Глава 3

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 10. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Основные формулы

Закон Кулона: два точечных заряда q_1 и q_2, находящиеся на расстоянии r, взаимодействуют с силой

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{10.1}$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Напряженностью электрического поля называется векторная величина

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q', \tag{10.2}$$

где $\mathbf{F}$ — сила, с которой поле действует на помещенный в данную точку пробный положительный заряд q'

Поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ сквозь поверхность S определяется интегралом

$$N=\int_S E_n\, dS, \tag{10.3}$$

где E_n — проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление нормали к элементу площади dS.

Теорема Гаусса: поток вектора $\mathbf{E}$ через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0, т. е.

$$\oint_S E_n\, dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q_i. \tag{10.4}$$

Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом q на расстоянии r от него,

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{10.5}$$

Напряженность поля диполя в точке, находящейся на расстоянии $r \gg l$ от диполя (l — плечо диполя),

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}, \tag{10.6}$$

где $p = ql$ — электрический момент диполя, φ — угол между осью диполя и радиусом-вектором, проведенным из центра диполя в данную точку.

Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности в точках, лежащих вне и внутри сферы на расстоянии r от ее центра, соответственно равна:

$$\text{а)}\quad E_{\text{внеш}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad \text{б)}\quad E_{\text{внутр}}=0. \tag{10.7}$$

Напряженность поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити или бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности в точках, расположенных вне ее,

$$E = \tau/2\pi\varepsilon_0 a, \tag{10.8}$$

где a — расстояние точки от нити (оси цилиндра), τ — линейная плотность заряда, численно равная заряду, приходящемуся на единицу длины нити или цилиндра, т. е.

$$\tau = \Delta q/\Delta l. \tag{10.9}$$

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \sigma/2\varepsilon_0, \tag{10.10}$$

где σ — поверхностная плотность заряда, численно равная заряду, приходящемуся на единицу площади заряженной поверхности, т. е.

$$\sigma = \Delta q/\Delta S. \tag{10.11}$$

Напряженность поля двух бесконечных параллельных равномерно заряженных с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ плоскостей (поле плоского конденсатора) в точках, расположенных между плоскостями и вне их, соответственно равна:

$$E_{\text{внутр}} = \sigma/\varepsilon_0, \quad \text{б)} \quad E_{\text{внеш}} = 0. \tag{10.12}$$

Методические указания

1. При решении задач на нахождение напряженности электрического поля, если задано распределение зарядов, создающих это поле, могут встретиться следующие случаи:

а) поле образовано одним или несколькими точечными зарядами. Тогда используют формулу (10.5) и *принцип суперпозиции* (наложения) электрических полей: напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных отдельными зарядами;

б) поле создано зарядами, которые не являются точечными, но распределены равномерно по сферическим, цилиндрическим или плоским поверхностям. Тогда применяют формулы (10.7), (10.8), (10.10), (10.12), выведенные с помощью теоремы Гаусса. Бесконечно длинным цилиндром (или нитью) можно считать любой реальный цилиндр (или нить) для таких точек, расстояние от которых до оси цилиндра (нити) значительно меньше, чем до его концов. Точно так же всякую плоскость можно считать бесконечной относительно таких точек, расстояние которых до плоскости значительно меньше их расстояния до краев плоскости;

в) если заряженное тело не является ни сферой, ни бесконечно длинным цилиндром, ни бесконечной плоскостью, то для определения напряженности поля необходимо разбить тело на бесконечно малые элементы, найти по формуле (10.5) напряженность $d\mathbf{E}$ поля, созданную в данной точке каждым элементом, а затем просуммировать все элементарные напряженности $d\mathbf{E}$. При этом надо учитывать направления складываемых векторов $d\mathbf{E}$. В случае, если все они направлены одинаково, можно геометрическое сложение заменить арифметическим. Тогда получим

$$E = \int dE,$$

где интегрирование производится по всему объему заряженного тела (по всей площади заряженной поверхности, по всей длине заряженной нити).

В том случае, когда складываемые векторы $d\mathbf{E}$ имеют различные направления, сначала выясняют, не обладает ли поле заряженного тела осевой симметрией. Если это так и при этом точка, в которой требуется определить напряженность, находится на оси симметрии поля, то оказывается, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ результирующего поля в данной точке всегда направлен вдоль оси симметрии поля. Чтобы найти модуль вектора $\mathbf{E}$, достаточно сложить проекции всех элементарных векторов $d\mathbf{E}$ на его направление. Обозначив эти проекции через dE_l, получим

$$E = \int dE_l.$$

В общем случае, когда нельзя воспользоваться соображениями симметрии, поступают так. Выбирают координатные оси x, y, z, затем суммируют (интегрируют) проекции dE_x, dE_y, dE_z всех элементарных векторов напряженности $d\mathbf{E}$ на эти оси, получая тем самым проекции искомого вектора $\mathbf{E}$, т. е.

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z,$$

и его модуль:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

2. Силы взаимодействия зарядов можно рассчитывать двумя способами: по закону Кулона и по соотношению $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$, получаемому из формулы (10.2), если один из зарядов (q') рассматривать как заряд, находящийся в электрическом поле, созданном другим зарядом (q). Второй способ, при котором задача сводится к расчету электрического поля заряда q в том месте, где находится заряд q', обладает преимуществом в тех случаях, когда для определения $\mathbf{E}$ можно использовать формулы (10.7), (10.8), (10.10), (10.12). Это позволяет избежать сложного интегрирования, которое может оказаться необходимым при первом способе. Следует помнить, что, хотя в формуле (10.2), определяющей напряженность поля, под q' подразумевается *точечный* заряд, эту формулу можно применять для неточечного заряда при условии, что во всех точках пространства, где находится протяженный заряд q', вектор $\mathbf{E}$ имеет одинаковые модуль и направление (см. задачу № 10-7).

3. Если в условии задачи не указывается среда, в которой взаимодействуют заряды, то подразумевается вакуум ($\varepsilon = 1$) или воздух, диэлектрическая проницаемость ε которого близка к единице

4. Производя вычисления в задачах электростатики, особенно в задачах настоящего параграфа, полезно использовать значение коэффициента пропорциональности $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, входящего в ряд формул, равное

$$k = 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Решение задач

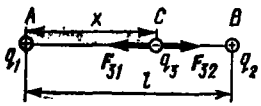

Рис. 10-1

10-1. Два точечных положительных заряда q_1 и q_2 помещены на расстоянии l друг от друга. Где надо поместить третий точечный заряд q_3 и каким он должен быть по модулю и знаку, чтобы все три заряда оказались в равновесии?

Решение. Очевидно, заряд q_3 должен находиться между зарядами q_1 и q_2 на прямой, их соединяющей: только тогда силы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$, с которыми действуют на заряд q_3 два одноименных заряда q_1 и q_2, будут располагаться на одной прямой и иметь противоположные направления, что необходимо для равновесия q_3. Знак заряда q_3 должен быть отрицательным: только в этом случае силы, действующие на каждый из зарядов q_1 и q_2 со стороны двух других зарядов, будут уравновешены.

Предположим, что заряд q_3 находится в точке C, расположенной на расстоянии x от заряда q_1 (рис. 10-1). Запишем условие равновесия заряда q_3, к которому приложены силы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$:

$$F_{31} = F_{32}. \qquad (1)$$

Подставив в уравнение (1) вместо сил их значения по закону Кулона (10.1) и произведя сокращение, получим

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(l-x)^2}.$$

Решив уравнение относительно x, найдем два значения искомого расстояния AC:

$$x_1 = \sqrt{q_1}\, l/(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}); \quad x_2 = \sqrt{q_1}\, l/(\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}).$$

Исследуя второй корень, видим, что должно выполняться одно из двух неравенств: $x_2 > l$ (при $q_1 > q_2$) или $x_2 < 0$ (при $q_1 < q_2$). Этим неравенствам соответствует положение точки C вне отрезка AB, что невозможно для равновесия заряда q_3. Поэтому, отбрасывая корень x_2, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$x = \sqrt{q_1}\, l/(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}). \qquad (2)$$

Чтобы найти величину q_3, запишем условие равновесия одного из двух зарядов q_1, q_2, например заряда q_1:

$$F_{12} = F_{13}. \qquad (3)$$

Подставив вместо сил их значения по закону Кулона [учитывая при этом, что в формуле (3) стоят модули сил, а q_3 — отрицательный заряд] и произведя сокращение, получим

$$\frac{q_2}{l^2} = \frac{|q_3|}{x^2}.$$

Заменив величину x ее значением по формуле (2), найдем

$$|q_3| = q_1 q_2 / (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2.$$

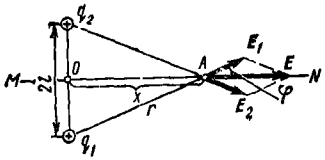

Рис 10 2

10-2. Два одинаковых положительных точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии $2l = 10{,}0$ см друг от друга. Найти на прямой MN (рис. 10-2), являющейся осью симметрии этих зарядов, точку, в которой напряженность электрического поля имеет максимум.

Решение. Выясним, почему такая точка должна существовать. Напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в любой точке прямой MN складывается из напряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, созданных в этой точке зарядами q_1 и q_2:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

При этом в точке O, лежащей между зарядами, сумма векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, одинаковых по модулю и противоположных по направлению, равна нулю. В точках прямой MN, весьма удаленных от зарядов, векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ окажутся приблизительно одинаково направленными. Однако и в этом случае их равнодействующая близка к нулю, поскольку оба слагаемых, как это видно из (10.5), быстро убывают при удалении от зарядов. Следовательно, на прямой MN по обе стороны от зарядов должны быть точки, в которых напряженность поля достигает максимума

Строго говоря, для этого необходимо также, чтобы напряженность поля в любой точке прямой MN была *непрерывной* функцией координаты этой точки. Можно показать, что это условие в задаче выполняется.

Чтобы решить задачу, найдем напряженность поля $\mathbf{E}$ в произвольной точке A прямой MN. Как видно из чертежа,

$$E = 2E_1 \cos\varphi, \tag{1}$$

где φ — угол между $\mathbf{E}_1$ и осью MN. Обозначив отрезок OA через x и учитывая соотношения

$$r^2 = l^2 + x^2; \quad \cos\varphi = x/\sqrt{l^2 + x^2},$$

вместо равенства (1) на основании формулы (10.5) получим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qx}{(l^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Эта формула выражает модуль вектора $\mathbf{E}$ в произвольной точке прямой MN как функцию координаты x этой точки. Чтобы найти максимум функции, продифференцируем ее по x и приравняем нулю производную:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2q\,[(l^2 + x^2)^{-3/2} - 3x^2 (l^2 + x^2)^{-5/2}] = 0.$$

Отсюда находим

$$x_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{2}} = \pm \frac{5{,}0}{\sqrt{2}} \text{ см} = \pm 3{,}5 \text{ см}.$$

Два значения x соответствуют двум точкам, расположенным по обе стороны от точки O на расстоянии 3,5 см от нее.

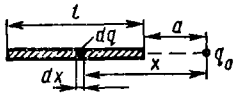

Рис 10 3

10-3. Тонкий прямой стержень длиной $l = 15$ см равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 0{,}10$ мКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $q_0 = 10$ нКл. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

Решение. Зная длину стержня l и линейную плотность заряда τ, легко найти по формуле (10.9) заряд стержня: $q_{ст} = \tau l$. Однако в отличие от двух предыдущих задач здесь нельзя определить силу взаимодействия двух зарядов непосредственно по закону Кулона. Этот закон справедлив лишь для точечных зарядов, а заряд $q_{ст}$, распределенный по стержню, нельзя считать точечным.

Чтобы применить закон Кулона, рассмотрим бесконечно малый элемент длины dx стержня, находящийся на расстоянии x от заряда q_0 (рис. 10-3). Заряд этого элемента согласно формуле (10 9) равен

$$dq = \tau dx.$$

По закону Кулона на заряд q_0 будет действовать со стороны заряда dq сила, равная

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0\, dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0\, \tau dx}{x^2}.$$

Со стороны всех остальных бесконечно малых элементов стержня на заряд q_0 также будут действовать элементарные силы, направленные в ту же сторону, что и $d\mathbf{F}$. Сложив их модули, найдем искомую силу, равную результирующей силе действия всех элементов стержня на заряд q_0:

$$F = \int dF = \int_a^{a+l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0\, \tau dx}{x^2}.$$

Вынося постоянные множители за знак интеграла, получим

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \tau \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \tau \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right).$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}00 \cdot 10^9$ м/Ф, $q_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл, $\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, $l = 0{,}15$ м, $a = 0{,}10$ м. Подставив эти значения и выполнив вычисление, найдем

$$F = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

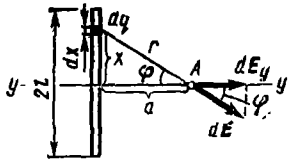

Рис 10-4

10-4. Тонкий стержень длиной $2l$ равномерно заряжен с линейной плотностью τ. Определить напряженность электрического поля в точке A, лежащей против середины стержня на расстоянии a от него. Рассмотреть общий случай, а также частные случаи: $a \gg 2l$ и $a \ll 2l$.

Решение. Общий случай соответствует любому соотношению между величинами a и l. Так как при этом заряженный стержень нельзя считать точечным зарядом, то нельзя определить напряженность поля непосредственно по формуле (10.5). В этом отношении данная задача аналогична предыдущей. И здесь рассмотрим сначала элемент dx стержня, находящийся на расстоянии x от середины стержня (рис. 10-4). Заряд этого элемента $dq = \tau dx$. Полагая его точечным, найдем напряженность поля заряда dq в точке A по формуле (10.5):

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dx}{x^2+a^2}. \qquad (1)$$

Искомая напряженность поля в точке A равна сумме элементарных напряженностей $d\mathbf{E}$, созданных в этой точке всеми элементами стержня. Однако здесь в отличие от предыдущей задачи векторы $d\mathbf{E}$ от различных элементов стержня имеют различное направление. Следовательно, их векторная сумма не равна сумме их модулей и не может быть выражена интегралом $\int dE$.

Чтобы преодолеть возникшую трудность, воспользуемся соображениями симметрии. Так как поле равномерно заряженного стержня обладает осевой симметрией и точка A лежит на одной из осей симметрии (ось yy на рис. 10-4), то напряженность электрического поля в точке A направлена вдоль этой оси.

Действительно, при сложении полей от любых двух, симметрично расположенных элементов стержня получается поле, вектор $\mathbf{E}$ которого расположен вдоль оси симметрии, как это видно на рис. 10-2. Следовательно, при суммировании всех элементарных векторов $d\mathbf{E}$ достаточно учесть лишь составляющие этих векторов $d\mathbf{E}_y$, взятые вдоль оси симметрии yy. При этом, как видно из чертежа,

$$dE_y = dE\cos\varphi,$$

где

$$\cos\varphi = a/r = a/\sqrt{x^2+a^2}. \qquad (2)$$

Таким образом, мы свели задачу к сложению одинаково направленных векторов $d\mathbf{E}_y$, и искомая напряженность E выразится интегралом

$$E = \int_{-l}^{+l} dE_y = \int_{-l}^{+l} dE\cos\varphi = 2\int_0^l dE\cos\varphi. \qquad (3)$$

Подставив в (3) значения величин dE и $\cos\varphi$ по формулам (1) и (2) и произведя интегрирование, получим

$$E=\frac{\tau a}{2\pi\varepsilon_0}\left.\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}\right|_0^l=\frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{l^2+a^2}}. \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим частные случаи задачи. Неравенство $a\gg 2l$ означает, что можно пренебречь размерами стержня по сравнению с расстоянием от него до данной точки, т. е. заряд стержня можно считать точечным. Тогда по (10.5) найдем

$$E = q/4\pi\varepsilon_0 a^2. \qquad (5)$$

Из неравенства $a\ll 2l$ следует, что данная точка находится *вблизи* тонкого стержня и *далеко* от его концов. Это соответствует *бесконечно длинному* стержню (нити, цилиндру). Следовательно, применив формулу (10.8), имеем

$$E = \tau/2\pi\varepsilon_0 a. \qquad (6)$$

Легко видеть, что выражения (5) и (6) являются частными случаями общего ответа (4). Действительно, при $a\gg 2l$ можно пренебречь величиной l^2 под знаком корня в (4). Тогда, учитывая, что $2\tau l = q$, приходим к формуле (5). При $a\ll 2l$ пренебрегаем величиной a^2 в (4) и сразу получаем соотношение (6).

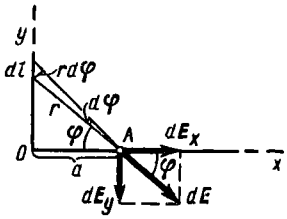

Рис. 10-5

10-5. Очень длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью τ. Определить напряженность поля в точке A, лежащей против конца нити на расстоянии a от нее (рис. 10-5).

Решение. Здесь нельзя вычислить напряженность по формуле (10.8) для бесконечно длинной нити, так как заданная точка A расположена вблизи не только нити, но и одного из ее концов (сравните со случаем $a\ll 2l$ предыдущей задачи). Поэтому опять рассмотрим элемент dl нити. Пусть он находится от точки A на расстоянии r. Заряд элемента $dq = \tau dl$. Напряженность поля $d\mathbf{E}$, созданного этим зарядом в точке A, равна

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{r^2}. \qquad (1)$$

В качестве переменной величины здесь удобно выбрать угол φ, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$ с нормалью к нити. Как видно из чертежа,

$$r=\frac{a}{\cos\varphi}; \quad dl=\frac{rd\varphi}{\cos\varphi}=\frac{ad\varphi}{\cos^2\varphi}. \qquad (2)$$

Подставив в формулу (1) значения r и dl из (2), получим

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rd\varphi}{a}.$$

Чтобы найти полную напряженность в точке A, сложим напряженности $d\mathbf{E}$ от всех элементов нити. При этом следует учесть, как и в предыдущей задаче, что все слагаемые векторы $d\mathbf{E}$ имеют различное направление. Поэтому интеграл $\int dE$, взятый по всей длине нити, заведомо не равен искомой величине. В этой задаче нельзя воспользоваться соображениями симметрии, так как, хотя поле заряженной нити имеет оси симметрии, точка A не лежит ни на одной из этих осей. Поэтому применим общий метод определения напряженности, изложенный в п. 1 методических указаний.

Выберем оси Ox и Oy, как показано на рисунке. Найдем проекции вектора $d\mathbf{E}$ на эти оси:

$$dE_x = dE\cos\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\cos\varphi d\varphi}{a};$$

$$dE_y = dE\sin\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\sin\varphi d\varphi}{a}.$$

Интегрируя эти проекции по всей длине нити и учитывая, что при этом угол φ изменяется от 0 до $\pi/2$, вычислим проекции искомого вектора напряженности $\mathbf{E}$ в точке A и его модуль:

$$E_x = \int_0^\infty dE_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a};$$

$$E_y = \int_0^\infty dE_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi = -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a};$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\,\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

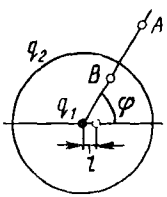

Рис. 10-6

10-6. Точечный заряд $q_1 = 20$ нКл помещен в центре непроводящей сферической поверхности радиуса $R = 15$ см, по которой равномерно распределен заряд $q_2 = -20$ нКл. Определить напряженность поля в точках A и B, удаленных от центра сферы на расстояния $r_A = 20{,}0$ см и $r_B = 10{,}0$ см. Чему будет равна напряженность поля в точке A, если заряд q_1 сместить на расстояние $l = 1{,}0$ мм от центра сферы в направлении, которое составляет с радиусом-вектором, проведенным в точку A, угол $\varphi = 60°$ (рис. 10-6)?

Решение. Напряженность поля, созданного зарядами q_1 и q_2, равна векторной сумме напряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ поля каждого заряда. Хотя здесь заряд q_2 не является точечным, разбивать его на бесконеч-

но малые элементы ,как это было сделано в трех предыдущих задачах, не обязательно, так как этот заряд распределен равномерно по поверхности сферы. Поэтому для определения поля этого заряда можно воспользоваться формулами (10.7). Как следует из (10.7а), поле сферы в точке A таково, как если бы весь заряд сферы находился в ее центре. Поэтому можно считать, что на сфере вообще зарядов нет, но в ее центре находятся два заряда q_1 и q_2. Так как по условию они равны по модулю и противоположны по знаку, то ясно, что их поля в точке A (как и в любой другой точке вне сферы) уничтожат друг друга. Следовательно,

$$E_A = 0.$$

Чтобы найти напряженность поля в точке B, учтем, что согласно (10.7б) заряды, равномерно распределенные на сфере, не создают поля внутри нее. Следовательно, в точке B будет поле, созданное только зарядом q_1, и его напряженность

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_B^2}.$$

После смещения заряда q_1 из центра сферы поля зарядов q_1 и q_2 уже не будут уничтожать друг друга. По-прежнему заменяя заряженную сферу зарядом, находящимся в ее центре, видим, что задача сводится к определению напряженности поля (в точке A) системы двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов, т. е. поля диполя, имеющего плечо l и электрический момент $p = q_1 l$. Так как, по условию, $r_A \gg l$, то, воспользовавшись формулой (10.6), найдем напряженность поля в точке A:

$$E'_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 l}{r_A^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}.$$

Выразим данные величины в единицах СИ: $(1/4\pi\varepsilon_0) = 9{,}00 \times 10^9$ м/Ф, $q_1 = 2{,}0 \cdot 10^{-8}$ Кл, $r_A = 0{,}200$ м, $r_B = 0{,}100$ м, $l = 1{,}0 \times 10^{-3}$ м, $\cos\varphi = 0{,}50$. Подставив эти значения в формулы для E_B и E'_A и выполнив вычисление, получим:

$$E_B = 18 \cdot 10^7 \text{ В/м}; \qquad E'_A = 25 \text{ В/м}.$$

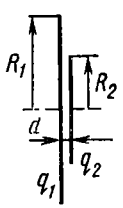

Рис. 10 7

10-7. Два коаксиальных диска радиусов $R_1 = 10{,}0$ см и $R_2 = 5{,}0$ см расположены на расстоянии $d = 2{,}4$ мм друг от друга (рис. 10-7). Диски заряжены равномерно с поверхностной плотностью, равной $\sigma = -20{,}0$ мкКл/м^2. Определить силу электрического взаимодействия дисков.

Решение. Найдя площадь дисков и зная поверхностную плотность их заряда, можно по формуле (10.11) найти заряды дисков. Однако было бы ошибкой вычислять затем силу их взаимодействия по закону Кулона, который применим лишь для точечных зарядов.

Можно сначала по закону Кулона найти силу взаимодействия двух бесконечно малых элементов дисков, а затем, суммируя эти силы по обеим плоскостям (т. е. производя двойное интегрирование), определить полную силу взаимодействия дисков.

Однако существует другой, более простой, путь решения задачи. Каждый из двух взаимодействующих зарядов находится в поле другого заряда. При этом напряженность поля заряженного диска радиуса R_1 в тех точках, где расположен второй диск, можно вычислить, не прибегая к интегрированию. Действительно, все точки диска R_2 находятся *близко* от диска R_1 и *далеко* от его краев. Это значит, что диск R_1 можно рассматривать как бесконечную равномерно заряженную плоскость, напряженность которой определяется формулой (10.10). Выразив из формулы (10.11) заряд диска R_2:

$$q_2 = \sigma S_2 = \pi R_2^2 \sigma, \tag{1}$$

найдем искомую силу F из соотношения (10.2):

$$F = q_2 E.$$

Подставив вместо q_2 и E их значения по формулам (1) и (10.10), получим*

$$F = \pi R_2^2 \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\pi R_2^2 \sigma^2}{2\varepsilon_0}. \tag{2}$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $R_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ м, $\sigma = 2{,}00 \cdot 10^{-5}$ Кл/м², $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Выполнив вычисление, найдем

$$F = 0{,}18 \text{ Н}.$$

Замечание. Как видно из формулы (2), сила взаимодействия дисков не зависит от расстояния между ними. Конечно, это будет лишь до тех пор, пока диск радиуса R_1 можно рассматривать как бесконечную плоскость, т. е. пока выполняется неравенство $d \ll R_1 - R_2$. Наоборот, при достаточно большом расстоянии между дисками, когда $d \gg R_1$, заряды дисков можно считать точечными и силу взаимодействия между ними рассчитывать по закону Кулона.

§ 11. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основные формулы

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r, при условии, что $W_\infty = 0$, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{11.1}$$

* То обстоятельство, что заряд q_2 не является точечным, здесь не приведет к ошибке, так как во всех точках пространства, им занимаемых, напряженность поля **E** имеет одинаковые модуль и направление.