомый угол α связан с высотой h подъема центра шара:

$$\cos\alpha = (2R - h)/2R. \qquad (1)$$

Так как величина h определяет потенциальную энергию, полученную шаром вследствие удара пули, выясним возможность применения закона сохранения энергии. Поскольку в результате удара пули в шар скорости обоих тел станут одинаковыми, этот удар следует считать неупругим. Значит, механическая энергия в *процессе удара* не сохраняется (частично переходит во внутреннюю энергию). Однако *после удара* механическая энергия движущейся системы маятник — пуля будет сохраняться, так как теперь в ней действуют только потенциальные силы. Следовательно, при подъеме шара вместе с пулей кинетическая энергия вращательного движения системы будет превращаться в потенциальную энергию поднятых тел. По закону сохранения энергии,

$$I\omega^2/2 = Mgh + mgh', \qquad (2)$$

где I — момент инерции маятника вместе с застрявшей в нем пулей, h' — высота подъема пули. Строго говоря, не зная, в каком месте шара застряла пуля, мы не можем вычислить величины I и h'. Однако, по условию задачи, $M \gg m$, поэтому, пренебрегая массой пули по сравнению с массой шара, отбросим величину mgh' в уравнении (2) и вычислим момент инерции маятника на основании формулы (4.5в) и теоремы Штейнера (4.6):

$$I = {}^2/_5 MR^2 + M\,(2R)^2 = 4{,}4MR^2. \qquad (3)$$

Теперь определим угловую скорость ω, которую получит система в результате удара пули. Воспользуемся законом сохранения момента импульса. Возможность применения этого закона основана на следующем. Во время удара на систему маятник — пуля извне действуют силы тяжести и реакции опоры. Вторая сила проходит через ось вращения, поэтому ее момент равен нулю. Учитывая, что за время удара маятник не успеет заметно отклониться от вертикали, и принимая во внимание условие $M \gg m$, можно считать, что и первая сила во время удара проходит через ось и, следовательно, ее момент также равен нулю. Значит, согласно закону (4.10) момент импульса системы во время удара пули будет сохраняться. Обозначив через L_1 и L_2 моменты импульса системы соответственно в начале и конце процесса удара, можно записать

$$L_1 = L_2. \qquad (4)$$

Величина L_1 есть момент импульса летящей пули относительно оси вращения маятника (сам маятник пока еще неподвижен). На основании определения (4.3) имеем

$$L_1 = mv \cdot 2R.$$

Момент импульса L_2 маятника с застрявшей в нем пулей, согласно определению (4.8), равен

$$L_2 = I\omega = 4{,}4MR^2\omega. \tag{6}$$

Решая систему (4)—(6), получаем для угловой скорости

$$\omega = mv/2{,}2MR. \tag{7}$$

Исключив из системы (1)—(3), (7) неизвестные I, ω, h, найдем

$$\cos\alpha = 1 - m^2v^2/4{,}4M^2gR.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $M = 10{,}0$ кг, $m = 1{,}00 \cdot 10^{-2}$ кг, $R = 0{,}15$ м, $v = 800$ м/с, и произведя вычисления, получим:

$$\cos\alpha = 0{,}90;\ \alpha = 26°.$$

§ 5. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Основные формулы

Закон всемирного тяготения: две материальные точки, имеющие массы $m1$ и m_2 и находящиеся на расстоянии r, притягиваются с силой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

где $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ кг$^{-1}$·м^3·с$^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Напряженностью гравитационного поля называется векторная величина

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m'}, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{F}$ — сила, с которой поле действует на помещенную в данную точку частицу массой m'.

Напряженность гравитационного поля, созданного материальной точкой массы m на расстоянии r от нее,

$$G = \gamma \frac{m}{r^2}. \tag{5.3}$$

Потенциальная энергия тяготения двух материальных точек, массы которых m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r, при условии, что $W_\infty = 0$, равна

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \tag{5.4}$$

Потенциал гравитационного поля (определяющая формула)

$$\varphi = \frac{W}{m'}, \tag{5.5}$$

где W — потенциальная энергия частицы массой m', помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля, созданного материальной точкой массы m на расстоянии r от нее,

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r}. \tag{5.6}$$