6-4. Трубка длиной l вращается около вертикальной оси, проходящей через ее середину перпендикулярно оси трубки, с угловой скоростью ω. Температура воздуха равна T. Принимая давление воздуха внутри трубки вблизи ее открытых концов равным атмосферному p_0, определить давление воздуха в середине трубки.

Решение. При установившемся распределении давления воздуха в трубке он будет вращаться вместе с ней с угловой скоростью ω. При этом каждая частица воздуха, находящаяся на расстоянии r от центра вращения, будет иметь нормальное ускорение, направленное к центру и равное

$$a_n = \omega^2 r. \tag{1}$$

Задача решается наиболее просто, если воздушный столб в трубке рассмотреть в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с трубкой. В этой системе отсчета воздух неподвижен. Однако теперь в соответствии с изложенным в § 2 (п.В) следует считать, что в трубке появилось поле тяготения, обусловленное свойствами выбранной системы отсчета. В каждой точке этого поля ускорение силы тяжести $\mathbf{g}' = -\mathbf{a}_n$, т. е. направлено по радиусу от центра. Следовательно, для воздушного столба в трубке, находящегося в этом радиальном поле тяготения, должно быть распределение давления, подобное тому, что имеется в атмосфере под влиянием поля земного тяготения. При перемещении от центра к концу трубки давление возрастает.

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой (6.3), положив в ней высоту h равной расстоянию, отсчитанному от открытого (любого) конца трубки, играющего роль нулевого уровня, до центра трубки, находящегося на «высоте», равной $l/2$, т. е. $h = l/2$. При этом учтем, что рассматриваемое нами радиальное поле не однородно: ускорение силы тяжести g', как это следует из (1), возрастает от центра трубки к ее концам. Так как g' зависит линейно от r, за его среднее значение примем среднее арифметическое между значениями $g_1' = \omega^2 l/2$ у конца трубки и $g_2' = 0$ в ее центре, т. е.

$$g'_{\text{ср}} = \frac{g_1' + g_2'}{2} = \frac{\omega^2 l}{4}.$$

Подставив значения $h = l/2$ и $g = g'_{\text{ср}}$ в формулу (6.3), получим

$$p = p_0 e^{-\mu\omega^2 l^2/8RT}.$$

§ 7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

Основные формулы

Средняя квадратичная скорость определяется соотношением

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}}, \tag{7.1}$$

где v_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) — скорость i-й частицы, N — число частиц.

Основное уравнение кинетической теории газов: давление газа численно равно двум третям средней кинетической энергии поступательного движения всех молекул в единице объема, т. е.

$$p = (2/3)\, n < w >, \tag{7.2}$$

где n — число молекул в единице объема (концентрация молекул), $\langle w \rangle = \langle mv^2 \rangle / 2$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы. Для однородного по составу частиц газа $\langle w \rangle = mv_{кв}^2/2$

Зависимость средней кинетической энергии поступательного движения молекул от температуры

$$\langle w \rangle = (3/2)\, kT, \tag{7.3}$$

где k — постоянная Больцмана, равная

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}3}{6{,}02 \cdot 10^{23}}\ \text{Дж/К} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К};$$

здесь N_A — постоянная Авогадро (число молекул, содержащихся в одном моле вещества)

Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT. \tag{7.4}$$

Числом степеней свободы i называется число независимых величин, с помощью которых может быть задано положение тела или частицы. Для молекул одноатомного газа $i = 3$, двухатомного газа $i = 5$, трех- и более атомных газов $i = 6$.

Средняя кинетическая энергия (поступательного и вращательного движения) молекулы

$$\langle w_i \rangle = \frac{i}{2}\, kT. \tag{7.5}$$

Закон распределения молекул по скоростям (закон Максвелла): число молекул ΔN, относительные скорости которых лежат в интервале от u до $u + \Delta u$, равно

$$\Delta N = Nf(u)\, \Delta u. \tag{7.6}$$

Здесь N — полное число молекул газа, $f(u) = (4/\sqrt{\pi})\, e^{-u^2} u^2$ — функция распределения Максвелла, $u = v/v_в$, где v — данная скорость, $v_в$ — наиболее вероятная скорость.

Скорости газовых молекул вычисляются по формулам:

$$v_в = \sqrt{2RT/\mu} \text{ — наиболее вероятная;} \tag{7.7}$$

$$v_{кв} = \sqrt{3RT/\mu} \text{ — средняя квадратичная;} \tag{7.8}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu} \text{ — средняя арифметическая.} \tag{7.9}$$

Среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой за секунду,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\, \pi\sigma^2 n \langle v \rangle, \tag{7.10}$$

где σ — эффективный диаметр молекулы, n — концентрация молекул.

Методические указания

1. В кинетической теории, рассматривающей газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся молекул и являющейся поэтому статистической теорией, употребляются различные типы средних скоростей молекул: средняя квадратичная $v_{кв}$, средняя арифме-

тическая $\langle v \rangle$ и наиболее вероятная $v_в$. Эти три скорости связаны между собой зависимостью, определяемой формулами (7.7)—(7.9); для одного и того же газа при одной и той же температуре имеем $v_в : \langle v \rangle : v_{кв} = 1{,}41 : 1{,}60 : 1{,}73$.

Средней квадратичной скоростью $v_{кв}$ пользуются в тех случаях, когда необходимо рассчитать какую-либо физическую величину, пропорциональную квадрату скорости, например кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, давление газа.

Средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$ позволяет определять средние значения таких физических величин, характеризующих свойства газа, в формулу которых скорость входит в первой степени, например, среднее число столкновений молекулы в единицу времени, среднее время свободного пробега, средний импульс молекул.

Наиболее вероятной скоростью $v_в$ пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям (7.6). Этой скорости соответствует максимум функции распределения

$$f(u) = (4/\sqrt{\pi})\, e^{-u^2} u^2.$$

2. Закон распределения молекул по скоростям, записанный в форме (7.6), справедлив лишь для малых интервалов скоростей Δu, когда выполняется неравенство $\Delta u \ll u$, или, поскольку $u = v/v_в$ и $\Delta u = \Delta v/v_в$, равносильное неравенство $\Delta v \ll v$. Если же в задаче идет речь о больших интервалах скоростей, не удовлетворяющих указанным неравенствам, закон распределения скоростей необходимо писать в дифференциальной форме, заменяя величины ΔN и Δu дифференциалами dN и du. Интегрируя правую часть уравнения в пределах от u_1 до u_2, вычисляют полное число молекул ΔN, скорости которых лежат в интервале $\Delta u = u_2 - u_1$.

3. Основное уравнение кинетической теории газов (7.2), а также закон Максвелла о распределении молекул по скоростям (7.6) справедливы лишь для *идеального* газа, ибо при их выводе не учитывается взаимодействие молекул на расстоянии; соударения молекул уподобляются удару упругих шаров. Поэтому уравнения (7.2) и (7.6) и связанные с ними уравнения (7.4), (7.7)—(7.10) применяются только для не слишком сильно сжатых газов и паров.

Решение задач

7-1. Плотность смеси азота и водорода при температуре $t = 47$ °C и давлении $p = 2{,}00$ ат равна $\rho = 0{,}30$ г/л. Найти концентрации молекул азота (n_1) и водорода (n_2) в смеси.

Решение. Концентрацию однородного по составу газа, очевидно, можно найти из формулы (7.4). Но в условии дана смесь двух газов, молекулы которых различаются по массе. Выясним, можно ли в этом случае применять формулу (7.4).

Соотношение (7.4) можно рассматривать как следствие основного уравнения кинетической теории газов (7.2). Однако из вывода (7.2)

вытекает, что оно справедливо для совокупности любых частиц, в том числе различных по массе. Следовательно, и формулу (7.4) можно применять для смеси газов. В этом случае n — полное число частиц в единице объема. Таким образом, из (7.4) имеем

$$n = p/kT. \tag{1}$$

Для определения концентраций азота и водорода кроме очевидного соотношения

$$n_1 + n_2 = n = p/kT \tag{2}$$

необходимо иметь еще одно уравнение, связывающее величины n_1 и n_2. В связи с этим учтем следующее. Используя данные задачи, можно найти молярную массу $\mu_{см}$ смеси рассматриваемых газов. Действительно, из уравнения газового состояния вытекает, что

$$\mu_{см} = \frac{mRT}{Vp} = \rho\,\frac{RT}{p}. \tag{3}$$

С другой стороны, можно выразить $\mu_{см}$ через молярные массы азота (μ_1) и водорода (μ_2), а также их концентрации n_1 и n_2. Для этого воспользуемся ответом к задаче № 6-2, выражающим величину $\mu_{см}$ через μ_1, μ_2 и массы m_1, m_2 компонентов смеси. Заметим также, что между массой m газа и его концентрацией n существует зависимость

$$m = nVm' = nV\mu/N_A, \tag{4}$$

где V — объем газа, μ — его молярная масса, m' — масса одной молекулы. Подставив значения m_1 и m_2 по (4) в формулу, выведенную в задаче № 6-2 для молярной массы смеси, и произведя сокращения, найдем

$$\mu_{см} = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2)/(n_1 + n_2). \tag{5}$$

Приравнивая правые части соотношений (3) и (5), получим

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{\rho RT}{p}. \tag{6}$$

Решив систему (2) и (6), найдем неизвестные n_1 и n_2:

$$n_1 = \frac{\rho RT - p\mu_2}{kT(\mu_1 - \mu_2)}; \quad n_2 = \frac{\rho RT - p\mu_1}{kT(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $p = 2{,}00 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4$ Па, $T = 320$ К, $\rho = 0{,}30$ кг/м^3, $\mu_1 = 0{,}028$ кг/моль, $\mu_2 = 0{,}0020$ кг/моль, $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Подставив эти значения в формулы и выполнив вычисление, получим:

$$n_1 = 2{,}4 \cdot 10^{24}\ \text{м}^{-3},\quad n_2 = 4{,}2 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

7-2. Сосуд, содержащий газ, движется со скоростью v_0, затем быстро останавливается. На сколько увеличится при этом средний квадрат скорости теплового движения молекул газа в случаях: одноатомного газа? двухатомного газа? Газ считать идеальным.

Решение. Воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть M — масса газа в сосуде. Двигаясь со скоростью v_0, газ, как целое, обладает кинетической энергией

$$W_к = Mv_0^2/2. \qquad (1)$$

Формула (1) определяет кинетическую энергию направленного движения молекул, в котором они участвуют вместе с сосудом. После остановки сосуда направленное движение молекул в результате их соударений со стенками сосуда очень скоро превратится в хаотическое. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда за рассматриваемый малый промежуток времени, можно газ считать изолированной системой. Тогда из закона сохранения энергии следует, что «исчезнувшая» кинетическая энергия направленного движения молекул $W_к$ должна быть равна приросту энергии хаотического движения молекул (приросту внутренней энергии) ΔU:

$$W_к = \Delta U. \qquad (2)$$

Подсчитаем внутреннюю энергию газа.

Для идеального *одноатомного* газа это есть энергия поступательного хаотического движения молекул:

$$U = \sum_{i=1}^{N} mv_i^2/2, \qquad (3)$$

где m — масса молекулы, N — число молекул в сосуде. Вынося множитель $m/2$ за знак суммы и используя понятие средней квадратичной скорости, определяемой по (7.1), перепишем равенство (3):

$$U = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{m}{2}Nv_{кв}^2 = \frac{Mv_{кв}^2}{2}.$$

Отсюда следует, что изменение внутренней энергии одноатомного газа при торможении

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{Mv_{кв2}^2}{2} - \frac{Mv_{кв1}^2}{2}, \qquad (4)$$

где $v_{кв1}$, $v_{кв2}$ — средние квадратичные скорости молекул газа соответственно в начале и конце торможения. Подставив в (2) значения $W_к$ из (1) и ΔU из (4), получим первый ответ:

$$v_{кв2}^2 - v_{кв1}^2 = v_0^2.$$

Внутренняя энергия идеального *двухатомного* газа складывается из энергий поступательного и вращательного движения молекул. При этом три степени свободы приходятся на поступательное движение и две — на вращательное. В соответствии с законом о равномерном

распределении энергии по степеням свободы, следствием которого является формула (7.5), три пятых кинетической энергии $W_к$ пойдет на увеличение энергии поступательного движения молекул и две пятых — на увеличение энергии их вращательного движения. Таким образом, теперь имеем

$$\frac{3}{5}\frac{Mv_0^2}{2}=\frac{Mv_{кв2}^2}{2}-\frac{Mv_{кв1}^2}{2},$$

откуда получим второй ответ:

$$v_{кв2}^2-v_{кв1}^2=0{,}6\,v_0^2.$$

7-3. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не свыше чем на 5,0 м/с? Задачу решить для двух значений T: 1) 400 К, 2) 900 К.

Решение. Распределение молекул по скоростям выражается уравнением (7.6), справедливым при условии $\Delta u \ll u$. Поскольку в задаче идет речь о наиболее вероятной скорости, надо считать $v = v_в$. Следовательно, $u = (v/v_в) = 1$ и уравнение (7.6) примет более простой вид:

$$\Delta N=(4/\sqrt{\pi}\,e)\,N\Delta u.$$

Отсюда найдем ту часть молекул, относительные скорости которых лежат в интервале Δu:

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}\,e}\,\Delta u. \qquad (1)$$

Прежде чем производить расчеты по (1), необходимо убедиться в том, что выполняется условие $\Delta u \ll u$. Так как $u = v/v_в$, то

$$\Delta u = \Delta v/v_в. \qquad (2)$$

Чтобы вычислить Δu по (2), найдем сначала наиболее вероятную скорость $v_в$ по формуле (7.7) при $T_1 = 400$ К и $T_2 = 900$ К соответственно:

$$v_{в1}=\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 400}{0{,}002}}\ \text{м/с}=1{,}82\cdot 10^3\ \text{м/с},$$

$$v_{в2}=\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 900}{0{,}002}}\ \text{м/с}=2{,}73\cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Подставляя эти значения $v_в$ в (2) и имея в виду, что $\Delta v = 10{,}0$ м/с, поскольку в задаче идет речь о скоростях, лежащих в интервале от $v_в - 5{,}0$ м/с до $v_в + 5{,}0$ м/с, получим:

$$\Delta u_1 = 1/182,\quad \Delta u_2 = 1/273.$$

Так как $u = 1$, видим, что условие $\Delta u \ll u$ выполняется для обеих температур*. Теперь по формуле (1) найдем ответы

$$1)\ \frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,e}\Delta u_1 = \frac{4}{\sqrt{3,14}\cdot 2,7\cdot 182} = 0,0046,$$

$$2)\ \frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,e}\Delta u_2 = \frac{4}{\sqrt{3,14}\cdot 2,7\cdot 273} = 0,0030.$$

Замечание. Таким образом, при увеличении температуры наиболее вероятная скорость молекул увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной, уменьшается. На графике, выражающем функцию распределения скоростей молекул $f(v)$, с увеличением температуры ($T_2 > T_1$) максимум кривой сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается (рис. 7-1).

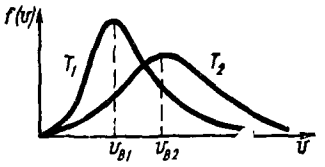

Рис 7-1

7-4. Какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость?

Решение. В условии задачи речь идет о молекулах, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости $v_в$ до $v_в + \infty$, т. е. в бесконечно большом интервале скоростей Δv. Таким образом, условие применимости закона распределения скоростей (7.6), заключающееся в том, что $\Delta u \ll u$, или $\Delta v \ll v$, здесь не выполняется. Поэтому от уравнения в форме (7.6) надо перейти к дифференциальной форме этого закона:

$$dN = (4/\sqrt{\pi})\,N e^{-u^2} u^2\,du. \qquad (1)$$

Полное число ΔN молекул, относительные скорости которых лежат в заданном интервале от u_1 до u_2, найдем, интегрируя правую часть (1) в этих пределах:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} u^2\,du. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является общей формой записи закона распределения скоростей молекул, справедливой для любых интервалов скоростей.

Учитывая, что относительная скорость $u = v/v_в$ и что в нашей задаче $v_1 = v_в$ и $v_2 = \infty$, получим: $u_1 = 1$ и $u_2 = \infty$. Следовательно, искомая часть молекул выразится интегралом:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-u^2} u^2\,du. \qquad (3)$$

* Вместо неравенства $\Delta u \ll u$ можно пользоваться равносильным ему неравенством $\Delta v \ll v$ как критерием применимости уравнения (7 6) Тогда , вычислив скорости $v_{в1}$ и $v_{в2}$ и сравнив их с заданной величиной Δv, можно сразу судить о применимости (7.6) в условиях данной задачи.

Чтобы избежать математических трудностей, связанных с нахождением несобственного интеграла, воспользуемся тем очевидным фактом, что скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до ∞. Поэтому, если обозначить через $\Delta N'$ число молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной, т. е. лежат в интервале от 0 до 1, то можно записать

$$\frac{\Delta N}{N}+\frac{\Delta N'}{N}=1. \tag{4}$$

Таким образом, вместо того чтобы искать $\Delta N/N$ по (3), можно найти $\Delta N'/N$ по формуле

$$\frac{\Delta N'}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-u^2}u^2\,du, \tag{5}$$

а затем по (4) вычислить $\Delta N/N$.

Так как интеграл в (5) все же в конечном виде не берется, воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию $e^{-u^2}u^2$ в ряд Маклорена:

$$e^{-u^2}=1-\frac{u^2}{1}+\frac{u^4}{2}-\frac{u^6}{6}+\frac{u^8}{24}-\ldots$$

$$e^{-u^2}u^2=u^2-\frac{u^4}{1}+\frac{u^6}{2}-\frac{u^8}{6}+\frac{u^{10}}{24}-\ldots$$

Теперь, производя интегрирование по (5), имеем

$$\frac{\Delta N'}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{14}-\frac{1}{54}+\frac{1}{264}-\ldots\right).$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения, найдем с погрешностью, не превышающей 0,01:

$$\Delta N'/N = 0{,}43.$$

Отсюда на основании (4) получим ответ:

$$\Delta N/N = 1 - 0{,}43 = 0{,}57.$$

Замечания: 1. Интеграл (2) можно найти тем же методом, которым был вычислен интеграл (5), и таким образом решить общую задачу об определении числа молекул ΔN, скорости которых лежат в любом конечном интервале скоростей $\Delta u=u_2-u_1$.

2. Используя примененный в задаче метод вычисления интеграла

$$\int_0^u e^{-u^2}u^2\,du,$$

можно найти долю молекул $\Delta N/N$, относительные скорости которых превышают любое заданное значение u, по формуле

$$\frac{\Delta N}{N}=1-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-u^2}u^2\,du. \tag{6}$$

В некоторых задачниках имеются справочные таблицы, в которых приведены результаты вычислений по (6) для ряда значений u. В таком случае задача обычно сводится к тому, чтобы по известным значениям скорости v, молярной массы μ газа и температуры T определить относительную скорость $u = v/v_в$ и затем по таблице найти искомую величину $\Delta N/N$.

7-5. Найти число столкновений Z, которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объеме $V = 1{,}0$ мм^3 водорода при нормальных условиях. Принять для водорода $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Число столкновений z, испытываемых одной молекулой за секунду, определяется формулой (7.10). Чтобы установить соотношение между величинами z и Z, учтем, что если умножить число столкновений одной молекулы за секунду z на число всех молекул N, то получим результат, превышающий в два раза искомое число Z. Действительно, в одном столкновении участвуют сразу две молекулы, поэтому в число zN каждое столкновение входит дважды: один раз в счет столкновений одной из молекул данной пары, другой раз в счет столкновений второй молекулы. Следовательно, правильным будет выражение

$$Z = \frac{zN}{2} = \frac{znV}{2}, \tag{1}$$

где n — концентрация молекул. Подставив в (1) вместо z его значение по (7.10), получим

$$Z = \frac{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n^2 \langle v\rangle V}{2}.$$

Найдем из формулы (7.4) концентрацию n молекул и воспользуемся выражением (7.9) для средней арифметической скорости $\langle v\rangle$. Тогда окончательно для Z имеем

$$Z = \frac{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 p^2 V}{2k^2 T}\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}}.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $V = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ м^3, $p = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К, $\mu = 2{,}00 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). Подставив эти значения в формулу и выполнив вычисление, получим

$$Z = 1{,}6 \cdot 10^{26}\ \text{с}^{-1}.$$

§ 8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы

Первое начало термодинамики. количество теплоты, сообщенное системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и совершение системой работы над окружающими телами, т. е.

$$Q = \Delta U + A. \tag{8.1}$$