Момент импульса L_2 маятника с застрявшей в нем пулей, согласно определению (4.8), равен

$$L_2 = I\omega = 4{,}4MR^2\omega. \qquad (6)$$

Решая систему (4)—(6), получаем для угловой скорости

$$\omega = mv/2{,}2MR. \qquad (7)$$

Исключив из системы (1)—(3), (7) неизвестные I, ω, h, найдем

$$\cos\alpha = 1 - m^2v^2/4{,}4M^2gR.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $M = 10{,}0$ кг, $m = 1{,}00\cdot10^{-2}$ кг, $R = 0{,}15$ м, $v = 800$ м/с, и произведя вычисления, получим:

$$\cos\alpha = 0{,}90;\ \alpha = 26°.$$

§ 5. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Основные формулы

Закон всемирного тяготения: две материальные точки, имеющие массы m_1 и m_2 и находящиеся на расстоянии r, притягиваются с силой

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (5.1)$$

где $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ кг$^{-1}\cdot$м$^3\cdot$с$^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Напряженностью гравитационного поля называется векторная величина

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m'}, \qquad (5.2)$$

где $\mathbf{F}$ — сила, с которой поле действует на помещенную в данную точку частицу массой m'.

Напряженность гравитационного поля, созданного материальной точкой массы m на расстоянии r от нее,

$$G = \gamma\frac{m}{r^2}. \qquad (5.3)$$

Потенциальная энергия тяготения двух материальных точек, массы которых m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r, при условии, что $W_\infty = 0$, равна

$$W = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (5.4)$$

Потенциал гравитационного поля (определяющая формула)

$$\varphi = \frac{W}{m'}, \qquad (5.5)$$

где W — потенциальная энергия частицы массой m', помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля, созданного материальной точкой массы m на расстоянии r от нее,

$$\varphi = -\gamma\frac{m}{r}. \qquad (5.6)$$

Работа сил поля по перемещению частицы m' между двумя точками поля, потенциалы которых φ_1 и φ_2,

$$A = \Delta W = m' (\varphi_1 - \varphi_2). \tag{5.7}$$

Законы Кеплера:

I. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

III Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{5.8}$$

Методические указания

1. Отметим, что в формулах (5.1), (5.4) r есть расстояние между *материальными точками*. Если взаимодействующие тела нельзя считать материальными точками, то эти формулы к ним неприменимы. Однако если неточечные тела обладают сферически симметричным распределением массы (например, однородные шары), то формулы (5.1), (5.4) дают правильный результат, если под r понимать расстояние между центрами взаимодействующих тел. Это же замечание относится и к формулам (5.3), (5.6), где r в случае сферической симметрии есть расстояние от центра тела до рассматриваемой точки*.

2. Задачи на движение тела под действием силы тяготения можно решать методами, основанными на применении к телу второго закона Ньютона, а к изолированной системе — законов сохранения (см. § 2, 3).

Использование величин, характеризующих гравитационное поле,— напряженности **G** и потенциала φ — часто упрощает решение задачи. Так, введение вектора **G** позволяет в некоторых случаях не рассматривать силы, действующие на тело (см. задачу № 5-2), а понятие потенциала — вычислять работу сил тяготения по формуле (5.7), когда тело движется в поле тяготения нескольких небесных тел (см.задачу № 5-4).

3. Законы Кеплера, описывающие движение планет вокруг Солнца, применимы также для движения тел во всяком центральном поле, например в поле тяготения Земли (см. задачу № 5-5). *Центральным* называют такое силовое поле, в котором сила, действующая на каждую частицу, зависит только от ее расстояния до определенной точки — центра поля и направлена всегда по радиусу, проведенному из центра поля к частице.

Решение задач

5-1. Определить напряженность G_0 и потенциал φ_0 гравитационного поля Земли около ее поверхности.

Решение. Задачу можно решить при помощи формул (5.3), (5.6), в которые подставляются значения m и r для Земли, взятые из

* Теми же методами, которые применяются в электростатике, можно показать, что гравитационное поле тела, обладающего сферически симметричным распределением массы, в точках вне тела таково, как если бы вся масса тела была сосредоточена в центре.

справочных таблиц. Однако есть более короткий способ. Формула (5.2) выражает величину G через отношение силы тяготения, действующей на частицу, к массе этой частицы. Но согласно второму закону Ньютона это отношение равно ускорению a частицы, которое она получает под действием силы тяготения. Следовательно,

$$G = a.$$

У поверхности Земли это ускорение есть ускорение силы тяжести g — величина, постоянная для всех тел. Таким образом, получаем

$$G_0 = g \approx 9{,}8 \text{ Н/кг}.$$

Зная напряженность гравитационного поля Земли, найдем из соотношений (5.6) и (5.3) его потенциал:

$$\varphi_0 = -G_0 r = -9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = -6{,}2 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}.$$

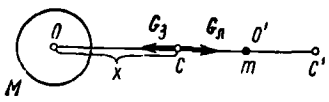

Рис 5-1

5-2. На каком расстоянии от центра Земли должно находиться тело, чтобы силы его притяжения к Земле и Луне взаимно уравновешивались? Считать, что масса M Земли больше массы m Луны в 81 раз, а расстояние между их центрами равно 60 радиусам Земли.

Решение. Так как, по условию, сила **F** суммарного гравитационного поля Земли и Луны, действующая на помещенное в искомую точку тело, равна нулю, из формулы (5.2) следует, что и величина **G** в этой точке равна нулю. Здесь **G** — сумма векторов напряженности $\mathbf{G}_З$ и $\mathbf{G}_Л$ полей Земли и Луны соответственно. Сумма двух векторов равна нулю только тогда, когда они противоположны по направлению и равны по модулю:

$$G_З = G_Л. \qquad (1)$$

Поскольку векторы напряженности гравитационных полей как Земли, так и Луны направлены к их центрам, легко сообразить, что искомая точка C должна лежать на отрезке прямой OO', соединяющем центры Земли и Луны (рис. 5-1). Обозначим: $OC = x$. Тогда $O'C = 60R - x$. Подставив в (1) значения напряженностей $G_З$ и $G_Л$ по формуле (5 3) и учитывая данное в условии соотношение масс Земли и Луны ($M = 81m$), запишем

$$\gamma \frac{81m}{x^2} = \gamma \frac{m}{(60R - x)^2}.$$

Решив уравнение, найдем:

$$x_1 = 54R, \; x_2 = 67{,}5\,R.$$

Корень $x_2 > 60\,R$ означает, что искомая точка лежит на прямой OO' за Луной (точка C' на рис. 5-1). Очевидно, это значение x_2 не удовлетворяет условию, ибо поля Земли и Луны, будучи в точке C' одинаково направленными, не уравновешивают друг друга, несмотря на равенство модулей векторов $\mathbf{G}_З$ и $\mathbf{G}_Л$. Отбросив корень x_2, получим ответ: $x = 54R$.

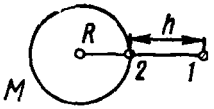

Рис 5 2

5-3. Ракета, летевшая над поверхностью Земли на высоте h, в результате кратковременного действия мощной тормозной установки останавливается. С какой скоростью упадет ракета на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. После прекращения работы тормозной установки на ракету действует лишь гравитационное поле Земли Это поле потенциально: полная энергия тела, движущегося в этом поле, равная сумме его кинетической и потенциальной энергий, сохраняется.

В предыдущих параграфах мы уже рассматривали движение тел под действием силы тяготения При этом , ограничиваясь небольшими по сравнению с размерами Земли участками пространства, считали поле тяготения однородным, т. е. принимали $\mathbf{G} = \text{const}$ для всех точек пространства. В настоящей задаче этого сделать нельзя. Поэтому формулу потенциальной энергии поднятого над Землей тела $W_п = mgh$, справедливую лишь для однородного поля, надо заменить более общей формулой потенциальной энергии тяготения (5.4).

Из закона сохранения энергии, примененного к системе ракета — Земля, следует, что падающая ракета приобретает кинетическую энергию за счет убыли потенциальной энергии в поле тяготения Земли, т. е.

$$W_к = -\Delta W_п, \tag{1}$$

где $W_к$ — кинетическая энергия ракеты у поверхности Земли, $\Delta W_п = W_{п2} - W_{п1}$ — изменение потенциальной энергии ракеты за время ее падения из точки *1* в точку *2* (рис. 5-2). Подставив в уравнение (1) значения энергий $W_{п1}$ и $W_{п2}$ по формуле (5.4), а также значение $W_к$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \left(-\gamma\frac{Mm}{R+h}\right) - \left(-\gamma\frac{Mm}{R}\right) \tag{2}$$

где M и R — масса и радиус Земли, m — масса ракеты. Решив это уравнение относительно v, найдем

$$\sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}. \tag{3}$$

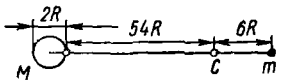

Рис 5 3

5-4. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы забросить тело массы $m' = 1000$ кг с поверхности Земли на Луну? Считать, что при перемещении тела взаимное положение Луны и Земли не меняется. Сопротивление воздуха не учитывать. Остальные данные взять из задачи № 5-2.

Решение. В задаче № 5-2 была найдена точка, в которой гравитационные поля Земли и Луны уравновешиваются. Эта точка C (рис. 5-3) делит весь путь ракеты на две части. На первом участке от Земли до точки C сила тяготения суммарного гравитационного поля Земли и Луны направлена к Земле, на втором участке от точки C до Луны — к Луне. Очевидно, на первом участке необходимо совершать

работу против силы тяготения, на втором участке — не обязательно*. Работа будет минимальной, если тело достигнет точки C с минимальной скоростью, необходимой для дальнейшего движения. Эту скорость, а значит, и кинетическую энергию в точке C можно считать равной нулю, ибо, достигнув точки C с любой, сколь угодно малой скоростью, тело тут же начнет двигаться ускоренно к Луне. Таким образом, работа пойдет только на увеличение потенциальной энергии тела в суммарном поле тяготения Земли и Луны. Поэтому она может быть вычислена по формуле (5.4) или (5.7).

Так как соотношение (5.7) определяет работу сил поля, а надо найти работу против сил поля, то для искомой величины запишем

$$A = -m'(\varphi_1 - \varphi_2) = m'(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (1)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы гравитационного поля у поверхности Земли и в точке C соответственно.

Чтобы правильно вычислить потенциалы φ_1 и φ_2, учтем, что тело движется все время в суммарном гравитационном поле Земли и Луны.

Из принципа суперпозиции (наложения) полей следует, что потенциал в каждой точке пространства, в котором существуют несколько полей, равен сумме потенциалов каждого поля в отдельности. Таким образом, для каждой точки потенциал суммарного поля

$$\varphi = \varphi_З + \varphi_Л, \qquad (2)$$

где $\varphi_Л$ и $\varphi_З$ — потенциалы полей тяготения Земли и Луны в этой точке. Учитывая соотношения, приведенные в условии задачи № 5-2, а также полученный результат ($x = 54R$), на основании формул (5.6) и (2) вычислим потенциалы φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = -\gamma\frac{M}{R} - \gamma\frac{M/81}{59R} \approx -\gamma\frac{M}{R},$$

$$\varphi_2 = -\gamma\frac{M}{54R} - \gamma\frac{M/81}{6R} = -0{,}020\gamma\frac{M}{R}.$$

Подставив эти значения потенциалов в формулу (1), получим

$$A = 0{,}98\gamma\frac{Mm'}{R} = 0{,}98\,|\varphi_0|\,m',$$

где $|\varphi_0| = \gamma M/R$ — абсолютное значение потенциала гравитационного поля Земли у ее поверхности.

Так как $|\varphi_0| = 6{,}2\cdot10^7$ Дж/кг (см. задачу № 5-1), а $m' = 1000$ кг по условию, то, подставив эти значения в последнюю формулу,

$$A = 0{,}98\cdot6{,}2\cdot10^7\cdot10^3 \text{ Дж} = 6{,}1\cdot10^{10} \text{ Дж}.$$

Замечание. Если вычислить искомую работу по формуле (5.7), применив ее для всего пути от Земли до Луны, т. е. считать φ_1 потенциалом поля у поверхности Земли, а φ_2 — потенциалом поля у поверхности Луны, то будет получен неверный ответ. Дело в том, что в результате перемещения тела от Земли к Луне возрастет не только его потенциальная энергия, но и кинетическая: если движение нача-

* Если движущимся к Луне телом является ракета, то для ее мягкой посадки нужно совершить работу и на втором участке: двигатели тормозной установки должны погасить скорость ракеты, подлетающей к Луне.

лось из состояния покоя, то в конце пути тело, разогнанное силой притяжения к Луне, будет обладать определенной скоростью. Работа, совершенная над телом, равна изменению *полной* энергии тела, а не только потенциальной. Однако формула (5.7) выражает только работу, которая обусловлена изменением потенциальной энергии тела в поле тяготения, поэтому не дает правильного ответа, если ее применить для всего пути движения тела от Земли до Луны.

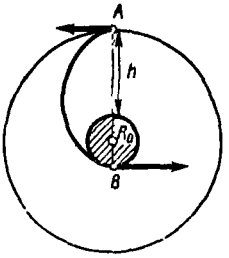

Рис 5 4

5-5. Ракета, летевшая по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли, в результате кратковременного действия тормозной установки уменьшила свою скорость и начала снижаться. Двигаясь все время под действием силы тяжести, ракета достигает Земли, причем ее скорость в этот момент направлена по касательной к земной поверхности. Определить время спуска ракеты.

Решение. Движение ракеты в поле тяготения Земли, как и движение тела во всяком центральном поле, подчиняется законам Кеплера. Из I закона следует, что во время спуска ракета двигалась по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр земного шара (рис. 5-4). Выясним, какую часть эллипса составила траектория ракеты на участке спуска. Поскольку под действием тормозной установки изменился лишь модуль скорости, но не ее направление, можно заключить, что в момент начала спуска скорость ракеты была перпендикулярна ее радиусу-вектору. Таково же направление скорости ракеты относительно радиуса-вектора в конце спуска, так как по условию в этот момент ракета двигалась по касательной к поверхности.

Существуют лишь две точки эллипса (точки A и B, рис. 5-4), в которых радиус-вектор перпендикулярен касательной к кривой. Эти точки лежат на большой оси эллипса, являющейся осью его симметрии.

Так как скорость ракеты направлена по касательной к траектории, то приходим к выводу, что траектория ракеты на участке ее спуска представляет собой половину эллипса.

Теперь, применив III закон Кеплера, можно определить время спуска ракеты. Для этого сопоставим движение двух тел в поле тяготения Земли: ракеты и Луны, имея в виду, что для последней период ее обращения $T_л$ и радиус орбиты $R_л$ (принимаем приближенно движение Луны круговым) являются табличными величинами. По III закону Кеплера имеем

$$T^2/T_л^2 = a^3/R_л^3 \qquad (1)$$

Здесь a — большая полуось орбиты ракеты, T — период ее обращения по эллипсу. Как видно из рис. 5-4, где R_0 — радиус Земли,

$$a = R_0 + h/2, \qquad (2)$$

Учитывая, что время t спуска ракеты равно половине периода T ее обращения, из уравнений (1) и (2) найдем

$$t = (T_л/2)\,(R_0 + h/2)^{3/2}/R_л^{3/2}.$$