

Так как частица m_2 перемещается влево, то сила инерции совершают над ней отрицательную работу, значение которой найдем, учитывая соотношение (5):

$$A = \int_{r_{\min}}^{\infty} F_{\text{ин}} (-dr) = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \frac{m_2}{m_1}. \quad (6)$$

Подставив в (3) значения W_1 , W_{II} , A из уравнений (1), (2), (6), найдем

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}.$$

§ 12. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ

Основные формулы

Вектор поляризации \mathbf{P} измеряется суммарным электрическим моментом всех молекулярных диполей в единице объема диэлектрика. Для изотропного диэлектрика вектор \mathbf{P} пропорционален напряженности \mathbf{E} поля внутри него:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (12.1)$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна проекции вектора \mathbf{P} на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика:

$$\sigma' = P_n. \quad (12.2)$$

Для изотропного диэлектрика векторы электрического смещения (электрической индукции) \mathbf{D} и напряженности \mathbf{E} поля связаны формулой

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (12.3)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, равная

$$\epsilon = 1 + \chi \quad (12.4)$$

Теорема Гаусса: поток вектора \mathbf{D} через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри нее свободных зарядов, т. е.

$$\oint D_n dS = \Sigma q_{\text{свобод.}} \quad (12.5)$$

Электроемкость (емкость) конденсатора измеряется отношением его заряда к разности потенциалов (напряжению) на пластинах:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (12.6)$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / l, \quad (12.7)$$

где S — площадь его пластин, l — расстояние между обкладками, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор

Емкость батареи из n конденсаторов, соединенных параллельно, равна

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (12.8)$$

Емкость батареи из n конденсаторов, соединенных последовательно, определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (12.9)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (12.10)$$

Объемная плотность энергии электрического поля (энергия отнесенная к единице объема) равна

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (12.11)$$

A. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Методические указания

1. Для расчетов электрических потоков при наличии диэлектриков вводят вспомогательную величину — вектор электрического смещения (электрической индукции) D — как линейную комбинацию векторов E и P : $D = \epsilon_0 E + P$. Непосредственно из теоремы Гаусса (12.5) следует, что поток вектора D через замкнутую поверхность не зависит от свойств среды.

В задачах курса общей физики, связанных с электростатическими явлениями, обычно рассматриваются лишь диэлектрики, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) они однородны и изотропны; 2) имеют форму, при которой ограничивающие их поверхности совпадают с эквипотенциальными поверхностями внешнего поля (т. е. перпендикулярны силовым линиям поля). Сюда относятся диэлектрики в плоских, цилиндрических и сферических конденсаторах (как однослойных, так и многослойных). Если такой диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ внести в электрическое поле постоянного заряда, то, как это следует из теоремы Гаусса (12.5) и соотношения (12.3), будут выполняться следующие правила:

1) вектор электрического смещения D остается без изменения во всех точках поля как внутри, так и вне диэлектрика;

2) вектор напряженности E электрического поля уменьшится в ϵ раз в пространстве, занятом диэлектриком, и останется без изменения вне диэлектрика.

Любое из этих правил позволяет рассчитывать электрические поля при наличии диэлектриков, удовлетворяющих сформулированным выше двум условиям.

2. Заряженную проводящую сферу, погруженную в однородный бесграниценный диэлектрик, можно рассматривать как частный случай сферического конденсатора, радиус наружной сферы которого беско-

нечно велик. Отсюда, учитывая изложенное в п. 1 и формулу (10.7а), приходим к выводу, что напряженность поля такой сферы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e} \frac{q}{r^2}. \quad (12.12)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что формулы § 10 и 11, выражающие напряженность и потенциал поля соответственно точечного заряда, диполя, сферы, цилиндра и плоскости в вакуме, остаются верными для заряженных тел, погруженных в однородный безграничный диэлектрик, только в знаменатели этих формул добавляется множитель ϵ .

Решение задач

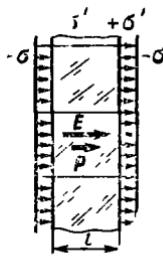


Рис. 12-1

12-1. Плоский конденсатор, между обкладками которого помещена стеклянная пластина ($\epsilon = 6$) толщиной $l = 2,00$ мм, заряжен до напряжения $U = 200$ В (рис. 12-1). Пренебрегая величиной зазора между пластинкой и обкладками, найти поверхностную плотность σ свободных зарядов на обкладках конденсатора, а также поверхностную плотность σ' связанных зарядов (зарядов поляризации) на стекле.

Решение. Величину σ выражим через напряженность поля E внутри конденсатора. Поскольку введение диэлектрика между его обкладками уменьшает эту напряженность поля в ϵ раз, величины σ и E можно связать формулой (10.12а), добавив в ее знаменатель множитель ϵ :

$$E = \sigma/\epsilon_0\epsilon.$$

Отсюда, учитывая соотношение (11.7), справедливое для однородного поля конденсатора, найдем

$$\sigma = \epsilon_0\epsilon U/l. \quad (1)$$

Чтобы определить величину σ' , воспользуемся формулой (12.2). Так как вектор P параллелен вектору напряженности E поля в диэлектрике, направленному по нормали к поверхностям стеклянной пластины, то $P_n = P$. Поэтому, учитывая соотношения (12.1) и (12.4), получим

$$\sigma' = P = \kappa\epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) U/l. \quad (2)$$

Выразим входящие в формулы (1) и (2) величины в единицах СИ: $U = 200$ в, $l = 2,00 \cdot 10^{-3}$ м, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Подставив эти значения и выполнив вычисление, найдем:

$$\sigma = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}/\text{м}^2; \sigma' = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}/\text{м}^2.$$

З а м е ч а н и е. Сравнив формулы (1) и (2), видим, что

$$\sigma'/\sigma = (\varepsilon - 1)/\varepsilon.$$

Этот результат можно сразу получить из рис. 12.-1, на котором изображены силовые линии электрического поля в стекле и во внутреннем зазоре между стеклом и обкладками. При этом надо помнить, что густота силовых линий пропорциональна напряженности поля, а диэлектрическая проницаемость ε среды показывает, во сколько раз поле внутри диэлектрика слабее поля внутри зазора. Следовательно, из каждого ε силовых линий, выходящих из свободных зарядов положительной обкладки конденсатора, лишь одна линия проходит сквозь диэлектрик, а остальные $\varepsilon - 1$ линий заканчиваются на связанных зарядах стеклянной пластинки.

12-2. Пространство внутри плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков, расположеннымими параллельно его обкладкам. Толщина слоев и диэлектрическая проницаемость материалов, из которых сделаны слои, соответственно равны l_1 , l_2 , ε_1 , ε_2 . Конденсатор заряжен до разности потенциалов U . Определить напряженности E_1 , E_2 электрического поля в каждом из диэлектриков, а также напряженность E_0 поля в зазоре между обкладками и диэлектриками.

Решение. Чтобы найти величины E_1 , E_2 и E_0 , выясним связь, существующую между ними и разностью потенциалов U . Воспользуемся формулой (11.5). Разбив весь путь интегрирования на две части, соответствующие толщинам двух слоев диэлектриков (толщиной зазора пренебрегаем), и учитывая, что в пределах каждого слоя поле однородно, получим

$$U = E_1 l_1 + E_2 l_2. \quad (1)$$

Так как электрическое смещение D в зазоре ($\varepsilon = 1$), и в обоих слоях диэлектриков имеет одно и то же значение, то на основании формулы (12.3) запишем (сокращая ε_0):

$$E_0 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_1 l_2}; \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_1 l_2}; \quad E_0 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 l_1 + \varepsilon_1 l_2}.$$

Б. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ

Методические указания

1. Понятие электроемкости конденсатора основана на существовании пропорциональной зависимости между разностью потенциалов (напряжением) на обкладках конденсатора и его зарядом:

$$U = (1/C) q, \quad (1)$$

где C — электроемкость. Поэтому задача определения емкости конденсатора сводится к установлению формулы, дающей в каждом конкретном случае эту зависимость. В общем случае эта задача решается на следующие этапы: 1) найти напряженность поля в какой-либо точке пространства между обкладками конденсатора как функцию заряда и координат точки, 2) пользуясь соотношением (11.5), найти разность потенциалов на обкладках как функцию заряда, т.е. получить соотношение типа (1), 3) взять величину, обратную коэффициенту пропорциональности в получившем выражении, это и будет емкость конденсатора.

2 Для расчета сил, действующих на заряженные тела в электрическом поле (пондеромоторных сил) при наличии диэлектриков, формула (10.2) оказывается, вообще говоря, неприменимой. Если заряженное тело погружено в диэлектрик, то формулой (10.2) можно пользоваться только в тех случаях, когда диэлектрик заполняет все пространство, где электрическое поле отлично от нуля. При этом по величине E , входящей в (10.2), понимают напряженность поля в диэлектрике. Так как для точечного заряда, погруженного в безграничный диэлектрик, величина E дается соотношением (12.12), то с учетом (10.2) получаем формулу, выражающую закон Кулона для взаимодействия точечных зарядов, погруженных в безграничный диэлектрик:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Эта формула имеет смысл только для жидкого или газообразного диэлектрика.

Общий метод определения сил, действующих в электрическом поле на заряженные тела, находящиеся как в вакууме, так и в диэлектриках, основан на законе сохранения энергии. При этом сила, с которой некоторая система действует на помещенное в нее заряженное тело, равна взятой с обратным знаком производной от энергии системы по перемещению тела в направлении действия силы. Закон сохранения энергии применен для расчета сил, а также моментов сил, действующих на заряженные тела, при решении задач № 12-5—12-7.

Решение задач

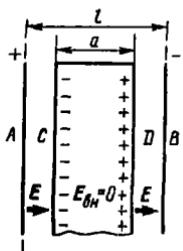


Рис. 12.2

12-3. Между обкладками плоского конденсатора параллельно им введена металлическая пластина толщиной $a = 8,0$ мм. Определить емкость конденсатора, если площадь каждой из обкладок $S = 100$ см², а расстояние между ними $l = 10,0$ мм.

Решение. Емкость конденсатора найдем из определяющей формулы (12.6), если предварительно выразим напряжение на обкладках конденсатора как функцию заряда его обкладок.

В результате явления электростатической индукции свободные заряды в металлической пластиинке, введенной в конденсатор, перераспределяются так, что напряженность электрического поля внутри пластиинки станет равной нулю:

$$E_{\text{вн}} = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, индуцированные заряды распределяются по поверхностям пластиинки так, что она станет подобной плоскому конденсатору CD (рис. 12-2), вставленному в данный конденсатор AB . Известно, что напряженность поля в пространстве вне плоского конденсатора равна нулю. Поэтому введение пластиинки в конденсатор AB не изменит напряженности однородного поля в пространстве вне пластиинки. Пусть эта напряженность равна E . Выразим ее через заряд конденсатора на основании формул (10.12а) и (10.11):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (2)$$

Из соотношения (11.5) с учетом формул (1) и (2) находим напряжение на обкладках конденсатора:

$$\varphi_A - \varphi_B = E(l - a) = q(l - a)/\epsilon_0 S. \quad (3)$$

Подставив в формулу (12.6) вместо напряжения его значение по (3), получим

$$C = \epsilon_0 S / (l - a). \quad (4)$$

Выразим входящие в (4) величины в единицах СИ: $S = 1,00 \times 10^{-2} \text{ м}^2$, $l = 10,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $a = 0,80 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Выполнив вычисление, найдем

$$C = 4,4 \cdot 10^{-11} \Phi = 44 \text{ пФ.}$$

12-4. Как изменяется энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ($\epsilon = 1$) при уменьшении расстояния между его пластиинами? Рассмотреть два случая:
1) конденсатор отключен от источника напряжения,
2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

Решение. 1. Если конденсатор отключен от источника напряжения, то заряд на его обкладках не будет изменяться при сближении пластиин, т. е.

$$q = \text{const.}$$

В то же время емкость конденсатора, как это следует из формулы (12.7), будет увеличиваться. Поэтому воспользуемся той из трех формул (12.10), в которой энергия конденсатора выражается через его заряд и емкость:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} l.$$

Видим, что при сближении пластин конденсатора его энергия, будучи пропорциональной величине l , уменьшается. Заметим, что за счет убыли энергии конденсатора совершается работа сил притяжения обкладок при их сближении:

$$A = -\Delta W. \quad (1)$$

2. На обкладках конденсатора поддерживается постоянное напряжение:

$$U = \text{const.}$$

Поэтому воспользуемся той из формул (12.10), в которой энергия конденсатора выражается через напряжение и емкость. Тогда, учитывая соотношение (12.7), получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \frac{1}{l}.$$

Следовательно, при сближении пластин энергия конденсатора, будучи обратно пропорциональной величине l , увеличивается.

З а м е ч а н и е. Выясним, за счет чего во втором случае увеличилась энергия конденсатора и совершилась работа сил притяжения обкладок. Возрастание емкости конденсатора при постоянном напряжении означает, согласно формуле (12.6), увеличение заряда на его пластинах. Значит, при сближении пластин на них дополнительно перейдут от источника напряжения заряды Δq . Сообщение одной пластине положительного заряда Δq , а другой отрицательного заряда — Δq эквивалентно перемещению заряда Δq с одной обкладки на другую. Так как этот переход происходит при постоянном напряжении U , то источник напряжения совершил работу

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = \Delta(CU) U = \Delta C \cdot U^2. \quad (2)$$

С другой стороны, энергия конденсатора увеличивается на

$$\Delta W = \Delta(CU^2/2) = \Delta C \cdot U^2/2. \quad (3)$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (3), видим, что работа, совершаемая при сближении пластин источником напряжения, в два раза больше прироста энергии конденсатора. Таким образом, теперь за счет энергии источника напряжения увеличивается энергия конденсатора ΔW , а также совершается работа A сил притяжения пластин. По закону сохранения энергии,

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + A.$$

Отсюда

$$A = A_{\text{ист}} - \Delta W = 2 \Delta W - \Delta W = \Delta W. \quad (4)$$

Сопоставляя формулы (1) и (4), приходим к выводу: при изменении емкости заряженного конденсатора электрические силы совершают работу, равную убыли энергии конденсатора в случае постоянства заряда на его пластинах и равную приращению энергии конденсатора в случае постоянства напряжения на пластинах.

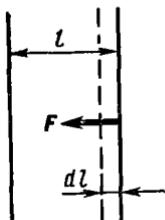


Рис. 12.3

12-5. Найти силу притяжения F между пластинами плоского конденсатора, если площадь каждой пластины S , расстояние между ними l , диэлектрическая проницаемость среды между пластинами ϵ . Рассмотреть два случая: 1) конденсатору сообщен заряд q , после чего он отключен от источника напряжения; 2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U . Как зависит сила притяжения от расстояния между пластинами и диэлектрической проницаемости среды?

Решение. Для определения сил, действующих на заряженные тела, при наличии диэлектриков формула $F = qE$, вообще говоря, неприменима. Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии.

1. В этом случае $q = \text{const}$. Пусть (представим мысленно) одна пластина конденсатора под действием силы притяжения F совершил элементарное перемещение dl (рис. 12.3). При этом сила F произведет работу, равную

$$\delta A = Fdl. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии эта работа равна убыли энергии конденсатора:

$$\delta A = -dW. \quad (2)$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим искомую силу:

$$F = -\frac{dW}{dl} \quad (3)$$

Энергию конденсатора выражим через заданные величины по формулам (12.10) и (12.7):

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (4)$$

Подставив в формулу (3) значение энергии W по (4) и выполнив дифференцирование, найдем

$$F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (5)$$

Отрицательный знак силы показывает, что она направлена в сторону уменьшения l , т. е. является силой притяжения.

Из формулы (5) видно, что сила притяжения пластин обратно пропорциональна величине ϵ и не зависит от расстояния между пластинами.

2. Согласно условию, $U = \text{const}$. Учитывая результат, сформулированный в замечании к задаче № 12-4, теперь вместо формул (2) и (3) для δA и F надо записать соответственно:

$$\delta A = dW; \quad (6)$$

$$F = \frac{|dW|}{dl}. \quad (7)$$

Энергию конденсатора также выразим по формулам (12.10) и (12.7):

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon SU^2}{2} \frac{1}{l}.$$

Подставив это значение W в формулу (7), получим

$$F = -\frac{\epsilon_0 \epsilon SU^2}{2l^2}. \quad (8)$$

Видим, что сила притяжения пластин пропорциональна величине ϵ и обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

З а м е ч а н и е. Попытаемся объяснить зависимость между величинами F и ϵ , выражаемую формулой (5), предполагая, что одна из пластин конденсатора находится в электрическом поле другой пластины (как было сделано в задаче №10-7).

Известно, что связанные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика в плоском конденсаторе, ослабляют поле (в ϵ раз) лишь *внутри* диэлектрика. Однако каждая из пластин конденсатора расположена вне диэлектрика. Поэтому появление диэлектрика между пластинами никак не скажется на электрическом поле, в котором находится каждая пластина (при условии $q = \text{const}$). Следовательно, и сила, действующая на каждую пластину, не зависит от наличия диэлектрика; согласно формуле (10.2),

$$F = qE, \quad (9)$$

где q — заряд одной пластины, E — напряженность поля другой пластины *в вакуме*.

Таким образом, получен результат, противоречащий выражению (5), в котором F зависит от ϵ . Это противоречие объясняется тем, что в формулах (5) и (9) речь идет о разных силах. В формуле (9) F — *электрическая* сила, действующая на каждую пластину конденсатора и в самом деле не зависящая от диэлектрика, лежащего между ними. Однако на каждую пластину конденсатора при наличии жидкого или твердого диэлектрика кроме электрической силы притяжения действуют еще *механические* силы давления F_d со стороны диэлектрика, соприкасающегося с пластиной. Эти силы уменьшают силу притяжения пластин конденсатора. Равнодействующая всех сил, приложенных к пластине, — *электрических и механических* — и является той силой, которая определяется формулой (5), выведенной с помощью закона сохранения энергии.

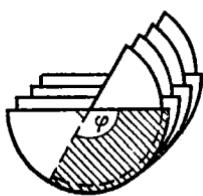


Рис. 12-4

12-6. Пластины конденсатора переменной емкости (рис. 12-4) имеют форму полукруга радиуса r , расстояние между соседними подвижной и неподвижной пластинами равно l . Всего имеется n промежутков между пластинами. Определить врачающий момент, действующий на пластины. Рассмотреть два случая: 1) конденсатору сообщен заряд q , после чего он отключен от источника напряжения; 2) на конденсаторе поддерживает постоянное напряжение U .

Решение. Вращающий момент, втягивающий подвижные пластины конденсатора в промежутки между неподвижными, обусловлен неоднородностями электрического поля пластин вблизи их краев. Поэтому решить задачу, рассматривая каждую пластину находящейся в электрическом поле соседних пластин, трудно. Вращающий момент можно найти с помощью закона сохранения энергии. При этом отпадает необходимость учитывать изменение электрического поля около краев пластин.

1. В этом случае $q = \text{const}$. Пусть (представим мысленно) подвижные пластины повернутся под действием вращающего момента M на малый угол $d\varphi$. Тогда силы притяжения совершают работу

$$\delta A = M d\varphi, \quad (1)$$

которая по закону сохранения энергии равна убыли энергии конденсатора:

$$\delta A = -dW. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим искомый момент:

$$M = -\frac{dW}{d\varphi}, \quad (3)$$

Энергию конденсатора выразим по формулам (12.10) и (12.7), учитывая, что каждому из n промежутков между пластинами соответствует один плоский конденсатор с площадью пластин, равной $\varphi r^2/2$ (заштрихованный участок на рис. 12-4):

$$W = n \frac{q^2}{2C} = n \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon \varphi^2}. \quad *$$

Подставив в (3) это значение W , найдем

$$M = -\frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{d(1/\varphi)}{d\varphi} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2 \varphi^2}. \quad (4)$$

Видим, что в данном случае вращающий момент зависит от угла поворота пластин φ : с увеличением угла (при вдвигании пластин) вращающий момент убывает*.

2. По условию, $U = \text{const}$. Снова применим закон сохранения энергии. Поскольку теперь конденсатор соединен с источником постоянного напряжения, вместо формул (2) и (3) получим (см. задачу № 12-4, 2-й случай):

$$\delta A = dW, \quad M = \frac{dW}{d\varphi}, \quad (5)$$

где энергия конденсатора

$$W = n \frac{CU^2}{2} = n \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2l} = \frac{n\epsilon_0 \epsilon \varphi r^2 U^2}{4l}.$$

* Соотношение (4) справедливо лишь для значений φ , достаточно больших для того, чтобы каждый из n конденсаторов можно было считать *плоским* конденсатором, емкость которого определяется формулой (12.7). В противном случае выражение (4) приводит к абсурду: при $\varphi \rightarrow 0$ $M \rightarrow \infty$ (!).

Подставив во вторую формулу (5) это значение W , найдем

$$M = \frac{n\epsilon_0 \sigma r^2 U^2}{4l}.$$

Видим, что вращающий момент не зависит от угла ϕ [см., однако, примечание к формуле (4)] и целиком определяется заданными в условии величинами.

12-7. Объемная плотность энергии электрического поля внутри заряженного плоского конденсатора с твердым диэлектриком ($\epsilon = 6,0$) равна $2,5 \text{ Дж/м}^3$. Найти давление, производимое пластинами площадью $S = 20 \text{ см}^2$ на диэлектрик, а также силу F' , которую необходимо приложить к пластинам для их отрыва от диэлектрика.

Решение. Притягиваясь друг к другу с силой F , пластины конденсатора сжимают диэлектрик, заключенный между ними.

Учитывая, что сила давления F_d равномерно распределена по поверхности диэлектрика, найдем искомое давление

$$p = \frac{F_d}{S} = \frac{F}{S}. \quad (1)$$

Как известно (см. задачу № 12-5), сила притяжения пластин конденсатора (при $q = \text{const}$) равна взятой с обратным знаком производной от его энергии по расстоянию между пластинами:

$$F = -\frac{dW}{dl}.$$

Поскольку в единице объема конденсатора заключена энергия w , равная ее объемной плотности, то полное изменение энергии dW при перемещении пластины конденсатора на расстояние dl равно

$$dW = wdV = wSdl.$$

Из двух последних равенств получаем силу притяжения пластин:

$$F = -wS, \quad (2)$$

откуда на основании формулы (1) находим

$$p = -w = -2,5 \text{ Па.} \quad (3)$$

Отрицательный знак в формулах (2) и (3) означает, что величины F и p направлены в сторону уменьшения расстояния l .

Чтобы найти силу F' , необходимую для отрыва пластины от диэлектрика, снова применим энергетический метод. Рассмотрим конденсатор в тот момент, когда под действием силы F' , направленной наружу, пластина, отрываясь от диэлектрика, переместится на расстояние dl . Работа силы F' равна

$$\delta A = F'dl. \quad (4)$$

За счет работы этой внешней силы энергия конденсатора возрастет на величину dW . По закону сохранения энергии,

$$dW = \delta A. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) имеем

$$F' = \frac{dW}{dt}.$$

Теперь прирост энергии конденсатора, связанный с увеличением его объема, равен

$$dW = \omega_0 S dl,$$

где ω_0 — объемная плотность энергии поля в зазоре, появившемся при смещении пластины. Из двух последних равенств найдем

$$F' = \omega_0 S. \quad (6)$$

Чтобы найти величину ω_0 , воспользуемся формулой (12.11). Так как индукция D и в зазоре ($\epsilon = 1$), и в диэлектрике имеет одно и то же значение, то $\omega_0 = \epsilon \omega$ и согласно формуле (6) получим

$$F' = \epsilon \omega S = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

В. СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

Методические указания

1. Формулы (12.8) и (12.9) применяют не только для расчета емкости батареи конденсаторов при параллельном или последовательном соединении, но и для определения емкости многослойных конденсаторов. Расположение слоев параллельно пластинам (рис. 12-5) при этом соответствует последовательному соединению однослоиных конденсаторов; если же границы слоев перпендикулярны пластинам, то считают, что имеется параллельное соединение однослоиных конденсаторов.

2. Соединение конденсаторов часто бывает смешанным, например соединение, изображенное на рис. 12-9 и представляющее собой параллельное соединение двух групп (ветвей), каждая из которых является последовательным соединением двух конденсаторов (C_1, C_2 — одна группа; C_3, C_4 — другая). Возможны более сложные варианты. Например, изображенное на рис. 12-9 соединение конденсаторов само может быть одним из нескольких элементов конденсаторной цепи, последовательно соединенных друг с другом. Во всех таких случаях, поочередно применяя формулы (12.8), (12.9) для соответствующих соединений и переходя от известного к неизвестному, можно найти емкость всего соединения.

3. В некоторых случаях сложное соединение конденсаторов нельзя отнести ни к типу параллельного, ни к типу последовательного. При этом иногда оказывается возможным заменить имеющуюся схему другой, эквивалентной данной в отношении емкости, причем ее уже можно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Такие эквивалентные замены основаны на возможности

соединять и разъединять точки цепи, имеющие одинаковые потенциалы, что обычно встречается в схемах, обладающих симметрией (см. задачу № 12-10).

4. При расчете электрической цепи, состоящей из конденсаторов и источников постоянного напряжения, которую невозможно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений, следует руководствоваться следующими двумя правилами.

Правило узлов, являющееся следствием закона сохранения электрического заряда: если пластины нескольких конденсаторов соединены в один узел, не связанный непосредственно с источником напряжения, то алгебраическая сумма зарядов на этих пластинах равна нулю, т. е.

$$\Sigma q = 0. \quad (12.13)$$

Правило контуров, вытекающее из закона сохранения энергии: алгебраическая сумма разностей потенциалов на всех конденсаторах и источниках напряжения, встречающихся при обходе любого замкнутого контура, равна нулю, т. е.

$$\Sigma U = 0. \quad (12.14)$$

Эти правила использованы при решении задачи № 12-11.

Решение задач



Рис. 12-5

12-8. Как изменится емкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить стеклянную пластину ($\epsilon = 6,0$), толщина которой равна половине расстояния между обкладками (рис. 12-5)?

Решение. Если между стеклом и воздухом посередине конденсатора поместить весьма тонкий слой проводника, это не изменит напряженности поля ни в стекле, ни в воздухе (см. задачу № 12-3). Из формулы (11.5) следует, что при этом не изменится и разность потенциалов между обкладками конденсатора, а значит, и его электропроводность. Но теперь данный конденсатор AB можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора: AD и DB .

Пусть емкость конденсатора AB до введения стеклянной пластины была равна C_0 . Тогда согласно формуле (12.7) емкости конденсаторов AD и DB равны $2C_0$ и $2\epsilon C_0$ соответственно. Емкость конденсатора AB после введения стеклянной пластины найдем по формуле (12.9) для последовательного соединения конденсаторов:

$$C' = \frac{C_{AD} C_{DB}}{C_{AD} + C_{DB}} = \frac{2C_0 \cdot 2\epsilon C_0}{2C_0 + 2\epsilon C_0} = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} C_0.$$

Произведя вычисление, получим

$$C' = 1,7 C_0.$$

Следовательно, емкость конденсатора AB увеличилась в 1,7 раза.



Рис. 12 6

12-9. Как изменится емкость плоского конденсатора, если его поместить в металлическую коробку, стенки которой удалены от пластин на расстояние, равное расстоянию между ними (рис. 12-6)? Влиянием краев пренебречь.

Решение. Приведем два метода решения задачи.

1. Этот метод основан на связи данной задачи с задачей № 11-6 и использует полученный в ней результат. Сравнивая рис. 11-7 и 12-6, легко заметить, что на них изображены эквивалентные схемы. Это значит, что, заключив конденсатор в металлическую коробку, мы получим такое же изменение разности потенциалов на его обкладках, как и на конденсаторе CD в задаче № 11-6 после соединения проводником пластин A и B . Поэтому соотношение (2) из задачи № 11-6 справедливо и здесь, если под U и U' понимать напряжения на конденсаторе соответственно до и после того, как его поместили в металлическую коробку. Так как при этом заряд конденсатора остается постоянным, то согласно формуле (12.6) его емкость изменится так, что

$$\frac{C'}{C} = \frac{U}{U'} = \frac{3}{2},$$

где C и C' — емкости конденсатора соответственно до и после его заключения в коробку.

Таким образом, емкость конденсатора увеличилась в 1,5 раза.

2. До сих пор мы рассматривали систему четырех пластин (см. рис. 11-7, 12-6) как два конденсатора (AB и CD), непосредственно не соединенных друг с другом. Теперь эту же систему пластин представим как три конденсатора: AC , CD и DB , обладающих одинаковой емкостью и определенным образом соединенных между собой. Чтобы выяснить тип соединения конденсаторов, учтем, что по условию можно пренебречь влиянием краев, и заменим схему на рис. 12-6 эквивалентной схемой, изображенной на рис. 12-7. Затем заменим каждую из пластин C и D двумя пластинами, соединенными между собой (рис. 12-8). Такая замена является эквивалентной, поскольку в конденсаторе заряды распределяются всегда лишь на внутренней поверхности каждой пластины, т. е. на той ее поверхности, которая обращена ко второй пластине данного конденсатора. Так, например, в системе пластин D_1 и D_2 , которой мы заменили пластину D , заряды распреде-

лятся только на левой поверхности пластины D_1 и правой поверхности пластины D_2 . Поэтому появление дополнительных проводников и поверхностей в результате раздвоения пластин C и D не изменит распределения зарядов на трех конденсаторах.

Заметим, что каждая из показанных на рис. 12-6, 12-7 пластин C и D является одновременно обкладкой двух конденсаторов (например, пластина D принадлежит конденсаторам CD и DB). Поэтому обе поверхности каждой из пластин C и D «внутренние» и по ним распределяются заряды.



Рис. 12-7

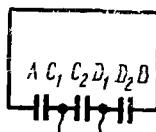


Рис. 12-8

Теперь найдем емкость батареи. Из рис. 12-8 видно, что конденсаторы AC_1 и D_2B соединены между собой последовательно. Поэтому их общая емкость

$$C_{nc} = C/2,$$

где C — емкость каждого из трех конденсаторов. Конденсатор C_1D_1 подключен параллельно к группе двух остальных конденсаторов. Поэтому емкость всей батареи

$$C_b = C + C_{nc} = 3C/2.$$

Таким образом, рассматривая в данном методе конденсатор, помещенный в металлическую коробку, как батарею, мы получили результат, совпадающий с найденным ранее: емкость возрастает в 1,5 раза.

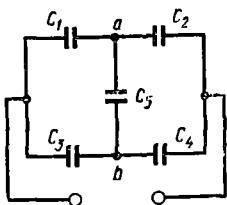


Рис. 12-9

12-10. На рис. 12-9 изображена батарея конденсаторов. Определить ее емкость, если $C_1 = C_3 = C$; $C_2 = C_4 = C_5 = 2C$.

Решение. Данное соединение из пяти конденсаторов нельзя разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. К такому выводу можно прийти, если вспомнить, что для последовательного соединения двух конденсаторов характерно отсутствие узлов на проводнике, соединяющем конденсаторы. С другой стороны, при параллельном соединении оба конденсатора непосредственно подключены к общим точкам.

чены к одним и тем же двум точкам цепи, поэтому на обоих проводниках, соединяющих два конденсатора, должно быть по одному узлу. Из рис. 12-9 видно, что ни одно из этих двух условий не выполняется ни для одной пары конденсаторов.

Заметим, что, отключив от цепи конденсатор C_5 , получим соединение, емкость которого легко рассчитать, поскольку это будет параллельное соединение двух ветвей: C_1 , C_2 и C_3 , C_4 , каждая из которых есть последовательное соединение двух конденсаторов.

Чтобы выяснить роль конденсатора C_5 , найдем разность потенциалов между точками a и b (рис. 12-9) после его отключения. Поскольку $C_1 = C_3$ и $C_2 = C_4$, обе параллельные ветви симметричны, поэтому потенциалы точек a и b , одинаково расположенных на ветвях, должны быть равны*. Таким образом, конденсатор C_5 на рис. 12-9 оказался подключенным к точкам с нулевой разностью потенциалов и, следовательно, незаряженным. Поэтому, отключив его, получим новую схему, эквивалентную старой в отношении емкости. Применяя для новой схемы формулы (12.8) и (12.9), найдем емкость батареи C_6 .

Емкость каждой из двух параллельных ветвей равна

$$C_{1,2} = C_{3,4} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = 2C/3,$$

а емкость всей батареи

$$C_6 = C_{1,2} + C_{3,4} = 4C/3.$$

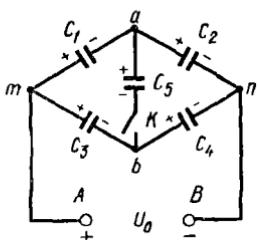


Рис. 12-10

Решение. После отключения батареи от источника ее заряд, равный сумме зарядов всех обкладок, соединенных с одним из зажимов батареи, остается постоянным независимо от положения ключа K . Однако при замыкании ключа изменится схема соединения конденсаторов, что вызовет изменение емкости батареи. Емкость и энергию батареи до и после замыкания ключа обозначим соответственно C_0 , W_0 и C , W . Тогда на основании формулы (12.10) получим изменение энергии батареи:

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2} \frac{C_0 - C}{C_0 C}.$$

* Учитывая обратно пропорциональную зависимость между емкостями двух последовательно соединенных конденсаторов и напряжениями на них, легко показать, что для равенства потенциалов в точках a и b достаточно существования пропорции $C_1 : C_2 = C_3 : C_4$.

Поскольку заряд батареи $q = C_0 U_0$, то

$$\Delta \Psi = \frac{C_0 U_0^2}{2} \frac{C_0 - C}{C} \quad (1)$$

и задача сводится к определению величин C_0, C .

Чтобы найти емкость C_0 , учтем, что батарея, изображенная на рис. 12-10, представляет собой параллельное соединение двух ветвей, каждая из которых есть последовательное соединение двух конденсаторов. Используя формулы (12.8), (12.9), получим

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 0,83 \text{ мкФ.}$$

Для нахождения величины C применим общий метод расчета емкости батареи. Пусть U — напряжение на зажимах батареи при замкнутом ключе. Выразим заряд q батареи через величины $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, U$. Учитывая, что заряд q пропорционален напряжению U , запишем

$$q = f(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) \cdot U. \quad (2)$$

По формуле (12.6) для батареи конденсаторов имеем

$$q = CU. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем

$$C = f(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5). \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению заряда батареи по формуле (2) как функции заданных величин C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и величины U . А это можно сделать с помощью правил (12.13), (12.14) для конденсаторных цепей.

Выразим заряд батареи через заряды конденсаторов:

$$q = q_1 + q_3. \quad (5)$$

Прежде чем составлять уравнения, необходимые для определения величин q_1 и q_3 , поставим знаки зарядов на обкладках всех конденсаторов в соответствии с выбранными знаками полюсов батареи (для конденсатора C_5 это можно сделать лишь предположительно). Применив для узлов a и b правило (12.13), запишем:

$$-q_1 + q_2 + q_5 = 0, \quad (6)$$

$$-q_3 + q_4 - q_5 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (5) — (7) содержат шесть неизвестных величин. Недостающие уравнения составим, используя правило контуров (12.14). Выберем направление обхода контуров, например по часовой стрелке. Чтобы избежать ошибки в знаках, надо помнить следующее: если в направлении обхода контура потенциал на данном участке (1-2) контура понижается, то разность потенциалов $\Phi_1 - \Phi_2$ будет положительной,

в противном случае — отрицательной. Тогда, учитывая соотношение (12.6), получим соответственно для контуров $tamb$, $anba$ и $AmanBA1$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} - U = 0. \quad (10)$$

Решив совместно уравнения (5) — (10), содержащие шесть неизвестных q , q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 , относительно q (предварительно подставив числовые значения всех емкостей в микрофарадах), найдем

$$q = (11/13) \quad U = 0,85 \quad U. \quad (11)$$

Сравнив формулы (11) и (3), определим емкость батареи при замкнутом ключе: $C = 0,85 \text{ мкФ}$. Теперь все величины в правой части формулы (1) известны. Выполнив вычисление, получим

$$\Delta W = -3,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = -0,39 \text{ мДж}.$$

З а м е ч а н и е. Знак минус в ответе показывает, что при замыкании ключа энергия батареи уменьшилась, хотя ее заряд не изменился. Это объясняется следующим. Перераспределение зарядов между конденсаторами сопровождалось электрическим током в соединительных проводах, что привело к нагреванию последних. Кроме того, изменение во времени силы этого тока обусловило излучение батареей электромагнитных волн. Следовательно, электростатическая энергия заряженной батареи частично превратилась в другие формы энергии.

Как следует из соотношения $W = q^2/2 C$, при уменьшении энергии в случае постоянства заряда увеличивается емкость батареи. Полученный результат имеет общий характер: если в любой батарее конденсаторов, отключенной от источника напряжения, соединить проводником точки, не связанные непосредственно с зажимами батареи, то это вызовет уменьшение энергии и увеличение емкости батареи.