Можно сначала по закону Кулона найти силу взаимодействия двух бесконечно малых элементов дисков, а затем, суммируя эти силы по обеим плоскостям (т. е. производя двойное интегрирование), определить полную силу взаимодействия дисков.

Однако существует другой, более простой, путь решения задачи. Каждый из двух взаимодействующих зарядов находится в поле другого заряда. При этом напряженность поля заряженного диска радиуса R_1 в тех точках, где расположен второй диск, можно вычислить, не прибегая к интегрированию. Действительно, все точки диска R_2 находятся *близко* от диска R_1 и *далеко* от его краев. Это значит, что диск R_1 можно рассматривать как бесконечную равномерно заряженную плоскость, напряженность которой определяется формулой (10.10). Выразив из формулы (10.11) заряд диска R_2:

$$q_2 = \sigma S_2 = \pi R_2^2 \sigma, \tag{1}$$

найдем искомую силу F из соотношения (10.2):

$$F = q_2 E.$$

Подставив вместо q_2 и E их значения по формулам (1) и (10.10), получим*

$$F = \pi R_2^2 \sigma \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\pi R_2^2 \sigma^2}{2\varepsilon_0}. \tag{2}$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $R_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ м, $\sigma = 2{,}00 \cdot 10^{-5}$ Кл/м², $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Выполнив вычисление, найдем

$$F = 0{,}18 \text{ Н}.$$

Замечание. Как видно из формулы (2), сила взаимодействия дисков не зависит от расстояния между ними. Конечно, это будет лишь до тех пор, пока диск радиуса R_1 можно рассматривать как бесконечную плоскость, т. е. пока выполняется неравенство $d \ll R_1 - R_2$. Наоборот, при достаточно большом расстоянии между дисками, когда $d \gg R_1$, заряды дисков можно считать точечными и силу взаимодействия между ними рассчитывать по закону Кулона.

§ 11. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основные формулы

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r, при условии, что $W_\infty = 0$, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \tag{11.1}$$

* То обстоятельство, что заряд q_2 не является точечным, здесь не приведет к ошибке, так как во всех точках пространства, им занимаемых, напряженность поля **E** имеет одинаковые модуль и направление.

Потенциал электрического поля (определяющая формула)

$$\varphi = W/q', \tag{11.2}$$

где W — потенциальная энергия пробного заряда q', помещенного в данную точку поля

Работа, совершенная силами поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2,

$$A = -\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{11.3}$$

или

$$A = \int_1^2 F_l\, dl = q \int_1^2 E_l\, dl, \tag{11.4}$$

где E_l — проекция вектора напряженности $\mathbf{E}$ на направление $d\mathbf{l}$; при этом интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2

Разность потенциалов и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l\, dl, \tag{11.5}$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dl}, \tag{11.6}$$

где производная $d\varphi/dl$ берется в направлении быстрейшего изменения потенциала, т. е. вдоль силовой линии.

Для однородного поля ($\mathbf{E}$ = const)

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l, \tag{11.7}$$

где l — расстояние между двумя точками, измеренное вдоль силовой линии

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{11.8}$$

Потенциал поля сферической поверхности радиуса r_0, по которой равномерно распределен заряд q, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{11.9}$$

для точек, лежащих вне сферы на расстоянии r от ее центра, и

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_0} \tag{11.10}$$

для точек, лежащих на поверхности сферы или внутри нее

Методические указания

1. Для вычисления потенциала поля, созданного одним или несколькими точечными зарядами, применяют формулу (11.8), а также принцип суперпозиции полей, в силу которого потенциал поля нескольких точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами.

2. Если в электрическое поле вносится проводник, то в последнем всегда происходит явление электростатической индукции: свободные заряды проводника перераспределяются так, что напряжен-

ность электрического поля внутри проводника, равная векторной сумме напряженностей внешнего поля и поля зарядов самого проводника, становится равной нулю. При этом все точки проводника приобретают одинаковый потенциал, называемый потенциалом проводника. Следует помнить, что в результате явления электростатической индукции изменяется, вообще говоря, потенциал и напряженность поля в пространстве вокруг проводника. Только если известно распределение всех зарядов, в том числе и зарядов, индуцированных на проводнике, можно найти потенциал в данной точке поля. Так как распределение индуцированных зарядов заранее бывает неизвестно, решение задачи в общем случае оказывается весьма сложным. Поэтому в курсе общей физики обычно ограничиваются случаями, в которых в силу симметрии можно найти распределение индуцированных зарядов на проводнике (см. задачу № 11-3) или пренебречь этим распределением (см. задачу № 11-7).

3. Физический смысл имеет не сам потенциал, а лишь его изменение (разность потенциалов, или напряжение), подобно тому, как существенным является не сама потенциальная энергия системы, а лишь ее изменение, равное работе, совершенной системой. Так, формула (11.1), выражающая потенциальную энергию взаимодействия зарядов, справедлива лишь при условии, что величина W при бесконечном удалении зарядов условно принимается равной нулю; формулы (11.8)—(11.10) также выведены в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю.

4. В основе общего метода определения разности потенциалов лежит соотношение (11.5), связывающее разность потенциалов двух точек поля с напряженностью поля в пространстве между этими точками. При этом существенно, что интегрирование можно производить по любому пути, соединяющему две точки. Этот метод вычисления разности потенциалов применен при решении задач № 11-5, 11-7.

Если известно пространственное распределение потенциала в неоднородном поле, формула (11.6) позволяет находить напряженность поля. Задача упрощается в случае симметричных полей, когда заранее известно направление вектора $\mathbf{E}$. Тогда достаточно взять производную от потенциала по координате в данном направлении (см. задачу № 11-2).

Решение задач

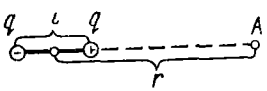

Рис. 11-1

11-1. Определить потенциал электрического поля точечного диполя, электрический момент которого $p = 2{,}0 \cdot 10^{-14}$ Кл · м, в точке, лежащей на оси диполя на расстоянии $r = 10{,}0$ см от его центра со стороны положительного заряда.

Решение. Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциал любой точки электрического поля диполя равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым зарядом диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Тогда для точки A (рис. 11-1) по формуле (11.8) имеем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-l/2} - \frac{q}{r+l/2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{r^2 - l^2/4},$$

где $p = ql$. Таким образом, для определения потенциала поля диполя надо знать, вообще говоря, не только его электрический момент p, но и плечо l. Учтем, однако, что для *точечного* диполя выполняется соотношение $l \ll r$. Поэтому, пренебрегая величиной $l^2/4$ в знаменателе выведенной формулы, найдем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{r^2}.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $p = 2{,}0 \times \times 10^{-14}$ Кл · м, $r = 0{,}100$ м, $(1/4\pi\varepsilon_0) = 9{,}00 \cdot 10^9$ м/Ф. Выполнив вычисление, получим

$$\varphi = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{В} = 18\ \text{мВ}.$$

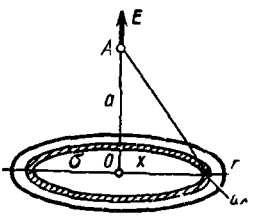

Рис 11 2

11-2. Тонкий диск радиуса r равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал и напряженность поля в точке A, лежащей на оси диска на расстоянии a от него (рис. 11-2).

Решение. Чтобы найти потенциал в точке A, надо применить принцип суперпозиции полей. Разобьем диск на элементарные кольца толщиной dx. Площадь кольца радиуса x равна $2\pi x dx$, а заряд кольца — $2\pi\sigma x dx$. Потенциал поля кольца равен сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами. Так как последние равноудалены от точки A, то, заменив заряд кольца точечным зарядом той же величины, удаленным на расстояние $\sqrt{a^2 + x^2}$ от точки A, найдем по формуле (11.8) потенциал кольца:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\pi\sigma x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Интегрируя, определим потенциал диска:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^r \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + r^2} - a\right). \qquad (1)$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля направлен в точке A вдоль оси диска. Поэтому для нахождения модуля E можно применить тот же метод, что и в

задаче № 10-4. Однако, имея ответ (1), поступим проще. Рассматривая величину a как переменную, по формуле (11.6) получим

$$E = -\frac{d\varphi}{da} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right). \qquad (2)$$

Заметим, что при $a \ll r$ выражение (2) переходит в формулу (10.10) для напряженности поля бесконечной плоскости.

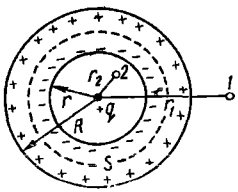

Рис 11-3

11-3. Точечный заряд $q = 0{,}15$ мкКл находится в центре сферической проводящей оболочки, внешний и внутренний радиусы которой соответственно равны $R = 25$ см и $r = 20$ см (рис. 11-3). Определить напряженность поля в точках *1* и *2*, удаленных от заряда соответственно на $r_1 = 50$ см и $r_2 = 10{,}0$ см, а также разность потенциалов между этими точками.

Решение Если бы заряд q не был окружен проводником, ответы на все вопросы можно было бы получить по формулам (10.5) и (11.8). Что же изменится из-за наличия проводника?

Под влиянием поля заряда q на сферических поверхностях проводника появятся индуцированные заряды, равные по модулю и противоположные по знаку; на внутренней поверхности —отрицательные, на внешней — положительные. Из соображений симметрии ясно, что, эти заряды равномерно распределятся по каждой поверхности. Но согласно формуле (10.7а) это означает, что напряженность поля индуцированных зарядов такова, как если бы оба заряда ($+q_{инд}$ и $-q_{инд}$) оказались в центре сферы. Ясно, что при этом их поля будут уничтожать друг друга. Учитывая также соотношение (10.7б), приходим к выводу, что наличие проводящей оболочки не изменит напряженности поля заряда q в точках *1* и *2*.

Подставив в формулу (10.5) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ: $q_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Кл, $r_1 = 0{,}50$ м, $r_2 = 0{,}100$ м, найдем:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2} = 5\cdot 10^3 \text{ В/м} = 5 \text{ кВ/м}; \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} =$$
$$= 1{,}4\cdot 10^5 \text{ В/м} = 1{,}4\cdot 10^2 \text{ кВ/м}.$$

Потенциалы в каждой из точек *1* и *2* определим, как и в предыдущей задаче, с помощью принципа суперпозиции полей:

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_{q_{инд}} + \varphi_{-q_{инд}}.$$

Тогда для точки *1* согласно формулам (11.8) и (11.9) получим

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q_{инд}}{r_1} - \frac{q_{инд}}{r_1}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}, \qquad (1)$$

т. е. потенциал снаружи сферической оболочки таков, как будто ее нет.

Чтобы найти потенциал поля в точке *2*, учтем, что напряженность поля зарядов, равномерно распределенных по поверхности сферы, равна нулю внутри сферы. Поэтому все точки этого поля внутри сферы имеют одинаковый потенциал, равный потенциалу самой сферы и определяемый формулой (11.10). Следовательно, для точки *2*, лежащей внутри оболочки, снова применяя принцип суперпозиции полей, найдем

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} + \frac{q_{инд}}{R} - \frac{q_{инд}}{r}\right). \qquad (2)$$

Чтобы определить величину $q_{инд}$, воспользуемся теоремой Гаусса (10.4), применив ее для замкнутой поверхности S, проходящей внутри проводника и охватывающей заряды q и $-q_{инд}$ (пунктир на рис. 11-3). Так как внутри проводника при установившемся распределении зарядов электрическое поле отсутствует, поток вектора напряженности N, определяемый формулой (10.3), равен нулю. Но тогда из (10.4) следует, что

$$\Sigma q_i = q - q_{инд} = 0.$$

Приходим к выводу, что индуцированные заряды $+q_{инд}$ и $-q_{инд}$ численно равны заряду q. Поэтому формулу (2) можно переписать так:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \qquad (3)$$

Теперь из формул (1) и (3) получим ответ:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = 9\cdot 10^3\ \text{В} = 9\ \text{кВ}.$$

Из последнего соотношения видно, что в результате явления электростатической индукции разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ уменьшилась (сумма последних двух членов меньше нуля).

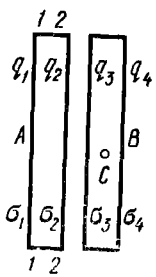

Рис. 11-4

11-4. Объяснить, почему *все* заряды, находящиеся на пластине плоского конденсатора, несмотря на их взаимное отталкивание, располагаются на внутренней поверхности пластины (т. е. на той поверхности, которая обращена к соседней пластине).

Решение. В данном случае в отличие от предыдущей задачи целесообразно воспользоваться не самой теоремой Гаусса (10.4), а выведенной с ее помощью формулой (10.10) для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости. Кроме того, необходимо

применить свойство проводников, в силу которого электрическое поле в них при установившемся распределении зарядов всегда равно нулю.

Пластина A всякого реального плоского конденсатора есть проводящее тело, ограниченное двумя плоскостями — наружной *1-1* и внутренней *2-2* (рис. 11-4). Допустим, что заряды распределены по обеим поверхностям каждой пластины (внутри проводника при электростатическом равновесии, как известно, зарядов нет). Из соображений симметрии ясно, что, сколько бы зарядов ни было на данной поверхности, они должны распределиться по ней *равномерно**. Следовательно, заряженный конденсатор можно представить как систему четырех равномерно заряженных плоскостей. Пусть их заряды равны q_1, q_2, q_3, q_4, а поверхностные плотности заряда $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Тогда напряженность поля в какой-либо точке C, находящейся внутри пластины B, найдем на основании формулы (10.10) и принципа суперпозиции полей. При этом учтем, что положительные заряды q_1, q_2 и отрицательный заряд q_4 создают в точке C электрическое поле одного направления, а отрицательный заряд q_3 — противоположного. Следовательно, напряженность поля в точке C равна

$$E_C = \frac{1}{2\varepsilon_0}(|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_4| - |\sigma_3|) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(|q_1| + |q_2| + |q_4| - |q_3|).$$

Так как $|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$, то можно записать

$$E_C = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(|q_3| + |q_4| + |q_4| - |q_3|) = \frac{|q_4|}{\varepsilon_0 S}.$$

С другой стороны, напряженность поля в точке C, находящейся *внутри проводника*, должна быть равна нулю. Тогда из последней формулы следует: $q_4 = 0$. Таким образом, в действительности на внешней поверхности пластины B зарядов нет, все заряды распределяются только по внутренней поверхности пластины. Из симметрии задачи ясно, что и на пластине A заряды распределяются лишь по ее внутренней поверхности.

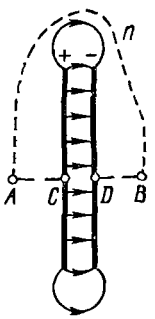

Рис 11 5

11-5. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 100$ В. Определить работу, которую совершат силы поля при перемещении заряда $q = 0{,}52$ мкКл из точки A в точку B (рис. 11-5).

* Мы не рассматриваем заряды вблизи краев пластины, полагая их бесконечными, т. е. принимая расстояние между пластинами и их толщину малыми по сравнению с линейными размерами пластин.

Решение. Поскольку электрическое поле плоского конденсатора заключено между его пластинами, точки A и B находятся вне поля. Поэтому можно было бы сделать вывод, что разность потенциалов между ними отсутствует (как, например, в задаче № 11-3 для точек, лежащих внутри равномерно заряженной сферы). Однако в действительности это не так.

Разность потенциалов и напряженность электрического поля связаны формулой (11.5). Поскольку при этом интегрировать можно по любой линии, соединяющей точки A и B, выберем прямую AB. Тогда получим

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B E_l\,dl = \int_A^C E_l\,dl + \int_C^D E_l\,dl + \int_D^B E_l\,dl. \qquad (1)$$

Так как во всех точках интервалов AC и DB поле отсутствует, видим, что из трех интегралов в правой части формулы (1) первый и третий равны нулю. Следовательно,

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_C^D E_l\,dl = U = 100 \text{ В}.$$

Таким образом, между точками A и B существует та же разность потенциалов, что и между пластинами конденсатора. Отсюда искомая работа по перемещению заряда согласно формуле (11.3) равна

$$A = q(\varphi_A - \varphi_B) = 5{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \text{ Дж} = 5{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} =$$

$$= 52 \text{ мкДж}.$$

Замечание. В действительности заряд q перемещается из точки A в точку B не по прямой AB, а по некоторой кривой AnB (см. рис. 11-5), обходя пластины конденсатора. Возникает вопрос: какие же силы совершают вычисленную нами работу, если поле конденсатора заключено между его пластинами?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, следует учесть рассеивание силовых линий электрического поля у краев пластин. Чем дальше от краев, тем меньше напряженность, но зато тем больший путь пройдет заряд q, двигаясь под действием сил электрического поля, чтобы попасть из точки A в точку B. В результате силы поля, перемещая заряд по любому пути из A в B, совершают одинаковую, отличную от нуля работу.

Рис. 11-6

11-6. Четыре металлические пластины, параллельные друг другу, находятся на равных расстояниях d (рис. 11-6). Пластины C и D заряжены до напряжения U, после чего отсоединены от источника тока. Как изменится напряжение между этими пластинами, если пластины A и B соединить проводником?

Решение. Выясним, что́ произойдет при соединении пластин A и B. Находясь вне поля заряженного конденсатора, они тем не менее обладали разными потенциалами, как это следует из решения предыдущей задачи (разность их потенциалов также была равна U). Поэтому при соединении пластин проводником по последнему потечет электрический ток. Заряды будут перемещаться до тех пор, пока потенциалы пластин не станут равными. В результате пластина A, потенциал которой понизился, зарядится отрицательно; пластина B, потенциал которой повысился, зарядится положительно.

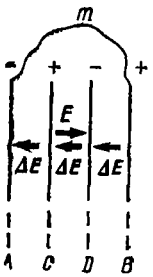

Рис. 11-7

Теперь систему четырех пластин можно рассматривать как два конденсатора, из которых один (CD) вставлен внутрь другого (AB). Электрические поля этих конденсаторов направлены навстречу друг другу. На рис. 11-7 изображены векторы напряженности: $\mathbf{E}$ — поля конденсатора CD и $\Delta\mathbf{E}$ — поля конденсатора AB. Тогда напряженность результирующего поля внутри конденсатора CD согласно принципу суперпозиции полей равна $E' = E - \Delta E$.

Очевидно, для ответа на вопрос задачи достаточно найти отношение величин E'/E. Действительно, согласно формуле (11.7) напряжение между пластинами конденсатора CD и напряженность однородного электрического поля в пространстве между ними пропорциональны друг другу.

Воспользуемся теперь следующим свойством электрического поля: работа сил поля по перемещению заряда по любому замкнутому пути равна нулю. Это значит, что интеграл, стоящий в правой части формулы (11.4), взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю:

$$\oint E_l dl = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим замкнутый контур $ACDBmA$ (рис. 11-7). Выберем направление его обхода против часовой стрелки. Учитывая направления векторов $\Delta\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}$, а также отсутствие электрического поля в проводнике, соединяющем пластины A и B (после того, как установится

определенное распределение зарядов на пластинах), на основании уравнения (1) получим

$$\oint E_l\,dl = \int_A^C E_l\,dl + \int_C^D E_l\,dl + \int_D^B E_l\,dl = -\Delta E d +$$
$$+ (E - \Delta E)\,d - \Delta E d = 0.$$

Отсюда находим:

$$\Delta E = E/3;\ E' = E - \Delta E = 2E/3.$$

Поскольку искомое напряжение пропорционально напряженности поля между пластинами конденсатора CD, то

$$U' = 2U/3. \qquad (2)$$

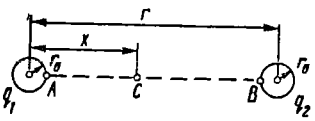

Рис 11 8

11-7. Определить разность потенциалов между двумя металлическими шарами радиуса $r_0 = 0{,}50$ см каждый, находящимися на расстоянии $r = 1{,}00$ м друг от друга, если заряд одного шара $q_1 = 1{,}50$ нКл, а другого $q_2 = -1{,}50$ нКл.

Решение. Как известно, заряды в проводнике распределяются так, что все его точки приобретают одинаковый потенциал. Уединенному шару, потенциал которого определяется формулой (11.10), соответствует равномерное распределение зарядов по его поверхности. В данном случае, взаимно притягиваясь, заряды шаров распределяются преимущественно на тех сторонах шаров, которыми они обращены друг к другу, вследствие чего изменится электрическое поле в пространстве вокруг шаров. Поэтому, согласно формуле (11.5), изменится также разность потенциалов между шарами и точное решение задачи оказывается связанным со значительными математическими трудностями.

Однако вытекающее из условия неравенство $r \gg r_0$ позволяет, не делая большой ошибки, пренебречь взаимным притяжением зарядов по сравнению с силами взаимного отталкивания одноименных зарядов в пределах каждого шара, т. е. считать распределение зарядов по поверхности шаров равномерным. Тогда задача упрощается: на основании формулы (10.7а) и принципа суперпозиции полей можно вычислить напряженность поля в любой точке пространства между шарами, а значит, по формуле (11.5) найти искомую разность потенциалов.

В качестве линии интегрирования выберем прямую AB (рис. 11-8). Векторы напряженности полей обоих шаров во всех точках этой прямой направлены от A к B (от положительного заряда к отрицательному). Поэтому результирующая напряженность в некоторой точке C, отстоящей на расстоянии x от центра левого шара, согласно формуле (10.7а) равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(r-x)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(r-x)^2}\right],$$

где $q = |q_1| = |q_2|$ — абсолютное значение каждого заряда.

Теперь на основании (11.5), учитывая, что в данном случае $E_l = E$, определим искомую разность потенциалов:

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_{r_0}^{r-r_0} E dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r-r_0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(r-x)^2}\right] dx.$$

Произведя интегрирование и сделав упрощения, найдем

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q(r-2r_0)}{r_0(r-r_0)}. \qquad (1)$$

Еще раз учитывая соотношение $r \gg r_0$, получим несколько менее точную, но более простую формулу:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r_0}. \qquad (2)$$

Вычисление по (2) дает:

$$\varphi_A - \varphi_B = 5{,}4 \cdot 10^3 \text{ В} = 5{,}4 \text{ кВ}.$$

Замечание. Легко видеть, что соотношение (2) можно получить сразу, вычислив потенциал каждого шара по формуле (11.10). Таким образом, эта формула дает в задаче для двух шаров приблизительно правильный результат при условии $r \gg r_0$. Однако он менее точен, чем формула (1). Дело тут в следующем. Применив формулу (11.10), мы не только пренебрегаем неравномерностью в распределении зарядов по поверхности шаров, но и не учитываем принципа суперпозиции полей, в силу которого потенциал *каждого* шара определяется совокупностью зарядов *обоих* шаров. Ошибки, к которым приводят обе эти неточности, имеют одинаковые знаки (ответ получается завышенным) и поэтому складываются.

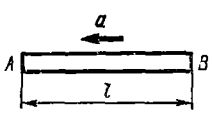

Рис 11 9

11-8. Объяснить, почему на концах ускоренно движущегося металлического стержня AB (рис. 11-9) появляется разность потенциалов. С каким ускорением a надо двигать проводник, чтобы разность потенциалов равнялась $U = 1{,}00$ мкВ? Длина проводника $l = 1{,}00$ м.

Решение. Наличие разности потенциалов свидетельствует о существовании внутри проводника электрического поля. На первый взгляд это противоречит правилу электростатики, утверждающему, что внутри проводника при установившемся распределении зарядов поле должно отсутствовать. Однако отметим, что это правило выведено для *неподвижных* проводников и является следствием того, что равнодействующая всех сил, приложенных к свободному заряду (для металла — к электрону) внутри проводника, должна быть равна нулю:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0, \qquad (1)$$

иначе заряд не смог бы оставаться неподвижным. Для неподвижных проводников силой, действующей на свободный заряд, будет лишь сила электрического поля, равная

$$\mathbf{F}_{эл} = e\mathbf{E}, \tag{2}$$

где e — величина заряда.

Чтобы применить законы электростатики к проводнику, который согласно условию задачи ускоренно движется, рассмотрим явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с данным проводником. В этой системе отсчета его свободные заряды неподвижны. Следовательно, по-прежнему будет выполняться условие (1) Но в неинерциальной системе отсчета на всякое тело действует сила инерции, равная

$$\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}. \tag{3}$$

Теперь условие равновесия заряда (1) запишется так:

$$\mathbf{F}_{эл} + \mathbf{F}_{ин} = 0. \tag{4}$$

Отсюда видим, что при ускоренном движении проводника в нем должно существовать электрическое поле даже в том случае, когда свободные заряды неподвижны относительно проводника. Это поле обусловлено соответствующим распределением зарядов (в данном случае — свободных электронов) по проводнику, отличному от их распределения в неподвижном проводнике.

Подставив в (4) вместо величин $\mathbf{F}_{эл}$ и $\mathbf{F}_{ин}$ их значения по формулам (2) и (3), получим

$$e\mathbf{E} = m\mathbf{a}. \tag{5}$$

При поступательном движении проводника все его точки имеют одинаковое ускорение. Поэтому вектор $\mathbf{E}$ в (5) также должен быть одинаковым для всех точек поля внутри проводника. Следовательно, это поле будет однородным. Тогда на основании (11.7) перепишем соотношение (5):

$$eU/l = ma,$$

откуда искомое ускорение

$$a = \frac{e}{m}\,\frac{U}{l}.$$

Взяв значения e и m для электрона из таблиц, выразим входящие в эту формулу величины в единицах СИ: $U = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ В, $l = 1{,}00$ м, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Выполнив вычисление, найдем

$$a = 1{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{м/с}^2.$$

11-9. Две частицы, обладающие массами m_1, m_2 и зарядами, равными $+q_1$, $+q_2$, движутся навстречу друг другу, имея вдалеке относительную скорость $v_{отн}$. На какое наименьшее расстояние сблизятся частицы?

Решение. Приведем три способа решения задачи, различающихся выбором системы отсчета.

1. Рассмотрим движение частиц в какой-либо «лабораторной» системе отсчета, например связанной с Землей. Полагая систему двух заряженных частиц изолированной, воспользуемся законом сохранения энергии

$$W = \text{const}, \tag{1}$$

где W — полная энергия частиц. Последние обладают в каждый момент времени кинетической энергией, а также потенциальной энергией кулоновского взаимодействия.

Когда частицы находятся вдалеке друг от друга, то, как это следует из формулы (11.1), их потенциальной энергией можно пренебречь. Тогда полная энергия системы

$$W_I = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2, \tag{2}$$

где v_1, v_2 — скорости частиц в выбранной системе отсчета. Так как векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены противоположно, то значения v_1 и v_2 связаны с заданной величиной $v_{отн}$ соотношением

$$v_{отн} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_1 + v_2. \tag{3}$$

При сближении частиц потенциальная энергия их кулоновского взаимодействия (отталкивания), будучи величиной положительной, начнет увеличиваться. Следовательно, суммарная кинетическая энергия частиц станет уменьшаться. Частицы не могут как угодно близко подойти друг к другу, иначе их потенциальная энергия оказалась бы больше полной энергии W_I, что противоречит условию (1).

При наибольшем сближении частиц, когда расстояние между ними равно $r_{мин}$, полная энергия

$$W_{II} = T_{мин} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{мин}}. \tag{4}$$

Чтобы найти кинетическую энергию $T_{мин}$ системы, учтем, что в момент наибольшего сближения частиц их скорости будут одинаковыми: $\mathbf{v}_{1\,мин} = \mathbf{v}_{2\,мин} = \mathbf{v}$. Действительно, когда скорости частиц неодинаковые, расстояние между ними растет или уменьшается и, следовательно, не является минимальным.

Применив к системе закон сохранения импульса, запишем:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v, \tag{5}$$

где $p_1 = m_1 v_1 - m_2 v_2$ — импульс системы удаленных частиц, $p_2 = (m_1 + m_2)\, v$ — импульс системы при наибольшем сближении частиц. При этом вектор $\mathbf{v}$ предположительно выбран совпадающим по

направлению с вектором $\mathbf{v}_1$ (очевидно, при подсчете кинетической энергии направление скорости несущественно). Из уравнения (5) имеем

$$v = (m_1 v_1 - m_2 v_2)/(m_1 + m_2).$$

Тогда для величины $T_{мин}$ получим

$$T_{мин} = \frac{(m_1 + m_2)\, v^2}{2} = \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)}.$$

Подставив это значение $T_{мин}$ в формулу (4), приравняв на основе закона сохранения энергии правые части формул (2) и (4), а также учитывая соотношение (3), найдем

$$r_{мин} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi e_0\, m_1 m_2 v_{отн}^2}.$$

2. Выберем систему отсчета, связанную с центром инерции системы двух частиц. Пусть скорости частиц в этой системе отсчета равны v_1' и v_2'. Сначала выразим каждую из величин v_1' и v_2' через относительную скорость $v_{отн}$. Так как частицы движутся навстречу друг другу, то

$$v_{отн} = v_1' + v_2'. \qquad (1)$$

Поскольку в данной системе отсчета скорость центра инерции частиц равна нулю, то, согласно формуле (3.4), суммарный импульс частиц $\mathbf{p} = 0$. Тогда, применив к системе частиц закон сохранения импульса и учитывая противоположные направления векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, получим

$$m_1 v_1' - m_2 v_2' = 0. \qquad (2)$$

Решив систему (1) и (2) относительно v_1 и v_2, найдем:

$$v_1' = [m_2/(m_1 + m_2)]\, v_{отн}; \quad v_2' = [m_1/(m_1 + m_2)]\, v_{отн}.$$

Полная энергия системы частиц в начальный момент равна сумме их кинетических энергий. В момент наибольшего сближения частицы имеют одинаковые по модулю и направлению скорости (см. 1-й способ). При этом каждая из скоростей равна нулю, так как в противном случае оказалось бы нарушенным условие $\mathbf{p} = 0$. Следовательно, частицы будут сближаться до тех пор, пока вся их кинетическая энергия не превратится в энергию кулоновского взаимодействия. Таким образом,

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{1}{4\pi e_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{мин}}.$$

Подставив сюда найденные значения v_1' и v_2', получим

$$r_{мин} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi e_0\, m_1 m_2 v_{отн}^2}.$$

3. Выберем систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с одной из заряженных частиц, например с первой. Эта система отсчета является неинерциальной. В ней первая частица неподвижна, а вторая движется навстречу первой с начальной скоростью $v_{отн}$ (рис. 11-10).

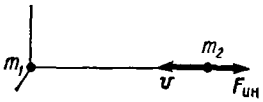

Рис 11-10

Теперь начальная энергия системы частиц равна кинетической энергии второй частицы:

$$W_I = m_2 v_{отн}^2/2, \qquad (1)$$

а конечная энергия (при $r = r_{мин}$) равна лишь потенциальной энергии кулоновского взаимодействия, т. е.

$$W_{II} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{мин}}, \qquad (2)$$

поскольку в момент наибольшего сближения вторая частица имеет нулевую скорость

В данном случае система взаимодействующих частиц является незамкнутой, так как на нее действуют силы инерции (см. § 2, п В), которые следует считать внешними по отношению к системе. Поэтому ни полный импульс, ни полная энергия системы частиц в неинерциальной системе отсчета не сохраняются.

Согласно закону сохранения энергии изменение энергии системы должно быть равно работе A силы инерции $F_{ин}$, действующей на частицу m_2 во время ее приближения к частице m_1:

$$W_{II} - W_I = A, \qquad (3)$$

и задача сводится к нахождению величины A.

Согласно определению силы инерции имеем

$$F_{ин} = -m_2 \mathbf{a}_1. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{a}_1$ — ускорение частицы m_1 в инерциальной системе отсчета. Его найдем с помощью второго закона Ньютона и закона Кулона:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{1}{m_1}.$$

Поскольку ускорение $\mathbf{a}_1$ первой частицы, обусловленное кулоновской силой отталкивания, направлено влево, то сила инерции, как это следует из (4), направлена вправо и равна

$$F_{ин} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{m_2}{m_1}. \qquad (5)$$

Так как частица m_2 перемещается влево, то сила инерции совершает над ней отрицательную работу, значение которой найдем, учитывая соотношение (5):

$$A = \int_{r_{мин}}^{\infty} F_{ин}(-dr) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{мин}} \frac{m_2}{m_1}. \qquad (6)$$

Подставив в (3) значения W_I, W_{II}, A из уравнений (1), (2), (6), найдем

$$r_{мин} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\varepsilon_0 m_1 m_2 v_{отн}^2}.$$

§ 12. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ

Основные формулы

Вектор поляризации **P** измеряется суммарным электрическим моментом всех молекулярных диполей в единице объема диэлектрика. Для изотропного диэлектрика вектор **P** пропорционален напряженности **E** поля внутри него:

$$\mathbf{P} = \varkappa\varepsilon_0 \mathbf{E}, \qquad (12.1)$$

где $\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна проекции вектора **P** на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика:

$$\sigma' = P_n. \qquad (12.2)$$

Для изотропного диэлектрика векторы электрического смещения (электрической индукции) **D** и напряженности **E** поля связаны формулой

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \qquad (12.3)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, равная

$$\varepsilon = 1 + \varkappa \qquad (12.4)$$

Теорема Гаусса: поток вектора **D** через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри нее свободных зарядов, т. е.

$$\oint_S D_n\, dS = \Sigma q_{i\,своб}. \qquad (12.5)$$

Электроемкость (емкость) конденсатора измеряется отношением его заряда к разности потенциалов (напряжению) на пластинах:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \qquad (12.6)$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/l, \qquad (12.7)$$

где S — площадь его пластин, l — расстояние между обкладками, ε — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор.

Емкость батареи из n конденсаторов, соединенных параллельно, равна

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (12.8)$$