

В некоторых задачниках имеются справочные таблицы, в которых приведены результаты вычислений по (6) для ряда значений u . В таком случае задача обычно сводится к тому, чтобы по известным значениям скорости v , молярной массы μ газа и температуры T определить относительную скорость $u = v/v_b$ и затем по таблице найти искомую величину $\Delta N/N$.

7-5. Найти число столкновений Z , которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объеме $V = 1,0 \text{ мм}^3$ водорода при нормальных условиях. Принять для водорода $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Решение. Число столкновений z , испытываемых одной молекулой за секунду, определяется формулой (7.10). Чтобы установить соотношение между величинами z и Z , учтем, что если умножить число столкновений одной молекулы за секунду z на число всех молекул N , то получим результат, превышающий в два раза искомое число Z . Действительно, в одном столкновении участвуют сразу две молекулы, поэтому в число zN каждое столкновение входит дважды: один раз в счет столкновений одной из молекул данной пары, другой раз в счет столкновений второй молекулы. Следовательно, правильным будет выражение

$$Z = \frac{zN}{2} = \frac{znV}{2}, \quad (1)$$

где n — концентрация молекул. Подставив в (1) вместо z его значение по (7.10), получим

$$Z = \frac{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n^2 \langle v \rangle V}{2}.$$

Найдем из формулы (7.4) концентрацию n молекул и воспользуемся выражением (7.9) для средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. Тогда окончательно для Z имеем

$$Z = \frac{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p^2 V}{2k^2 T} \sqrt{\frac{8R}{\pi \mu T}}.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $V = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$, $p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T = 273 \text{ К}$, $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Подставив эти значения в формулу и выполнив вычисление, получим

$$Z = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-1}.$$

§ 8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы

Первое начало термодинамики. количество теплоты, сообщенное системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и совершение системой работы над окружающими телами, т. е.

$$Q = \Delta U + A. \quad (8.1)$$

Внутренняя энергия одного моля идеального газа

$$U_0 = \frac{l}{2} kTN_A = \frac{l}{2} RT. \quad (8.2)$$

Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимой для нагревания одного моля вещества на один кельвин:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}, \quad (8.3)$$

где $\nu = m/\mu$ — число молей.

Молярная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов,

$$C = \frac{C_1 \nu_1 + C_2 \nu_2 + \dots + C_n \nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}. \quad (8.4)$$

Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания единицы массы вещества на один кельвин,

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}. \quad (8.5)$$

Удельная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов,

$$c_{cm} = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (8.6)$$

Связь между удельной и молярной теплоемкостями

$$c = C/\mu. \quad (8.7)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{dU_0}{dT} = lR/2. \quad (8.8)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_p = C_V + R = (l + 2) R/2. \quad (8.9)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{l}{2} RT = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (8.10)$$

При элементарном изменении объема газа совершается работа

$$dA = pdV. \quad (8.11)$$

Работа газа при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1) \quad (8.12)$$

Работа идеального газа при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.13)$$

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса в идеальном газе

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (8.14)$$

где $\gamma = C_p/C_V$ — отношение молярных (или удельных) теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме.

Работа идеального газа при адиабатическом процессе выражается следующими формулами:

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2), \quad (8.15)$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R T_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (8.16)$$

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (8.17)$$

где A — работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла, Q_1 — количество теплоты, полученное от нагревателя за это время рабочим веществом, Q_2 — количество теплоты, отданное им при этом холодильнику, T_1 и T_2 — наивысшая и наименее высокая температуры рабочего вещества.

Знак равенства в (8.17) относится только к машине, работающей по циклу Карно.

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния A в состояние B , равно

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \quad (8.18)$$

где dQ — элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре T .

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается — она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов, т. е.

$$\Delta S \geq 0 \quad (8.19)$$

А. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗАМ

Методические указания

1. Приступая к решению задачи по данной теме, прежде всего необходимо выяснить характер процесса, протекающего в газе (разумеется, если об этом не оговорено в условии). Как правило, это не вызывает трудностей в случае изохорного ($V=\text{const}$) или изобарного ($p=\text{const}$) процесса.

Для осуществления изотермического процесса ($T=\text{const}$) расширения или сжатия газа необходим достаточный теплообмен между газом и окружающей средой. Этому способствуют большая теплопроводность стенок сосуда, в котором заключен газ, и медленное протекание процесса. Наоборот, условием адиабатического процесса расширения или сжатия газа является отсутствие теплообмена между газом и окружающей средой. Это условие на практике выполняется тем точнее, чем меньше теплопроводность стенок сосуда, содержащего газ, и чем быстрее протекает процесс.

2. В изохорном и изобарном процессах количество теплоты, полученное газом, всегда связано с изменением его температуры [см. формулу (8.3)]:

$$dQ = v C dT.$$

где $C = C_V$ при изохорном процессе и $C = C_p$ при изобарном (при этом $C_p > C_V$). Поскольку обе молярные теплоемкости C_p и C_V – величины положительные, знаки приращений dQ и dT всегда совпадают. Следовательно, при нагревании ($dT > 0$) газ получает тепло ($dQ > 0$) и, наоборот, при охлаждении ($dT < 0$) газ отдает тепло ($dQ < 0$).

Вместе с тем при изотермическом и адиабатическом процессах не существует связи между приращением температуры газа и количеством теплоты, полученным им, по той причине, что в первом процессе отсутствует изменение температуры ($dT = 0$), хотя газ при этом получает или отдает тепло, а во втором процессе, наоборот, газ не получает и не отдает тепла ($dQ = 0$), хотя при этом изменяется его температура.

Решение задач

8-1. Баллон емкостью $V = 20,0$ л с кислородом при давлении $p_1 = 100$ ат и температуре $t_1 = 7^\circ\text{C}$ нагревается до $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

Решение. Поскольку коэффициенты теплового расширения для твердых тел значительно меньше (приблизительно в сто раз), чем для газа, в условиях данной задачи можно пренебречь расширением баллона и считать процесс нагревания газа изохорным.

В зависимости от того, применять ли непосредственно первое начало термодинамики или формулу, определяющую теплоемкость тела, возможны два способа решения.

1. Применим к рассматриваемому газу первое начало термодинамики. Поскольку при изохорном процессе газ не совершает работы, из уравнения (8.1) получим

$$Q = \Delta U,$$

т. е. все сообщенное газу тепло идет на приращение его внутренней энергии. Из формулы (8.10), используя уравнение газового состояния, запишем

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} pV.$$

Отсюда для изменения внутренней энергии имеем

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} (p_2 - p_1) V = \frac{i}{2} p_1 V \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right).$$

Заменяя по закону Шарля для изохорного процесса отношение давлений p_2/p_1 отношением абсолютных температур T_2/T_1 , получим

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2} p_1 V \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (1)$$

Эту формулу можно считать окончательным ответом. Все величины, кроме i , даны в условии. Поскольку кислород является двухатомным газом, то число степеней свободы $i = 5$.

2. Из формулы (8.3) для молярной теплоемкости следует, что элементарное количество теплоты, сообщенное телу при повышении его температуры на dT , равно

$$dQ = vCdT. \quad (2)$$

Число молей v найдем из уравнения газового состояния:

$$v = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho_1 V}{RT_1}$$

Так как газ нагревается при постоянном объеме, то $C = C_V$, где C_V определяется по формуле (8.8). Подставив эти значения v и C_V в (2), получим

$$dQ = \frac{i}{2} \frac{\rho_1 V}{T_1} dT. \quad (3)$$

Отсюда, интегрируя и учитывая при этом, что все величины i , ρ_1 , T_1 , V — постоянные, найдем полное количество теплоты, поглощенное газом при нагревании от T_1 до T_2 :

$$Q = \frac{i}{2} \frac{\rho_1 V}{T_1} (T_2 - T_1), \quad (4)$$

что совпадает с выражением (1).

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $i = 5$, $\rho_1 = 9,8 \cdot 10^6$ Па, $V = 2,00 \cdot 10^{-2}$ м³, $T_1 = 280$ К, $T_2 = 300$ К.

Подставив эти значения в (4) и выполнив вычисления, получим

$$Q = 3,5 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 35 \text{ кДж.}$$

8-2. Какую работу надо совершить, чтобы, медленно сжимая при помощи поршня газ в цилиндре с хорошо проводящими тепло стенками, увеличить его давление в два раза? Начальное давление газа равно атмосферному $p_1 = 760$ мм рт. ст., начальный объем $V_1 = 5,0$ л. Во время сжатия давление и температура окружающего воздуха остаются постоянными. Весом поршня и трением пренебречь. Сколько тепла выделяется при сжатии газа?

Решение. Вначале выясним, каким процессом является сжатие газа в условиях задачи. Медленное протекание процесса и большая теплопроводность стенок цилиндра позволяют считать температуру газа равной температуре окружающей среды в течение всего процесса. А так как последняя, согласно условию, остается неизменной, то сжатие газа следует считать изотермическим процессом.

Работа газа при изотермическом процессе определяется формулой (8.13). Преобразуем ее применительно к данной задаче, используя уравнение газового состояния и закон Бойля—Мариотта:

$$A_r = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Поскольку $p_1 < p_2$, то $A_r < 0$. Как и следовало ожидать, работа, совершенная газом при его сжатии, отрицательна. В этом случае положительной будет работа $A_{\text{внеш}}$, совершенная внешними силами, сжимающими при помощи поршня газ в цилиндре:

$$A_{\text{внеш}} = -A_r = p_1 V_1 \ln(p_2/p_1). \quad (1)$$

Однако выражение (1) еще не является ответом, ибо $A_{\text{внеш}}$ есть сумма двух работ: работы A силы, приложенной к поршню (например, силы руки), и работы $A_{\text{атм}}$ силы атмосферного давления, т. е.

$$A_{\text{внеш}} = A + A_{\text{атм}}. \quad (2)$$

По условию задачи искомой величиной является работа A . Величину же $A_{\text{атм}}$ можно найти по формуле работы газа при изобарном процессе (8.12), поскольку атмосферное давление p_1 остается постоянным:

$$A_{\text{атм}} = p_1 (V_1 - V_2). \quad (3)$$

При этом индексы у объемов проставлены так, чтобы работа $A_{\text{атм}}$, вычисленная по (3), была положительной. Преобразуем (3), учитывая, что газ в цилиндре сжимается изотермически:

$$A_{\text{атм}} = p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right). \quad (4)$$

Подставив в (2) вместо $A_{\text{внеш}}$ и $A_{\text{атм}}$ их значения по (1) и (4), найдем искомую работу:

$$A = A_{\text{внеш}} - A_{\text{атм}} = p_1 V_1 \left(\ln \frac{p_2}{p_1} - 1 + \frac{p_1}{p_2}\right).$$

Для определения количества теплоты, выделенного при сжатии газа, воспользуемся первым началом термодинамики. Поскольку при изотермическом процессе ($T = \text{const}$) изменение внутренней энергии на основании (8.10) равно нулю:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = 0,$$

из уравнения (8.1) получаем, что количество теплоты, сообщенное газу, равно

$$Q = A_r = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = -p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Величина Q оказалась отрицательной, что обусловлено *выделением* теплоты газом при его сжатии.

Выразим данные величины в единицах СИ: $V_1 = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, $p_1 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $(p_2/p_1) = 2$. Подставив эти значения в формулы и выполнив вычисления, получим:

$$\begin{aligned} A &= 1,0 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 0,10 \text{ кДж}; Q = -3,5 \cdot 10^2 \text{ Дж} = \\ &= -0,35 \text{ кДж}, \end{aligned}$$

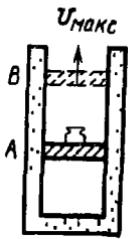


Рис. 8-1

8-3. В цилиндре с плохо проводящими тепло стенками, закрытом сверху легко скользящим поршнем, площадь которого равна 20 см^2 и масса $m_n = 2,00 \text{ кг}$, находится воздух, занимая объем $V_1 = 1,00 \text{ л}$. На поршне лежит гиря массой $m_r = 8,00 \text{ кг}$ (рис. 8-1). Если быстро убрать гирю, воздух расширится и поднимет поршень. Определить работу расширения воздуха за время, в течение которого скорость поднимающегося поршня достигнет максимального значения v_{\max} . Атмосферное давление p_0 принять равным 1,00 ат.

Решение. Прежде всего выясним характер процесса расширения воздуха в цилиндре. Учитывая, что, по условию, воздух расширяется быстро, а стеки цилиндра обладают плохой теплопроводностью, можно пренебречь теплообменом между воздухом и окружающей средой, т. е. считать процесс расширения воздуха адиабатическим.

Из условия задачи легко определить начальное давление p_1 воздуха в цилиндре. На поршень в положении A (рис. 8-1) действуют силы: сила тяжести поршня $m_n g$, вес гири, равный $m_r g$, сила атмосферного давления, равная $p_0 S$, и сила давления воздуха, равная $p_1 S$. Первые три силы направлены вниз, последняя — вверх. Из условия равновесия поршня имеем

$$p_1 S = m_n g + m_r g + p_0 S,$$

откуда

$$p_1 = (m_n + m_r) g/S + p_0 = 1,47 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Условие задачи позволяет также определить давление p_2 воздуха в цилиндре в тот момент, когда скорость поднимающегося поршня достигнет максимума (положение B на рис. 8-1). Поскольку воздух расширяется адиабатически, из уравнения Пуассона (8.14) следует, что его давление, а значит, и сила давления на поршень будут уменьшаться. После того как сняли с поршня гирю, сила давления воздуха на поршень снизу была сначала больше, чем сумма сил $m_n g + p_0 S$, действующих на него сверху, но спустя некоторый промежуток времени, в течение которого поршень двигался ускоренно, силы, приложенные к поршню, снова окажутся в равновесии.

Именно в этот момент скорость поршня достигнет значения v_{\max} , так как при дальнейшем увеличении объема воздуха в цилиндре его давление станет меньше суммы сил $m_n g + p_0 S$. Теперь равнодействующая сил, приложенных к поршню, окажется направленной вниз и скорость поршня будет убывать. Таким образом, из условия равновесия сил, соответствующего максимуму скорости поршня,

$$p_2 S = m_n g + p_0 S,$$

находим

$$p_2 = m_a g / S + p_0 = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Теперь, зная начальное p_1 и конечное p_2 давления воздуха в адиабатическом процессе, а также начальный объем V_1 , легко найти по формуле (8.16) работу расширения газа. Чтобы исключить из (8.16) неизвестные величины m , μ , T_1 , перепишем эту формулу с учетом уравнения газового состояния:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (1)$$

Неизвестное отношение объемов выразим через отношение давлений при помощи уравнения Пуассона (8.14):

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1}, \quad \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma}$$

и вместо (1) запишем

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right]. \quad (2)$$

Поскольку воздух является смесью двухатомных газов — азота и кислорода, найдем отношение его теплоемкостей как для двухатомного газа:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i + 2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в формулу: $p_1 = 1,5 \text{ ат} = 1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$, $p_2 = 1,1 \text{ ат}$, $V_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, $\gamma = 1,4$, получим

$$A = \frac{1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}}{1,4 - 1} [1 - (1,1/1,5)^{0,4/1,4}] \text{ Дж} = 30 \text{ Дж.}$$

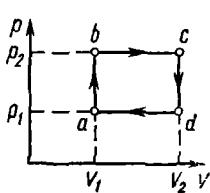


Рис. 8-2

8-4. Идеальный трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 8-2). Определить к. п. д. цикла, если $V_1 = 1,00 \text{ л}$, $V_2 = 2,00 \text{ л}$, $p_1 = 1,0 \text{ атм}$, $p_2 = 2,0 \text{ атм}$. Считая величины V_1 , V_2 , p_1 , p_2 переменными, принимающими любые положительные значения, найти предельный (наибольший) к. п. д. данного цикла.

Решение. Изображенный на рис. 8-2 цикл состоит из четырех последовательно протекающих процессов. Рассмотрим их по порядку.

1. Участок ab . Объем V_1 газа сохраняется, при этом давление его увеличивается от p_1 до p_2 . Так как при изохорном процессе давление газа пропорционально абсолютной температуре, видим, что температура газа здесь повышается. Следовательно, газ при этом получает (от нагревателя) количество тепла Q_{ab} .

2. Участок bc . Давление p_2 газа сохраняется, объем же увеличивается от V_1 до V_2 , при этом газ совершает работу, равную [см. (8.12)]

$$A_{bc} = p_2 (V_2 - V_1). \quad (1)$$

Так как при изобарном процессе объем газа пропорционален абсолютной температуре, видим, что температура газа и в этом процессе повышалась. Следовательно, и здесь газ получил количество теплоты Q_{bc} .

3. Участок cd . Процесс идет изохорно ($V_2 = \text{const}$), давление газа уменьшается от p_2 до p_1 , что означает понижение температуры. Следовательно, газ при этом отдает (холодильнику) количество теплоты Q_{cd} .

4. Участок da . При постоянном давлении p_1 газ сжимается от объема V_2 до объема V_1 и совершает при этом отрицательную работу

$$A_{da} = p_1 (V_1 - V_2) = - p_1 (V_2 - V_1). \quad (2)$$

Уменьшение объема при изобарном процессе связано с понижением температуры газа. Следовательно, здесь, как и в предыдущем случае, газ отдает (холодильнику) некоторое количество тепла Q_{da} .

Теперь можно приступить к вычислению к. п. д. цикла по формуле (8.17). Работа газа, совершенная им на участках bc и da , равна, согласно (1) и (2),

$$A = A_{bc} + A_{da} = (p_2 - p_1) (V_2 - V_1)^*. \quad (3)$$

Количество теплоты Q_1 , сообщенное газу при его нагревании, найдем на основании первого начала термодинамики. Учитывая, что газ получает теплоту на участках ab и bc , запишем для всего пути процесса abc

$$Q_1 = \Delta U + A_{bc}. \quad (4)$$

Изменение внутренней энергии ΔU при переходе газа из состояния a в состояние c вычислим с помощью формулы (8.10) как разность ее значений U_c и U_a в точках c и a графика:

$$\Delta U = U_c - U_a = \frac{l}{2} \frac{m}{\mu} R (T_c - T_a),$$

или на основании уравнения газового состояния

$$\Delta U = (i/2) (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (5)$$

Подставив в (4) вместо ΔU и A_{bc} их значения по (5) и (1), получим

$$Q_1 = \frac{l}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2 (V_2 - V_1). \quad (6)$$

* Формулу (3) можно получить сразу, если учесть, что работа газа, совершенная за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной замкнутой линией — графиком цикла в системе координат (p, V) . В данном случае эта работа равна площади прямоугольника $abcd$.

Наконец, подставляя в (8.17) значения A и Q_1 из (3) и (6), найдем к. п. д. цикла:

$$\eta = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{(i/2)(p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2(V_2 - V_1)}. \quad (7)$$

Подставив в (7) числовые значения величин p_1 , p_2 , V_1 , V_2 из условия и учитывая, что газ — трехатомный и, следовательно, $i = 6$, получим

$$\eta = 0,09.$$

Чтобы определить наибольший к. п. д. цикла, выразим количество теплоты, сообщенное газу, через молярные теплоемкости C_p и C_V на основании формулы (8.3):

$$Q_1 = Q_{ab} + Q_{bc} = vC_V(T_b - T_a) + vC_p(T_c - T_b). \quad (8)$$

Преобразуем (8) с помощью уравнения Клапейрона—Менделеева, записав последнее для каждого из трех состояний газа, соответствующих точкам a , b , c графика:

$$Q_1 = [(p_2 - p_1)V_1 C_V / R] + [(V_2 - V_1)p_2 C_p / R]. \quad (9)$$

Подставив в (8.17) значения A и Q_1 по (3) и (9), получим

$$\eta = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)R}{(p_2 - p_1)V_1 C_V + (V_2 - V_1)p_2 C_p}. \quad (10)$$

Чтобы упростить исследование, разделим числитель и знаменатель правой части (10) на произведение $p_2 V_2$ и введем обозначения $\alpha = p_1/p_2$, $\beta = V_1/V_2$:

$$\eta = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)R}{(1-\alpha)\beta C_V + (1-\beta)C_p}. \quad (11)$$

Заметим, что согласно условию каждая из величин α и β может принимать любые значения в интервале $[0, 1]$. При произвольном фиксированном значении β выражение (11) приобретает вид

$$\eta = \frac{K_1(1-\alpha)}{K_2(1-\alpha)+K_3} = \frac{K_1}{K_2+K_3/(1+\alpha)}, \quad (12)$$

где K_1 , K_2 , K_3 — постоянные положительные величины. Из (12) видно, что $\eta(\alpha)$ — убывающая функция. Следовательно, она принимает наибольшее значение при $\alpha \rightarrow 0$.

При любом фиксированном значении α выражение (11) дает

$$\eta = \frac{K_4(1-\beta)}{K_5\beta+K_6(1-\beta)} = \frac{K_4}{K_5+K_6/(1/\beta-1)}, \quad (13)$$

где K_4 , K_5 , K_6 — постоянные положительные величины. Из (13) следует, что $\eta(\beta)$ — убывающая функция. Значит, ее наибольшему значению соответствует $\beta \rightarrow 0$.

Сопоставляя полученные результаты, приходим к выводу, что, положив в (11) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, найдем предельное значение $\eta_{\text{пред}}$:

$$\eta_{\text{пред}} = \frac{R}{C_p} = \frac{2}{i+2} = 0,25.$$

Методические указания

1. Здесь рассмотрены задачи, связанные с обратимым циклом Карно, и задачи на расчет изменения энтропии. В последних используются важнейшие свойства энтропии: 1) энтропия является функцией состояния; 2) энтропия сложной системы равна сумме энтропий ее частей (свойство аддитивности).

2. Рассчитывая изменение энтропии тела по формуле (8.18), следует помнить, что здесь dQ означает количество теплоты, полученное телом. Поэтому, если тело отдает тепло, величину dQ следует ставить в (8.18) со знаком «—».

3. Если переход тела из начального состояния в конечное осуществляется несколькими, последовательно протекающими процессами, то полное изменение энтропии равно алгебраической сумме изменений энтропии в каждом процессе.

4. Соотношение (8.18) выражает изменение энтропии только в обратимом процессе. Способ расчета изменения энтропии в необратимом процессе рассмотрен в задаче № 8-8.

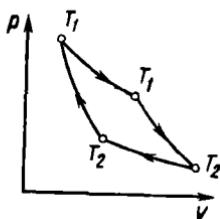
Решение задач

Рис. 8-3

Решение. К. п. д. цикла Карно, состоящего из двух изотерм и двух адиабат (рис. 8-3), не зависит от того, какое рабочее вещество совершают этот цикл, и равен согласно формуле (8.17)

$$\eta_K = (T_1 - T_2)/T_1. \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению наивысшей и наименьшей температур газа в условиях задачи № 8-4.

Было уже выяснено, что газ нагревался на пути *abc* (см. рис. 8-2) и охлаждался на пути *cda*. Следовательно, наивысшей температурой газ обладал в состоянии *c* и наименьшей — в состоянии *a*. Сохраняя обозначения предыдущей задачи, можно записать на основании уравнения газового состояния:

$$T_c = T_b = \frac{p_2 V_2}{vR}, \quad T_a = T_d = \frac{p_1 V_1}{vR}.$$

Подставив эти значения T_1 и T_2 в (1), получим

$$\eta_K = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{p_2 V_2}.$$

Используя числовые данные из условия задачи № 8-4, найдем

$$\eta_K = 0,75.$$

З а м е ч а н и е. Сравнив ответы в задачах № 8-4 и 8-5, получим $\eta_K = 8,3\eta$. Это проявление общей закономерности: тепловая машина, работающая по циклу Карно, обладает наибольшим к. п. д. по сравнению с машиной, работающей по любому другому циклу в том же температурном интервале.

8-6. Тепловая машина работает по циклу Карно, к. п. д. которого $\eta = 0,25$. Каков будет холодильный коэффициент η' машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении? Холодильным коэффициентом называется отношение количества теплоты, отнятого от охлаждаемого тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину.

Р е ш е н и е. К. п. д. любого цикла, в том числе и цикла Карно, выражается формулой (8.17)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1)$$

Особенностью цикла Карно является его обратимость: процесс может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. При обратном цикле Карно (при этом стрелки на рис. 8-3 должны иметь противоположное направление) рабочее вещество будет, расширяясь по изотерме $T_2 - T_2$, отбирать от холодильника количество теплоты Q_2 и, сжимаясь по изотерме $T_1 - T_1$, отдавать нагревателю количество теплоты Q_1 . При этом работа, совершенная рабочим веществом за один цикл, будет отрицательной (положительная работа расширения меньше по модулю отрицательной работы сжатия). В этом случае положительной будет работа A двигателя, приводящего в действие машину.

Согласно определению холодильного коэффициента, запишем

$$\eta' = Q_2/A.$$

Чтобы определить η' , исключим из (1) величину Q_1 , равную $A + Q_2$:

$$\eta = A/(A + Q_2).$$

Выполнив преобразования, получим:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{A + Q_2}{A} = 1 + \frac{Q_2}{A} = 1 + \eta';$$

$$\eta' = \frac{1}{\eta} - 1 = 3, \text{ или } \eta' = 300 \text{ \%}.$$

8-7. Исходя из второго начала термодинамики, вывести формулу для к. п. д. цикла Карно.

Решение.* Наиболее общим выражением второго начала термодинамики является формула (8.19). Поскольку цикл Карно представляет собой обратимый процесс, из (8.19) следует, что полное изменение энтропии изолированной системы нагреватель—рабочее вещество—холодильник равно нулю:

$$\Delta S = 0. \quad (1)$$

Согласно свойству аддитивности, полное изменение энтропии системы ΔS будет складываться из изменений энтропии нагревателя ΔS_1 , рабочего вещества $\Delta S'$ и холодильника ΔS_2 :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S' + \Delta S_2. \quad (2)$$

Рассмотрим эти изменения энтропии за один цикл. Так как рабочее вещество, совершив цикл, вернется в первоначальное состояние, а энтропия является функцией состояния, то она примет также первоначальное значение, т. е. $\Delta S' = 0$. Следовательно, из (1) и (2) имеем

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0. \quad (3)$$

Выразим изменение энтропии нагревателя и холодильника ΔS_1 и ΔS_2 по формуле (8.18). Нагреватель *отдает* рабочему веществу количество теплоты Q_1 при постоянной температуре T_1 , переходя при этом из некоторого состояния A в состояние B . Поэтому приращение dQ_1 берем со знаком «—»:

$$\Delta S_1 = \int_A^B -\frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{1}{T_1} \int_A^B dQ_1 = -\frac{Q_1}{T_1}.$$

Холодильник *получает* от рабочего тела количество теплоты Q_2 при температуре T_2 , переходя из некоторого состояния C в состояние D . Следовательно,

$$\Delta S_2 = \int_C^D \frac{dQ_2}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int_C^D dQ_2 = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Подставим эти значения ΔS_1 и ΔS_2 в (3):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad -\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1},$$

наконец, прибавив к обеим частям равенства по единице, найдем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

* Схема решения заимствована из книги [1].

8-8. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине сосуда содержится $m = 10,0$ г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение его энтропии.

Решение. Расширение газа здесь является необратимым процессом. Поэтому было бы ошибкой применить формулу (8.18) для данного процесса*. Воспользуемся тем, что энтропия — функция состояния и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от того процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния в конечное. Поэтому представим такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное состояние, но являлся бы обратимым процессом. Найдя по формуле (8.18) приращение энтропии в таком обратимом процессе, мы решим поставленную задачу.

Так как данный газ изолирован от окружающей среды ($Q = 0$, $A = 0$), то его внутренняя энергия U , как это следует из первого начала термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом будет постоянной и температура идеального газа во время его расширения согласно формуле (8.10). Значит, в качестве обратимого процесса, переводящего газ в то же конечное состояние, что и данный процесс, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем газа увеличивается в два раза. Так как в этом процессе $T = \text{const}$, $\Delta U = 0$ и, следовательно, $Q = A$, получим ответ по (8.18) с учетом соотношения (8.13):

$$S_B - S_A = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $m = 1,00 \cdot 10^{-2}$ кг, $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $R = 8,3$ Дж/(моль · К). Выполнив вычисление, получим

$$S_B - S_A = 29 \text{ Дж/К.}$$

§ 9. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

Основные формулы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2} \right) (V_0 - b) = RT, \quad (9.1)$$

где V_0 — молярный объем газа; a , b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов. Их значения берутся из таблиц.

* Так как газ теплоизолирован ($dQ = 0$), то по (8.18) получили бы $S_B - S_A = 0$. В действительности же, как это следует из второго начала термодинамики, энтропия газа при его необратимом расширении должна увеличиться.