

**8-8.** Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине сосуда содержится  $m = 10,0$  г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение его энтропии.

**Решение.** Расширение газа здесь является необратимым процессом. Поэтому было бы ошибкой применить формулу (8.18) для данного процесса\*. Воспользуемся тем, что энтропия — функция состояния и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от того процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния в конечное. Поэтому представим такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное состояние, но являлся бы обратимым процессом. Найдя по формуле (8.18) приращение энтропии в таком обратимом процессе, мы решим поставленную задачу.

Так как данный газ изолирован от окружающей среды ( $Q = 0$ ,  $A = 0$ ), то его внутренняя энергия  $U$ , как это следует из первого начала термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом будет постоянной и температура идеального газа во время его расширения согласно формуле (8.10). Значит, в качестве обратимого процесса, переводящего газ в то же конечное состояние, что и данный процесс, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем газа увеличивается в два раза. Так как в этом процессе  $T = \text{const}$ ,  $\Delta U = 0$  и, следовательно,  $Q = A$ , получим ответ по (8.18) с учетом соотношения (8.13):

$$S_B - S_A = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $m = 1,00 \cdot 10^{-2}$  кг,  $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К). Выполнив вычисление, получим

$$S_B - S_A = 29 \text{ Дж/К}.$$

## § 9. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

### Основные формулы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left( p + \frac{a}{V_0^2} \right) (V_0 - b) = RT, \quad (9.1)$$

где  $V_0$  — молярный объем газа;  $a$ ,  $b$  — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов. Их значения берутся из таблиц.

\* Так как газ теплоизолирован ( $dQ = 0$ ), то по (8.18) получили бы  $S_B - S_A = 0$ . В действительности же, как это следует из второго начала термодинамики, энтропия газа при его необратимом расширении должна увеличиться.

Соотношения между параметрами критического состояния и постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{0k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^3}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad (9.2)$$

где  $V_{0k}$  — молярный критический объем газа,  $p_k$  и  $T_k$  — его критические давление и температура.

Коэффициент поверхностного натяжения измеряется силой поверхностного натяжения, действующей на единицу длины любого контура, лежащего на поверхности жидкости:

$$\sigma = F_n/l, \quad (9.3)$$

или поверхностью энергией\*  $E$ , которой обладает каждая единица площади поверхности жидкости:

$$\sigma = E/S, \quad (9.4)$$

где  $S$  — площадь поверхности жидкости.

Формула Лапласа: избыточное давление, создаваемое в жидкости вследствие кривизны ее поверхности (поверхностное давление), равно

$$p_{\text{пов}} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (9.5)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. При этом  $p_{\text{пов}}$  положительно, если поверхность жидкости выпуклая, и отрицательно, если — вогнутая.

Высота поднятия жидкости в капилляре радиуса  $r$  при полном смачивании

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g}, \quad (9.6)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Давление насыщающего пара над вогнутой сферической поверхностью жидкости меньше, а над выпуклой — больше, чем над плоской поверхностью, на величину, равную

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_p}{\rho_k}, \quad (9.7)$$

где  $r$  — радиус сферы,  $\rho_p$  и  $\rho_k$  — плотности насыщающего пара и жидкости.

## A. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

### Методические указания

1. Здесь рассматриваются процессы в реальных газах при температуре  $T$  не ниже критической  $T_k$ . Задачи, связанные с конденсацией паров, которая возможна лишь при условии  $T < T_k$ , приводятся в п. В настоящего параграфа.

2. Обычно в условиях задачи оговаривают те случаи, когда газ надо рассматривать как реальный. В противном случае следует выяснить этот вопрос, чтобы из двух уравнений состояния газа — Клапейрона—Менделеева и Ван-дер-Ваальса\*\* — выбрать одно для реше-

\* Так называют добавочную энергию, которую имеют молекулы, лежащие в поверхностном слое жидкости, по сравнению с молекулами внутри жидкости.

\*\* Другие уравнения состояния реальных газов, кроме уравнения Ван-дер-Ваальса, не изучаются в курсе общей физики.

ния задачи. При этом газ следует считать реальным прежде всего в тех случаях, когда он очень сильно уплотнен (сжат) по сравнению с газом, взятым при нормальных условиях (см. задачу № 9-1).

3. Если из условия задачи нельзя сразу сделать вывод о том, каким следует считать данный газ—идеальным или реальным,—надо найти его молярный объем  $V_0$  и сравнить его с молярным объемом, занимаемым любым газом при нормальных условиях:  $V_{0\text{ норм}} = 22,4 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Если при этом окажется, что  $V_0 \geq V_{0\text{ норм}}$ , т. е. данный газ не более плотен, чем при нормальных условиях, его можно без большой погрешности считать идеальным. Если же  $V_0 \leq V_{0\text{ норм}}$ , т. е. плотность данного газа значительно превышает ее значение при нормальных условиях, газ следует считать реальным.

В остальных случаях ( $V_0 < V_{0\text{ норм}}$ ) надо предположить, что данный газ реальный, и найти поправки на давление  $a/V_0^2$  и объем  $b$ , стоящие в уравнении (9.1), а затем сравнить их с величинами  $p$  и  $V_0$  (разумеется, если обе они даны в условии). Отбрасывая эти поправки в случае их малости (при этом получим уравнение состояния идеального газа) или оставляя их, мы тем самым решаем вопрос о выборе уравнения.

Если в задаче неизвестной величиной является объем или масса газа и, следовательно, нельзя вычислить молярный объем  $V_0$ , критерием выбора уравнения состояния часто может служить величина давления газа. Так, при давлении, не превышающем нормальное атмосферное ( $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ), газ будет достаточно разрежен и его можно считать идеальным (если температура его не очень низка по сравнению с нормальной  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ ). Наоборот, при давлении  $p \gg p_0$  газ будет сильно уплотнен и его следует считать реальным (если температура не очень высока по сравнению с  $t_0$ ). В этом случае приходится решать уравнение (9.1), являющееся кубическим относительно  $V_0$ . Как избежать трудностей, связанных с решением уравнения третьей степени, видно на примере задачи № 9-3.

### Решение задач

**9-1.** В очень прочном закрытом стальном баллоне заключена вода, занимающая при комнатной температуре половину объема баллона. Найти давление (в технических атмосферах) и плотность водяных паров при повышении температуры до  $t = 400^\circ \text{C}$ .

**Решение.** Из таблицы критических температур возьмем для воды  $t_k = 374^\circ \text{C}$ . Таким образом, при нагревании воды в баллоне до  $400^\circ \text{C}$  она оказалась при температуре выше критической. Следовательно, она вся будет находиться в газообразном, или, как это принято говорить в отношении воды, парообразном, состоянии\*.

Плотность водяного пара определим, учитывая, что объем одной и той же массы воды в результате ее нагревания увеличился в два раза

\* Вообще говоря, паром называют газ, находящийся при температуре ниже критической (см. п. В настоящего параграфа).

(массу паров, находящихся над водой при комнатной температуре, можно не учитывать). Следовательно, плотность  $\rho$  пара, равная отношению массы к объему, будет вдвое меньше плотности воды  $\rho_b = 1,00 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ :

$$\rho = \rho_b / 2 = 5,00 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Так как плотность пара в баллоне оказалась громадной по сравнению с плотностями газов при нормальных условиях (например, плотность воздуха при нормальных условиях равна  $1,29 \text{ кг/м}^3$ ), то, очевидно, водяной пар здесь необходимо рассматривать как реальный газ, параметры которого связаны уравнением состояния Ван-дер-Вальса (9.1). Решив его относительно давления  $p$ , получим

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}. \quad (1)$$

Здесь  $V_0$  — молярный объем, но не объем всей массы пара. Поэтому на основании определения плотности можно записать  $V_0 = \mu / \rho$ , где  $\mu$  — молярная масса пара. Подставив это значение  $V_0$  в (1), найдем

$$p = \frac{RT}{(\mu / \rho) - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2}.$$

Взяв из таблиц значения постоянных  $a$  и  $b$  для воды, выразим все величины, входящие в формулу, в единицах СИ:  $T = 673 \text{ К}$ ,  $a = 0,55 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$ ,  $b = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ ,  $\mu = 0,018 \text{ кг/моль}$ . Выполнив вычисления, найдем

$$p = 5,1 \cdot 10^8 \text{ Па} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ ат.}$$

**9-2.** Определить давление  $m = 280 \text{ г}$  азота, находящегося при температуре  $27^\circ\text{C}$  в сосуде, объем которого равен: 1)  $V = 1,00 \text{ м}^3$ ; 2)  $V = 0,50 \text{ л}$ .

**Решение.** Чтобы решить вопрос о том, каким следует считать данный газ — идеальным или реальным, — найдем молярный объем газа  $V_0$ . Пусть в сосуде содержится  $v = m / \mu$  молей газа. Тогда

$$V_0 = \frac{V}{v} = \frac{V\mu}{m}.$$

Учитывая, что молярная масса азота  $\mu = 0,028 \text{ кг/моль}$ , получим:

$$1) \quad V_0 = \frac{1,00 \cdot 0,028}{0,28} \text{ м}^3/\text{моль} = 0,10 \text{ м}^3/\text{моль};$$

$$2) \quad V_0 = \frac{0,50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,028}{0,28} \text{ м}^3/\text{моль} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Сравнивая вычисленные значения  $V_0$  с молярным объемом газа при нормальных условиях  $V_{0,\text{ном}} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ , видим, что в первом случае газ достаточно разрежен и его можно считать иде-

альным. Уравнение состояния идеального газа для одного моля запишется так:

$$pV_0 = RT. \quad (1)$$

Отсюда

$$p = \frac{RT}{V_0} = \frac{8,3 \cdot 300}{0,10} \text{ Па} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Во втором случае  $V_0 \ll V_0$  норм, и газ следует считать реальным. Его давление найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса для реального газа (9.1):

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}. \quad (2)$$

Взяв из таблиц значания постоянных Ван-дер-Ваальса для азота:  $a = 0,13 \text{ м}^4 \cdot \text{Н}/\text{моль}^2$ ,  $b = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ , произведем вычисление по (2):

$$p = \left[ \frac{8,3 \cdot 300}{5,0 \cdot 10^{-5} - 3,7 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,13}{(5,0 \cdot 10^{-5})^2} \right] \text{ Па} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па.}$$

Заметим, что, вычисляя давление по (1), получили бы в этом случае неверный результат:  $p = 0,5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ .

**9-3.** Определить массу кислорода в баллоне объемом  $V = 10,0 \text{ л}$  при температуре  $27^\circ\text{C}$  и давлениях: 1)  $p = 1,00 \text{ ат}$ ; 2)  $p = 410 \text{ ат}$ .

**Решение.** В первом случае ( $p = 1,00 \text{ ат}$ ) кислород в баллоне находится при условиях, близких к нормальным\*. Поэтому без большой погрешности можно считать газ идеальным. На основании уравнения состояния идеального газа, учитывая, что для кислорода  $\mu = 0,032 \text{ кг}/\text{моль}$ , получим

$$m = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{0,032 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 300} = 0,013 \text{ кг.}$$

Во втором случае ( $p = 410 \text{ ат}$ ), учитывая громадное по сравнению с нормальным давление газа, следует считать его реальным и вести расчеты на основании уравнения Ван-дер-Ваальса.

Масса газа определяется из соотношения

$$m = \mu v = \mu V/V_0, \quad (1)$$

где  $\mu$  — молярная масса,  $v$  — число молей,  $V$  — объем газа,  $V_0$  — его молярный объем. Таким образом, необходимо из (9.1) найти величину  $V_0$ , а затем по формуле (1) — массу газа.

Уравнение (9.1) является уравнением третьей степени относительно  $V_0$  и поэтому имеет, вообще говоря, три корня. Однако, учитывая, что кислород в баллоне находится при температуре выше критической ( $t_k = -119^\circ\text{C}$ ), можно утверждать, что при определенном давлении

\* То обстоятельство, что температура газа несколько выше нормальной, означает лишь, что его плотность при давлении  $p = 1,00 \text{ ат}$  меньше, чем при нормальных условиях.

газ будет иметь лишь один определенный объем [в системе координат  $(p, V)$  изотерма Ван-дер-Ваальса, соответствующая температуре выше критической, не имеет завитка]. Следовательно, кубическое относительно  $V_0$  уравнение (9.1) имеет в данном случае лишь один действительный корень. Его можно найти методом последовательных приближений, поскольку расчеты, связанные с решением кубического уравнения по общей формуле Кардано, весьма громоздки.

В качестве первого приближения вычислим молярный объем  $V_{01}$  газа, рассматривая его как идеальный. Тогда из уравнения состояния идеального газа получим

$$V_{01} = \frac{RT}{p} = \frac{8,3 \cdot 300}{410 \cdot 9,8 \cdot 10^4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Теперь, обозначив в уравнении (9.1) поправку на давление через  $p_t = a/V_0^2$ , найдем из (9.1) величину  $V_0$ :

$$V_0 = \frac{RT}{p + p_t} + b. \quad (2)$$

Подставим в (2) приближенное значение  $p_t = a/V_{01}^2$ :

$$V_{02} = \frac{RT}{p + a/V_{01}^2} + b.$$

Взяв из таблиц значений постоянных  $a$  и  $b$  для кислорода, выражим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $p = 410 \cdot 9,8 \times 10^4$  Па,  $V_{01} = 0,62 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К),  $T = 300$  К,  $a = 0,13$  м<sup>4</sup> · Н/моль<sup>2</sup>,  $b = 3,1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль. Выполнив вычисление, найдем

$$V_{02} = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Еще раз вычислив по (2) молярный объем, считая при этом  $p_t = a/V_{02}^2$ , получим третье приближение:

$$V_{03} = 0,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Повторяя таким образом вычисления по формуле (2), будем получать все более точные значения  $V_0$ :

$$V_{04} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль};$$

$$V_{05} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Видим, что при дальнейших вычислениях по (2), если ограничиться точностью до второго знака, ответ уже не будет изменяться. Если же взять значение  $V_{05} = 0,68 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/моль, то получим по (2) прежнее значение  $V_0$ :

$$V_{06} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поэтому действительным корнем кубического уравнения (9.1), вычисленным с точностью до второго знака, будет

$$V_0 = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Теперь по (1) найдем искомую массу газа:

$$m = \frac{0,032 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{0,67 \cdot 10^{-4}} \text{ кг} = 4,8 \text{ кг.}$$

**З а м е ч а н и е.** Легко убедиться в том, что вычисление по уравнению Клапейрона—Менделеева дало бы в этом случае неверный результат:

$$m = \frac{\mu pV}{RT} = \frac{0,032 \cdot 410 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 300} \text{ кг} = 5,2 \text{ кг.}$$

**9-4.** Какую часть объема стеклянной ампулы должен занимать жидкий эфир при  $t = 20^\circ\text{C}$ , чтобы при его нагревании можно было наблюдать переход вещества через критическое состояние? Для эфира  $\mu = 0,074 \text{ кг/моль}$ ,  $\rho = 714 \text{ кг/м}^3$  при  $20^\circ\text{C}$ ,  $t_k = 194^\circ\text{C}$ ,  $p_k = 35,6 \text{ ат}$ .

**Р е ш е н и е.** Переход вещества через критическое состояние характерен тем, что при этом исчезает различие между жидким и газообразной фазами вещества. Критическое состояние характеризуется определенными для каждого вещества параметрами: критическими значениями температуры  $T_k$ , давления  $p_k$  и молярного объема  $V_{0k}$ . При этом критический объем всей массы вещества, содержащей  $v = m/\mu$  молей, равен

$$V_k = v V_{0k} = (m/\mu) V_{0k}. \quad (1)$$

Если вещество, нагретое до критической температуры  $T_k$ , окажется в объеме  $V$ , не равном  $V_k$ , то оно не будет при этом находиться в критическом состоянии. В этом случае при достижении температуры  $T_k$  не будет исчезать различие между двумя фазами, так как еще до достижения  $T_k$  все вещество при нагревании постепенно перейдет в одну фазу (при  $V > V_k$  вся жидкость в сосуде испарится, при  $V < V_k$  весь пар сконденсируется). Таким образом, для того чтобы наблюдать переход вещества, находящегося в ампуле, через критическое состояние, необходимо, чтобы при достижении критической температуры занимаемый им объем  $V$  был равен критическому объему  $V_k$ :

$$V = V_k. \quad (2)$$

Так как в этот момент вещество будет равномерно заполнять всю ампулу, то  $V$  является одновременно и объемом ампулы.

Искомое отношение объема  $V_k$  жидкого эфира к объему  $V$  ампулы найдем из (1) и (2), учитывая, что  $m/V_k = \rho$  есть плотность жидкого эфира:

$$\frac{V_k}{V} = \frac{V_k}{V_k} = \frac{V_k \mu}{m V_{0k}} = \frac{\mu}{\rho V_{0k}}. \quad (3)$$

Выразив величину  $V_{0K}$  через известные  $\rho_K$  и  $T_K$  при помощи равенств (9.2), получим:

$$\frac{T_K}{\rho_K} = \frac{8a \cdot 27b^2}{27bRa} = \frac{8b}{R},$$

$$V_{0K} = 3b = \frac{3T_K R}{8\rho_K}.$$

Подставим это значение  $V_{0K}$  в (3), тогда

$$\frac{V_K}{V} = \frac{8\mu\rho_K}{3R_P T_K}.$$

Выразим в единицах СИ данные величины:  $\mu = 0,074$  кг/моль,  $\rho_K = 35,6 \cdot 9,8 \cdot 10^4$  Па,  $\rho = 714$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_K = 467$  К. Подставив эти значения в формулу и выполнив вычисление, найдем

$$V_K/V = 0,25.$$

## Б. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

### Методические указания

1. При расчетах сил поверхностного натяжения следует учитывать, что эти силы действуют вдоль любого контура, лежащего на поверхности жидкости. При этом сила поверхностного натяжения, приложенная к каждому элементу этого контура, перпендикулярна ему и направлена по касательной к поверхности.

Если в качестве такого контура выбрать границу соприкосновения свободной поверхности жидкости с твердым телом, которое она смачивает, то соответствующая сила поверхностного натяжения будет проявляться как сила, с которой поверхностный слой жидкости действует на твердое тело. Полную силу можно найти по формуле (9.3) лишь при условии, что силы поверхностного натяжения, приложенные ко всем элементам контура, параллельны друг другу.

2. Каким бы тонким ни был слой жидкости (например, в мыльном пузыре), он всегда имеет две поверхности — наружную и внутреннюю, вдоль каждой из которых действуют силы поверхностного натяжения (см. задачу № 9-6).

3. Чтобы не допустить ошибки при учете избыточного (поверхностного) давления, выражаемого формулой (9.5), полезно рассматривать его как скачок давления, который существует на границе жидкости с окружающей ее средой. Величина этого скачка определяется кривизной поверхности жидкости в данной точке. Поэтому в случае поверхности переменной кривизны (например, поверхность капли, висящей на смачиваемом ею твердом теле, имеет кривизну, положительную внизу, и кривизну, отрицательную вверху) поверхностное давление  $p_{пов}$  будет различным в различных точках одной и той же жидкости, лежащих вблизи ее поверхности.

В простейших случаях сферических поверхностей целесообразно искривленную поверхность жидкости (маленькая капля, воздушный пузыrek внутри жидкости и т. д.) условно принимать за некую упругую пленку, находящуюся в состоянии натяжения и поэтому сжимающую охватываемые ею жидкость или газ.

4. Во всех задачах, связанных с расчетом высоты поднятия жидкости в капилляре, где невозможно применить непосредственно формулу (9.6), следует исходить из условия равновесия столба жидкости: разность давлений, производимых на столб снизу и сверху, должна быть равна гидростатическому давлению, оказываемому столбом жидкости на его основание и равному  $\rho gh$ , где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — высота столба.

### Решение задач

9-5. К пружинным весам подвешена тонкая металлическая пластина. Нижний ее край длиной  $L = 10,0$  см приведен в соприкосновение с поверхностью жидкости, которая полностью смачивает пластину. После этого пластину начинают медленно поднимать. Перед ее отрывом от жидкости поверхность последней принимает форму, изображенную на рис. 9-1. При этом свободная поверхность жидкости у границы с пластиной располагается приблизительно в вертикальной плоскости. Зная, что для отрыва пластины потребовалась сила  $F = 0,45 \cdot 10^{-3}$  кгс, определить коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  жидкости.

**Решение.** Чтобы найти коэффициент поверхностного натяжения, нужно, как это следует из определяющей формулы (9.3), знать силу поверхностного натяжения, действующую на единицу длины какого-либо контура, ограничивающего поверхность жидкости. Таким контуром является линия соприкосновения свободной поверхности жидкости с пластиной, имеющая форму очень узкого прямоугольника  $abcd$  (рис. 9-1). Следовательно, ее длина равна  $2L$  (длиной сторон  $ad$  и  $bc$  пренебрегаем).

На пластину вдоль каждой единицы длины этого контура действует со стороны жидкости сила поверхностного натяжения, равная согласно (9.3) коэффициенту  $\sigma$ . Векторы этих сил перпендикулярны контуру и являются касательными к свободной поверхности жидкости. Поэтому в условиях данной задачи они направлены вертикально вниз и, следовательно, параллельны друг другу. Поэтому результирующая сила поверхностного натяжения  $F_n$ , действующая на пластину, также направлена вертикально вниз и равна сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т. е.

$$F_n = 2L\sigma.$$

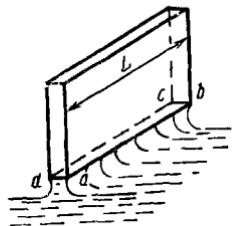


Рис. 9-1

Для отрыва пластины от жидкости необходимо приложить силу  $F$ , направленную вертикально вверх, которая бы уравновесила силу поверхностного натяжения  $F_n$ . Следовательно,

$$F_n = F. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим ответ:

$$\sigma = F/2L.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $L = 0,100$  м,  $F = 4,4 \cdot 10^{-3}$  Н. Выполнив вычисление, найдем

$$\sigma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

**З а м е ч а н и е.** Существенно, что в данной задаче пластина была тонкой, так что площадью ее соприкосновения с жидкостью — площадью прямоугольника  $abcd$  — можно было пренебречь. В противном случае необходимо учитывать отрицательное давление, создаваемое в жидкости около пластины вследствие кривизны ее поверхности (см. задачу № 9-8). Тогда соотношение (2) оказывается неверным. Кроме того, для толстой пластины силы поверхностного натяжения, приложенные к отдельным элементам контура  $abcd$ , уже не будут даже приблизительно параллельны друг другу и поэтому соотношение (1) также перестанет выполняться. Решение задачи в случае толстой пластины становится сложным.

**9-6.** Какую работу против сил поверхности натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом 0,050 м? Чему равно избыточное давление внутри пузыря?

**Р е ш е н и е.** Мыльный пузырь представляет собой очень тонкую пленку мыльной воды приблизительно сферической формы. Эта пленка имеет две поверхности — наружную и внутреннюю. Пренебрегая толщиной пленки и считая поэтому радиусы обеих сфер одинаковыми, найдем их общую площадь:

$$S = 4\pi R^2 + 4\pi R^2 = 8\pi R^2. \quad (1)$$

Поскольку до образования пузыря поверхность мыльной воды, из которой он выдут, была весьма мала, можно считать, что соотношение (1) выражает изменение (прирост) площади  $\Delta S$  поверхности мыльной воды.

Увеличение поверхности жидкости на  $\Delta S$  связано с приростом поверхностной энергии  $\Delta E$ . Как следует из формулы (9.4),

$$\Delta E = \sigma \Delta S. \quad (2)$$

Совершаемая при выдувании пузыря работа против сил поверхностного натяжения идет на увеличение поверхностной энергии  $\Delta E$ . Таким образом, из (1) и (2) получим

$$A = \Delta E = 8\pi R^2 \sigma. \quad (3)$$

Для определения избыточного давления внутри пузыря учтем, что каждая из двух сферических поверхностей пузыря — наружная и внутренняя — производит вследствие своей кривизны давление на воздух внутри пузыря. Это давление, производимое каждой сферой, можно найти по формуле Лапласа (9.5), имея в виду, что радиусы кривизны всех нормальных сечений для сферы равны ее радиусу, следовательно,  $R_1 = R_2 = R$ . Таким образом, избыточное (по сравнению с наружным) давление воздуха внутри пузыря

$$\Delta p = 2p_{\text{пов}} = 4\sigma/R. \quad (4)$$

Взяв из таблицы значение  $\sigma$  для мыльной воды ( $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$  Н/м) и выполнив вычисление по (3) и (4), получим

$$A = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж};$$

$$\Delta p = 3,2 \text{ Па.}$$

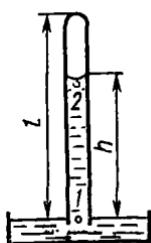


Рис. 9.2

**9-7.** Вертикально расположенная капиллярная трубка длиной  $l = 200$  мм с запаянным верхним концом приведена в соприкосновение своим нижним концом с поверхностью воды. На какую высоту поднимется вода в трубке, если ее радиус  $R_0 = 2,0 \cdot 10^{-4}$  м? Атмосферное давление  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$  Па. Считать, что вода полностью смачивает трубку.

**Решение.** Здесь нельзя применить формулу (9.6), определяющую высоту поднятия жидкости в капилляре при полном смачивании, так как эта формула справедлива лишь для открытой с обоих концов трубы. Для решения задачи рассмотрим столбик воды, находящийся в равновесии в капилляре, после того как он уже поднялся под действием сил поверхностного натяжения. Согласно условию равновесия разность давлений у его концов равна гидростатическому давлению, производимому столбиком жидкости высотой  $h$  на его основание, т. е.

$$p_1 - p_2 = \rho gh, \quad (1)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления внизу и вверху столба соответственно.

Найдем величины  $p_1$  и  $p_2$ . Давление внизу столба (точка 1 на рис. 9-2) равно давлению в воде у ее открытой поверхности, т. е. атмосферному давлению:

$$p_1 = p_0, \quad (2)$$

так как в противном случае жидкость у нижнего края трубы не была бы в равновесии.

Поскольку столб воды ограничен сверху изогнутой поверхностью, давление  $p_2$  вверху (точка 2) отличается от давления  $p_a$  воздуха в трубке на величину  $p_{\text{пов}}$ , определяемую формулой (8.5), т. е.

$$p_2 = p_a + p_{\text{пов}}. \quad (3)$$

При расчете давления  $p_{\text{пов}}$  учтем, что мениск в узком капилляре имеет форму полусфера и, следовательно,  $R_1 = R_2 = R$ . Поэтому

$$p_{\text{пов}} = 2\sigma/R, \quad (4)$$

где  $|R| = R_0$ . Так как данный мениск вогнутый, то  $p_{\text{пов}} < 0$ . Значит, следует считать  $R = -R_0$ . Тогда вместо (4) получим

$$p_{\text{пов}} = -2\sigma/R_0. \quad (5)$$

Давление воздуха в трубке можно выразить через данные величины  $p_0$ ,  $l$ , а также высоту столба  $h$  при помощи закона Бойля—Мариотта. Воздушный столб высотой  $l - h$  при давлении  $p_0$  имел при атмосферном давлении  $p_0$  высоту  $l$ . Поскольку объем столба пропорционален его длине, то можем записать:

$$p_0(l - h) = p_0l; \quad p_0 = p_0l/(l - h). \quad (6)$$

Подставим в (1) значения  $p_1$  и  $p_2$  по (2) и (3), учитывая соотношения (5) и (6):

$$p_0 - \left( p_0 \frac{l}{l-h} - \frac{2\sigma}{R} \right) = \rho gh. \quad (7)$$

Взяв из таблиц значений  $\sigma$  и  $\rho$  для воды, выразим в единицах СИ величины, входящие в (7):  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$  Па,  $l = 0,20$  м,  $R_0 = 2,0 \times 10^{-4}$  м,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $\rho = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Подставив числовые значения в (7) и решив это квадратное относительно  $h$  уравнение, получим:

$$h_1 = 11 \text{ м}; \quad h_2 = 0,014 \text{ м}.$$

Поскольку должно выполняться очевидное неравенство  $h < l$ , то ответом на вопрос задачи является второе значение.

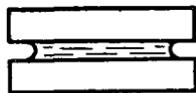


Рис. 9.3

**9-8.** На полированную стеклянную пластинку капнули 0,010 г воды и наложили сверху вторую такую же пластинку. Вода растеклась между пластинками по площади круга радиуса  $R = 3,0$  см, не дойдя до ее краев. С какой силой надо растягивать обе пластинки, чтобы их разъединить? Считать, что вода полностью смачивает стекло.

**Решение.** Сначала выясним, почему возникает сила притяжения между пластинками. При наложении пластинок свободная поверхность воды вследствие полного смачивания образует вогнутый мениск, диаметральное сечение которого изображено на рис. 9.3 в виде двух полуокружностей. Следовательно, давление в жидкости, заключенной между пластинками, меньше атмосферного на величину  $p_{\text{пов}}$ , определяемую по формуле (9.5). Под избыtkом внешнего давления пластины сближаются, вода растекается между ними все более тонким слоем. Этот процесс прекратится, когда жидкость дойдет до краев пластин, после чего мениск распрямится, а поверхностное давление и сила притяжения между пластинаами исчезнут, или когда дальнейшее сближение пластин станет невозможным из-за того, что они начнут

соприкасаться друг с другом в некоторых точках вследствие неровностей их поверхности. Очевидно, что именно последний случай имеет место в задаче.

Сила притяжения между пластинками равна избыточному внешнему давлению  $p_{\text{нов}}$ , умноженному на площадь одной пластины, т. е.

$$F = p_{\text{нов}} S = p_{\text{нов}} \pi R^2, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус круга растекания жидкости.

Чтобы по формуле (9.5) определить величину  $p_{\text{нов}}$ , рассмотрим два взаимно перпендикулярных нормальных сечения поверхности жидкости. Одно из них изображено на рис. 9-3, плоскость второго сечения параллельна пластинам и находится посередине между ними. Очевидно, радиус кривизны  $R_1$  первого сечения равен половине расстояния между пластинками, радиус кривизны  $R_2$  второго сечения есть радиус круга растекания жидкости, данный в условии. Поскольку при этом выполняется неравенство  $R_1 \ll R_2$ , то в формуле (9.5) можно пренебречь величиной  $1/R_2$ , т. е. кривизной второго сечения, и рассматривать мениск приближения как вогнутую цилиндрическую поверхность. Таким образом, получим

$$p_{\text{нов}} = \frac{\sigma}{R_1} = \frac{2\sigma}{d}, \quad (2)$$

где  $d$  — расстояние между пластинками. Его найдем, разделив объем воды на площадь ее растекания:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \pi R^2}, \quad (3)$$

где  $m$  — масса воды,  $\rho$  — ее плотность. Наконец, подставив в (1) значение  $p_{\text{нов}}$  из (2) с учетом (3), определим силу притяжения между пластинами:

$$F = 2\pi^2 R^4 \sigma \rho / m. \quad (4)$$

Чтобы разъединить пластины, их надо растягивать с силой, по крайней мере равной силе их взаимного притяжения. Таким образом, формула (4) дает ответ на поставленный в задаче вопрос.

Взяв из таблиц значания  $\sigma$  и  $\rho$  для воды, выразим в единицах СИ все величины, входящие в (4):  $R = 3,0 \cdot 10^{-2}$  м,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $\rho = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m = 1,0 \cdot 10^{-6}$  кг. Произведя вычисление, получим

$$F = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Н} = 0,12 \text{ кН.}$$

## В СВОЙСТВА ПАРОВ

### Методические указания

I. Паром называют газ, находящийся при температуре ниже критической. В зависимости от того, насколько пар уплотнен (сжат) он подчиняется уравнению состояния идеального газа (при малых плотностях) или уравнению состояния реального газа (при больших плотностях). При этом критерий степени уплотнения пара остается тем же, что и для всякого газа (см. п. А настоящего параграфа).

2. Отметим важнейшую особенность пара, которую необходимо учитывать, применяя к нему уравнения состояния. При изотермическом сжатии пара его плотность и давление будут возрастать лишь до тех пор, пока пар не станет *насыщающим*. При дальнейшем уменьшении объема пар начнет конденсироваться, превращаясь в жидкость. При этом плотность и давление оставшейся массы пара остаются постоянными, равными плотности и давлению насыщающего пара при данной температуре (значения этих величин берутся из таблиц).

Таким образом, при вычислении давления или плотности пара по какому-либо уравнению состояния реальными ответами будут лишь те значения  $p$  и  $\rho$ , которые не превышают значений этих величин для насыщающего пара при данной температуре. В противном случае следует считать пар в данных условиях насыщающим и за искомые величины  $p$  и  $\rho$  брать их табличные значения для насыщающего пара при данной температуре (см. задачу № 9-9).

3. В таблицах для насыщающего пара часто приводят зависимость от температуры лишь давление пара, но не его плотности. Поскольку обе величины связаны между собой уравнением состояния (Клапейрона—Менделеева или Ван-дер-Ваальса), зная одну из них, всегда можно найти и другую.

4. До сих пор речь шла о насыщающем паре, находящемся над плоской поверхностью жидкости. Его давление определяется только температурой. Однако, как следует из формулы (9.7), давление насыщающего пара над искривленной поверхностью жидкости зависит также и от кривизны этой поверхности. Эта зависимость очень слабая и практически учитывается лишь в явлении конденсации паров при наличии в них капелек микроскопических размеров, т. е. очень большой кривизны (см. задачу № 9-10).

### Решение задач

9-9. В запаянном сосуде нагрета вода массой 0,50 кг до 107° С. Определить давление водяного пара в сосуде при этой температуре и следующих значениях объема сосуда:

1)  $V = 1,00 \text{ м}^3$ , 2)  $V = 0,50 \text{ м}^3$ , 3)  $V = 5,0 \text{ л}$ .

**Решение.** Здесь в отличие от задачи № 9-1 вода нагрета до температуры ниже критической. Поэтому не исключено, что не вся вода при нагревании обратилась в пар, который при этом будет находиться в состоянии насыщения. Из таблицы зависимости давления насыщающего пара от температуры находим, что при 107° С давление пара

$$p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Это значение определяет максимально возможное давление пара в сосуде при данной температуре.

Теперь вычислим действительное давление пара в сосуде в трех случаях.

1)  $V = 1,00 \text{ м}^3$ . Чтобы выяснить, идеальным или реальным газом следует считать водяной пар, найдем его молярный объем  $V_0$ , предпо-

ложив, что вся вода в сосуде обратилась в пар:

$$V_0 = \frac{V}{v} = \frac{V_\mu}{m} = \frac{1,00 \cdot 0,018}{0,50} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,036 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поскольку полученное значение  $V_0$  превышает молярный объем газа при нормальных условиях ( $V_{0\text{ норм}} = 0,024 \text{ м}^3/\text{моль}$ ) и, следовательно, плотность пара меньше, чем при нормальных условиях, можно, не делая большой погрешности, считать его идеальным газом. Из уравнения состояния идеального газа, записанного для одного моля, найдем

$$p_1 = \frac{RT}{V_0} = \frac{8,3 \cdot 380}{0,036} \text{ Па} = 0,9 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Полученный ответ вполне реален, поскольку, сравнивая значения  $p_{\text{нас}}$  и  $p_1$ , видим, что  $p_1 < p_{\text{нас}}$ . Следовательно, предположение о том, что вся вода в сосуде испарилась, оказалось верным. Сосуд оказался целиком заполненным насыщающим паром.

2)  $V = 0,50 \text{ м}^3$ . Снова вычислим молярный объем  $V_0$  пара, предположив, что вся вода обратилась в пар:

$$V_0 = \frac{V_\mu}{m} = \frac{0,50 \cdot 0,018}{0,50} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,018 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поскольку теперь  $V_0 < V_{0\text{ норм}}$  и, следовательно, плотность пара больше, чем при нормальных условиях, будем рассматривать его как реальный газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса (9.1). Из таблицы возьмем значения постоянных Ван-дер-Ваальса:  $a = 0,55 \text{ м}^4 \times \text{Н/моль}^2$ ,  $b = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Пренебрегая поправкой  $b$  по сравнению с  $V_0$ , получим из (9.1)

$$p_2 = \frac{RTV_0 - a}{V_0^2} = \frac{8,3 \cdot 380 \cdot 0,018 - 0,55}{(0,018)^2} \text{ Па} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Сравнивая этот результат со значением  $p_{\text{нас}}$ , видим, что  $p_2 > p_{\text{нас}}$  при данной температуре, что невозможно. Следовательно, предположение о том, что вся вода в сосуде обратилась в пар, оказалось неверным. В действительности пар в сосуде объемом  $0,5 \text{ м}^3$  находится в состоянии насыщения и его давление

$$p_2 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3)  $V = 0,005 \text{ м}^3$ . Поскольку пар оказался насыщающим в объеме  $0,5 \text{ м}^3$ , то при меньшем объеме сосуда он и подавно будет насыщающим. Следовательно,

$$p_3 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

9-10. Что произойдет, если в пересыщенный водяной пар, температура которого  $t = 96^\circ\text{C}$  и давление  $p = 1,0 \text{ кг/см}^2$ , попадет капелька воды радиуса  $r$ ? Рассмотреть два случая: 1)  $r = 0,50 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , 2)  $r = 1,00 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ .

Решение. По таблице зависимости давления насыщающего пара от температуры найдем, что при  $t = 96^\circ\text{C}$  давление насыщающего пара

$$p_{\text{нас}} = 0,88 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (1)$$

Поскольку давление данного в условии задачи пара превышает значение  $p_{\text{нас}}$ , он действительно является пересыщенным. Это состояние мало устойчиво. Когда такой пар приходит в соприкосновение со своей жидкостью, он начинает конденсироваться. Этот процесс продолжается до тех пор, пока масса пара не уменьшится настолько, что он перестанет быть пересыщенным.

Однако конденсация пара на очень маленьких капельках затруднена в связи с тем, что давление насыщающего пара около сферической поверхности капли больше, чем около плоской поверхности жидкости при той же температуре. Следовательно, (1) дает неправильное, заниженное значение  $p_{\text{нас}}$  около капли, так как таблица, из которой оно взято, составлена для пара, находящегося над плоской поверхностью жидкости. Правильное значение  $p'_{\text{нас}}$  около капли получим по формуле (9.7):

$$p'_{\text{нас}} = p_{\text{нас}} + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_{\text{ж}}} . \quad (2)$$

В зависимости от величины  $r$  могут быть два случая:

1)  $p'_{\text{нас}} > p$ , где  $p$  — действительное давление пара. Это значит, что пар, пересыщенный по отношению к жидкости с плоской поверхностью, оказался в то же время ненасыщенным по отношению к капельке. Следовательно, она испарится;

2)  $p'_{\text{нас}} < p$ . Это значит, что пар пересыщен относительно не только плоской поверхности жидкости, но и капельки. Следовательно, он будет конденсироваться до тех пор, пока его давление не снизится до значения  $p'_{\text{нас}}$ .

Чтобы по формуле (2) рассчитать величину  $p'_{\text{нас}}$ , надо предварительно определить плотность пара  $\rho_n$ . Так как пар находится при атмосферном давлении, его можно рассматривать как идеальный газ. Тогда из уравнения Клапейрона—Менделеева найдем

$$\rho_n = \frac{m}{V} = \frac{\rho_{\text{пл}}}{RT} .$$

Подставив это значение плотности в (2), получим

$$p'_{\text{нас}} = p_{\text{нас}} + 2\sigma\rho\mu/rRT\rho_{\text{ж}} \quad (3)$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулу (3):  $p_{\text{нас}} = 0,88 \cdot 10^5$  Па,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $p = 0,98 \cdot 10^5$  Па,  $\mu = 0,018$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль·К),  $T = 369$  К,  $\rho_{\text{ж}} = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Выполнив вычисление, получим:

1)  $p'_{\text{нас}} = 1,1 \cdot 10^6$  Па при  $r = 0,50 \cdot 10^{-8}$  м. Сравнив значения  $p'_{\text{нас}}$  и  $p$ , видим, что  $p'_{\text{нас}} > p$ . Следовательно, имеет место первый из рассмотренных выше случаев и капля испарится;

2)  $p'_{\text{нас}} = 0,96 \cdot 10^6$  Па при  $r = 1,00 \cdot 10^{-8}$  м. Теперь  $p'_{\text{нас}} < p$ , что соответствует второму случаю: пересыщенный пар конденсируется до тех пор, пока не станет насыщающим.