Глава 4
ПОСТОЯННЫЙ ТОК

§ 13. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные формулы

Сила тока измеряется количеством электричества, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (13.1)$$

Плотность тока измеряется силой тока, отнесенной к единице площади поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{dI}{dS}. \qquad (13.2)$$

Закон Ома для участка однородной (т. е. не содержащей электродвижущих сил) цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R, \qquad (13.3)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов на концах участка, R — его сопротивление.

Сопротивление проводника длиной l с площадью поперечного сечения S равно

$$R = \rho l/S, \qquad (13.4)$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника

Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \qquad (13.5)$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при 0° С, α — температурный коэффициент сопротивления

Закон Ома в дифференциальной форме: плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля в данной точке проводника, т. е.

$$j = \sigma E, \qquad (13.6)$$

где $\sigma = 1/\rho$ — удельная электропроводность материала.

Закон Ома для участка неоднородной (т. е. содержащей электродвижущие силы) цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \Sigma\mathscr{E}}{\Sigma R}, \qquad (13.7)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов на концах участка, $\Sigma\mathscr{E}$ — алгебраическая сумма всех электродвижущих сил (э. д. с.), имеющихся на данном участке, ΣR — сумма всех сопротивлений участка

Закон Ома для замкнутой цепи: сила тока в замкнутой цепи пропорциональна алгебраической сумме всех э. д. с., действующих в цепи, и обратно пропорциональна ее полному сопротивлению, равному сумме сопротивлений внешнего и внутреннего участков, т. е.

$$I = \frac{\Sigma\mathscr{E}}{R_{внеш} + R_{внутр}}. \qquad (13.8)$$

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей:

1) алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в любом узле, равна нулю, т. е.

$$\Sigma I = 0, \tag{13.9}$$

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме всех э. д. с., действующих в этом контуре:

$$\Sigma IR = \Sigma \mathscr{E}. \tag{13.10}$$

Общее сопротивление n участков при их последовательном соединении равно

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i. \tag{13.11}$$

Общее сопротивление n участков при их параллельном соединении определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{13.12}$$

Работа электрических сил на участке цепи, на концах которого имеется разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, равна

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)\, It \tag{13.13}$$

Количество теплоты, выделенное на участке цепи сопротивлением R, по которому в течение времени t идет ток силой I, определяется соотношением (закон Джоуля — Ленца)

$$Q = I^2 Rt \tag{13.14}$$

Работа, совершенная источником электрической энергии за время t,

$$A = \mathscr{E} It = I^2 R_{\text{полн}}\, t = \frac{\mathscr{E}^2}{R_{\text{полн}}}\, t, \tag{13.15}$$

где $\mathscr{E}$ — э. д. с. источника, $R_{\text{полн}}$ — полное сопротивление цепи.

А. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ. ЗАКОН ОМА

Методические указания

1. Для вычисления силы тока и плотности тока, а также расчета сопротивлений при наличии однородных проводников применяют закон Ома в интегральной (13.3) или дифференциальной (13.6) форме. Интегральную форму закона Ома, как правило, удобно применять при расчетах, связанных с токами в проводах. Для вычисления же токов и сопротивлений при наличии проводящих безграничных сред (например, случаи заземления электродов) практически незаменимой оказывается дифференциальная форма закона Ома (см. задачу № 13-4). Существенно, что напряженность электрического поля **E** при наличии тока можно вычислять методами электростатики, так как она совпадает (при условии постоянства силы тока и однородности среды) с напряженностью такого электростатического поля, которое будет при том же напряжении между электродами, если среда станет непроводящей.

2. В учебной литературе одним и тем же термином «электрическое напряжение» или просто «напряжение» иногда обозначают разные физические величины. Здесь мы придерживаемся определения, получившего за последние годы распространение (см., например, учебники [3], [9]): напряжение между двумя точками электрической цепи измеряется работой, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении по цепи единичного положительного заряда из первой точки во вторую. При этом, как следует из формул (11.4),(11.5) и определения электродвижущей силы, напряжение

$$U_{12}=\int_1^2 E_l\,dl+\int_1^2 (E_{\text{ст}})_l\,dl=\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12},$$

где $E_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил, $\mathscr{E}_{12}$ — электродвижущая сила, действующая на участке цепи *1-2*.

При отсутствии сторонних сил величины U_{12} и $\varphi_1-\varphi_2$ совпадают. Поэтому в задачах электростатики и задачах на ток, где рассматриваются участки цепи, не содержащие э. д. с., понятия напряжения и разности потенциалов часто отождествляют.

Из приведенного определения напряжения следует, что при наличии сторонних сил его необходимо применять всегда к конкретному участку цепи, соединяющему данные точки. Действительно, если имеется несколько участков, соединяющих точки *1*, *2* и содержащих различные э. д. с., то при одной и той же величине $\varphi_1-\varphi_2$ напряжения на них будут различными.

Между тем в соответствии с другим определением напряжения (см., например, учебник [4]) его иногда отождествляют с разностью потенциалов даже при наличии сторонних сил. Например, говорят о напряжении на зажимах работающего гальванического элемента, включенного последовательно с подобными элементами, не указывая, к какому участку цепи, соединяющему зажимы, оно относится. Согласно принятому нами определению в этом случае правильно говорить не о напряжении на зажимах, а о разности потенциалов между ними.

3. Чтобы безошибочно применять закон Ома (13.7) для участка цепи, содержащего э. д. с., необходимо придерживаться следующих правил:

а) начертить схему и обозначить на ней полюсы всех источников, а также направление тока в цепи (если оно неизвестно, то надо указать предполагаемое направление);

б) ток считать положительным на заданном участке *1-2*, если он направлен от точки *1* к точке *2*;

в) э. д. с. считать положительной на участке *1-2*, если она повышает потенциал в направлении от точки *1* к точке *2*, т. е. при мысленном движении вдоль пути *1-2* сначала встречается отрицательный полюс источника, а затем положительный.

Решение задач

13-1. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение $t = 10{,}0$ с сила тока уменьшилась от $I_0 = 10{,}0$ А до $I = 5{,}00$ А? Рассмотреть два случая: 1) сила тока уменьшалась равномерно, 2) сопротивление проводника равномерно возрастало в течение указанного промежутка времени, а разность потенциалов на концах проводника поддерживалась постоянной.

Решение. 1. Величина заряда dq, проходящего через поперечное сечение проводника за время dt, связана с силой тока соотношением (13.1). Если в эту формулу вместо элементарных величин dq и dt подставить конечные значения q и t, то получим среднее значение силы тока $I_{ср}$ за время t, т. е. $I_{ср} = q/t$. Отсюда искомый заряд

$$q = I_{ср}t.$$

Поскольку сила тока в цепи изменялась равномерно, т. е. являлась линейной функцией времени, в качестве среднего значения $I_{ср}$ можно взять среднее арифметическое между начальным и конечным значениями силы тока за время t. Следовательно,

$$q = (I_0 + I)\ t/2 = 75\ \text{Кл}. \qquad (1)$$

2. Теперь равномерно изменяется не сила тока, а сопротивление R. Это значит, что величина R является линейной функцией времени, т. е.

$$R = R_0 + kt, \qquad (2)$$

где R_0 и R — соответственно начальное и конечное сопротивления проводника, k — постоянная величина, выражающая скорость изменения сопротивления. Тогда по закону Ома для участка однородной цепи (13.3) получим

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 + kt}. \qquad (3)$$

Видим, что в этом случае зависимость силы тока от времени не является линейной, поэтому соотношение (1) здесь неприменимо. Однако при любой зависимости силы тока от времени можно записать на основании (13.1)

$$dq = I\,dt.$$

Отсюда полный заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время t, выразится интегралом:

$$q = \int_0^t I\,dt.$$

Подставив вместо силы тока ее значение по формуле (3), выполним интегрирование:

$$q=\int_0^t \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}\,dt=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\ln\frac{R_0+kt}{R_0}\ .$$

Преобразовав этот результат с учетом формулы (2) и соотношений $R = (\varphi_1 - \varphi_2)/I$, $R_0 = (\varphi_1 - \varphi_2)/I_0$, найдем

$$q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)\,t}{R-R_0}\cdot\ln\frac{R}{R_0}=\frac{I_0\,It}{I_0-I}\cdot\ln\frac{I_0}{I}\ .$$

Подставив в формулу числовые значения величин, получим

$$q = 69 \text{ Кл}.$$

13-2. Определить плотность тока в медной проволоке длиной $l = 10$ м, если разность потенциалов на ее концах $\varphi_1 - \varphi_2 = 12$ В.

Решение. Плотность тока, определяемую формулой (13.2), найдем, выразив силу тока I по закону Ома (13.3) для участка однородной цепи. Тогда с учетом (13.4) получим

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2)\ S/\rho l.$$

Отсюда плотность тока

$$j=\frac{dI}{dS}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\rho l}\ . \qquad (1)$$

К этому же результату можно прийти, применив закон Ома в дифференциальной форме (13.6), предварительно выразив напряженность электрического поля внутри однородного проводника через разность потенциалов на концах проводника и его длину:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l.$$

Подставив это значение E в (13.6) и учитывая, что $\sigma = 1/\rho$, снова получим ответ (1).

Взяв из справочных таблиц значение удельного сопротивления меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м и выполнив вычисление по формуле (1), найдем

$$j = 7 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2.$$

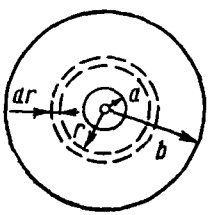

Рис. 13-1

13-3. Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых равны a и b (рис. 13-1), заполнено слабо проводящей однородной средой с удельным сопротивлением ρ. Определить силу тока утечки через конденсатор, если разность потенциалов между обкладками U.

Решение. Можно применить для решения закон Ома в интегральной форме (13.3) или дифференциальной (13.6). Воспользуемся первой формулой, быстрее приводящей к цели.

Чтобы с помощью закона Ома (13.3) найти силу тока через конденсатор, необходимо предварительно определить сопротивление среды между обкладками. Очевидно, применить непосредственно формулу (13.4), выведенную для цилиндрического проводника, вдоль которого течет ток, здесь невозможно. Однако если мысленно выделить внутри конденсатора элементарный шаровой слой радиуса r и толщиной dr (рис. 13-1), то, учитывая, что линии тока во всех элементах этого слоя перпендикулярны его поверхности, этот слой можно заменить эквивалентным в отношении сопротивления цилиндрическим проводником, имеющим длину dr и площадь поперечного сечения $4\pi r^2$. Тогда согласно формуле (13.4) сопротивление элементарного шарового слоя

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Интегрируя это выражение по всему расстоянию между обкладками конденсатора, получим полное сопротивление межэлектродного промежутка:

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Теперь по закону Ома (13.3) найдем силу тока утечки через конденсатор:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi U}{\rho\,(1/a - 1/b)}.$$

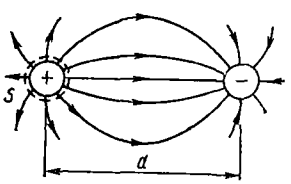

Рис 13 2

13-4. Два металлических шара одинакового радиуса a находятся на расстоянии d в безграничной однородной проводящей среде, удельное сопротивление которой ρ. Определить сопротивление среды на участке между шарами при условии $d \gg a$.

Решение. Вычислить сопротивление среды методом, который был применен в предыдущей задаче, здесь затруднительно вследствие асимметрии линий тока относительно центра каждого из двух шаров. Поэтому решим задачу с помощью закона Ома в дифференциальной форме (13.6). При этом учтем, что электрическое поле в однородной среде при наличии постоянного тока совпадает с *электростатическим* полем, которое существует между электродами при том же напряжении в непроводящей среде. Предположив, что между данными шарами, помещенными в такую среду, имеется некоторая разность потенциалов U, воспользуемся результатом, полученным в электростатической задаче № 11-7.

Окружим один из шаров замкнутой поверхностью S, вплотную прилегающей к нему (рис. 13-2). Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 11-7 относительно неравенства $r \gg r_0$, придем к выводу, что во всех точках поверхности S напряженность E электрического поля выражается формулой (10.7а):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}. \qquad (1)$$

При этом разность потенциалов между шарами равна (см. ответ к задаче № 11-7)

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{a}. \qquad (2)$$

Исключив из (1) и (2) величину $q/4\pi\varepsilon_0$, получим

$$E = U/2a. \qquad (3)$$

Такой же будет и напряженность электрического поля при наличии тока, если между шарами в условиях настоящей задачи поддерживать разность потенциалов U. При этом, как следует из закона Ома (13.6), плотность тока во всех точках поверхности S будет одинаковой. Учитывая соотношения (13.2) и (3), по формуле (13.6) найдем силу тока через поверхность S:

$$I = jS = \frac{E}{\rho}4\pi a^2 = \frac{2\pi a}{\rho}U. \qquad (4)$$

Поскольку поверхность S пересекает все линии тока (изображенные на рис. 13-2 линии, соединяющие два шара, будучи силовыми линиями электрического поля, являются и линиями тока), найденная величина I выражает силу полного тока в промежутке между шарами. Сравнив выражение (4) с законом Ома (13.3), найдем искомое сопротивление:

$$R = \rho/2\pi a.$$

Видим, что полученный результат не зависит от расстояния d между шарами (при условии $d \gg a$).

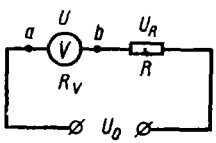

Рис. 13 3

13-5. Если вольтметр соединить последовательно с резистором сопротивлением $R = 10{,}0$ кОм, то при напряжении $U_0 = 120$ В он покажет $U_1 = 50{,}0$ В (рис. 13-3). Если соединить его последовательно с резистором неизвестного сопротивления R_x, то при том же напряжении вольтметр покажет $U_2 = 10{,}0$ В. Определить это сопротивление.

Решение. Данная цепь представляет собой последовательное соединение двух элементов: вольтметра и резистора. При последовательном соединении сила тока одинакова на всех участках цепи. Рассматриваемая цепь является однородной. Напряжения на отдельных участках такой цепи, совпадающие с разностями потенциалов на их

концах и дающие в сумме напряжение на всей цепи, распределяются всегда пропорционально сопротивлениям участков, что следует из закона Ома (13.3). Заметим, что вольтметр измеряет разность потенциалов между теми точками, к которым он подключен (точки a и b на рис. 13-3). Другими словами, вольтметр измеряет напряжение на концах того участка цепи, которым он сам является. Поэтому для двух элементов цепи — вольтметра и резистора — можно составить пропорцию:

$$U_1/R_V = (U_0 - U_1)/R, \qquad (1)$$

где U_1, R_V — напряжение на вольтметре и его сопротивление; $U_0 - U_1 = U_R$ — напряжение на резисторе сопротивлением R. Для случая, когда включен резистор с неизвестным сопротивлением, можем также записать:

$$U_2/R_V = (U_0 - U_2)/R_x. \qquad (2)$$

Исключив из уравнений (1) и (2) величину R_V, получим

$$R_x = \frac{(U_0 - U_2)\,U_1}{(U_0 - U_1)\,U_2} R = 79 \text{ кОм}.$$

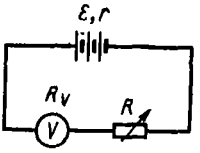

Рис. 13-4

13-6. К батарее гальванических элементов через резистор с переменным сопротивлением R подключен вольтметр (рис. 13-4). Если R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если R уменьшить до нуля?

Решение. В этой задаче в отличие от предыдущей нет оснований считать постоянным напряжение U на участке цепи, состоящем из вольтметра и резистора с переменным сопротивлением. Наоборот, поскольку этот участок подключен к зажимам батареи, обладающей некоторым внутренним сопротивлением r, напряжение U должно изменяться при изменении сопротивления R. Этот вывод следует из закона Ома для замкнутой цепи (13.8), который применительно к данной задаче запишем так:

$$I = \mathscr{E}/(R_V + r + R), \qquad (1)$$

где $\mathscr{E}$ — электродвижущая сила (э. д. с.) батареи. Так как напряжение на участке вольтметр — резистор равно по закону Ома для участка однородной цепи произведению силы тока I на сумму $R + R_V$, то из формулы (1) найдем

$$U = I(R + R_V) = \mathscr{E} - Ir. \qquad (2)$$

Из формул (1), (2) видно, что при изменении R напряжение U действительно изменяется. Постоянной же величиной остается э. д. с. батареи $\mathscr{E}$, равная сумме напряжений на всех участках замкнутой цепи. Отсюда ясно, что для решения задачи необходимо применить закон Ома для замкнутой цепи (1). При этом учтем, что показания вольтметра, обладающего постоянным сопротивлением, пропорциональны

силе тока, проходящего по нему, а значит, и по всей цепи. Поэтому в случае, когда R уменьшилось в три раза, закон Ома для замкнутой цепи запишется в виде

$$2I = \mathscr{E} / (R_V + r + R/3); \qquad (3)$$

наконец, для случая $R = 0$ получим

$$nI = \mathscr{E} / (R_V + r), \qquad (4)$$

где n — искомая величина. Хотя уравнения (1), (3), (4) содержат шесть неизвестных, этих уравнений достаточно для определения n, так как остальные неизвестные величины входят во все уравнения одинаковыми группами, что позволяет снизить число неизвестных с шести до трех. В результате несложных преобразований систему уравнений (1), (3), (4) можно записать так:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{I(R_V + r)}{\mathscr{E}} + \dfrac{IR}{\mathscr{E}}; \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{I(R_V + r)}{\mathscr{E}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{IR}{\mathscr{E}}; \\ \dfrac{1}{n} = \dfrac{I(R_V + r)}{\mathscr{E}}. \end{cases}$$

Введя обозначения $A = I(R_V + r)/\mathscr{E}$, $B = IR/\mathscr{E}$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными n, A, B:

$$\begin{cases} A + B = 1; \\ A + \dfrac{1}{3}B = \dfrac{1}{2}; \\ nA = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно n, найдем

$$n = 4.$$

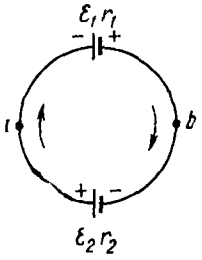

Рис. 13 5

13-7. Два гальванических элемента, имеющих э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathscr{E} = 1{,}6$ В и внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}60$ Ом, $r_2 = 0{,}40$ Ом, соединены разноименными полюсами (рис. 13-5). Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить разность потенциалов на зажимах элементов (между точками a и b).

Решение. Точки a и b являются концами двух участков цепи: $a\mathscr{E}_1 b$ и $a\mathscr{E}_2 b$. Оба эти участка содержат э. д. с. и, следовательно, являются участками неоднородной цепи. Поэтому применим закон Ома (13.7). Так как обе э. д. с. имеют положительные знаки при обходе

цепи по часовой стрелке (см. правило знаков, изложенное в методических указаниях), ток по цепи будет течь в том же направлении. Тогда для участка $a\mathscr{E}_1 b$ получим

$$I = [(\varphi_a - \varphi_b) + \mathscr{E}_1]/r_1. \qquad (1)$$

Далее есть два пути решения задачи. Во-первых, можно применить закон Ома (13.7) для участка $a\mathscr{E}_2 b$:.

$$-I = [(\varphi_a - \varphi_b) - \mathscr{E}_2]/r_2. \qquad (2)$$

Во-вторых, можно воспользоваться законом Ома (13.8) для замкутой цепи:

$$I = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)/(r_1 + r_2). \qquad (3)$$

Взяв любые два уравнения из (1), (2), (3) и исключив из них силу тока I, найдем

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathscr{E}_2 r_1 - \mathscr{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}4 \quad \text{В}.$$

Замечание. Если бы источники имели одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления, т. е. $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$, $r_1 = r_2 = r$, то, как легко видеть из последней формулы, искомая разность потенциалов оказалась бы равной нулю. Этот же результат можно получить сразу из соображений симметрии. Действительно, точки a и b расположены в цепи симметрично по отношению к одинаковым источникам напряжения, поэтому их потенциалы одинаковы. (По той же причине одинаковы потенциалы точек *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* в цепи, изображенной на рис. 13-6, где все источники имеют одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления.) Следовательно, если к точкам a и b (или к любым двум из шести точек на рис. 13-6) подключить вольтметр, то он не будет давать никаких показаний. В то же время по проводникам, соединяющим точки a и b, будет идти ток, равный согласно формуле (3) $I = \mathscr{E}/r$. Этот пример наглядно показывает, что закон Ома в форме (13.3) неприменим для участков цепи, содержащих э. д. с., а вольтметр, подключенный к концам таких участков, не измеряет напряжения на них. Напомним, что согласно формуле (13.7) и определению напряжения последнее равно произведению силы тока на сопротивление участка.

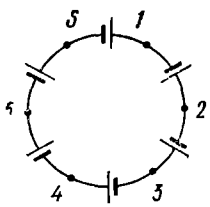

Рис. 13 6

Б. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА

Методические указания

1. Часто требуется рассчитать сопротивление разветвленной цепи, когда заданы сопротивления всех ее участков. Если при этом данная цепь является параллельным соединением нескольких проводников, то ее сопротивление находят по формуле (13,12). В том случае, когда

соединение проводников смешанное (ср. со смешанным соединением конденсаторов, стр. 128), его надо разложить на участки последовательного и параллельного соединений и, поочередно применяя формулы (13.11) и (13.12), найти сопротивление всей цепи. Напомним, что для последовательного соединения участков цепи характерно отсутствие узлов (разветвлений) на соединяющем их проводнике (рис. 13-7, *а*), а при параллельном соединении концы обоих участков подключены к одним и тем же двум точкам цепи (рис. 13-7, *б*).

Если заданное сложное соединение проводников нельзя разложить на участки последовательного и параллельного соединений, необходимо попробовать заменить его другим соединением, эквивалентным данному в отношении сопротивления, так, чтобы это соединение можно было разложить на участки последовательного и параллельного соединений. Здесь, так же как и в случае конденсаторов, такие эквивалентные замены основаны на возможности соединять и разъединять точки цепи, имеющие равные потенциалы.

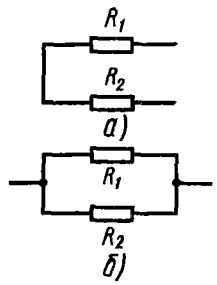

Рис 13-7

Найти такие точки можно из соображений симметрии (см. задачу № 13-8). Если схема обладает осью симметрии, причем вход и выход (зажимы) схемы лежат на этой оси, то в цепи будет симметричное распределение токов и любые две точки, симметричные относительно этой оси, будут иметь равные потенциалы.

Сопротивление любой, сколь угодно сложной цепи можно рассчитать, используя правила Кирхгофа (13 9) и (13.10) (см. задачу № 13-11).

2. Для безошибочного употребления правил Кирхгофа необходимо выполнять следующие указания:

а) выбрать (произвольно) направления токов во всех участках разветвленной цепи, отметив их на чертеже стрелками;

б) при составлении уравнения (13.9) соблюдать правило знаков: токи, притекающие в узел, считать положительными, вытекающие из узла — отрицательными;

в) иметь в виду, что число независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, всегда на единицу меньше числа узлов, имеющихся в данной цепи,

г) выбрать направление обхода контуров цепи (по часовой стрелке или против);

д) составляя уравнение (13.10), соблюдать правило знаков: токи, совпадающие с направлением обхода, записывать со знаком « + », обратные направлению обхода — со знаком « — »; считать положительными те э. д. с., которые повышают потенциал в направлении обхода, т. е., двигаясь по контуру, сначала встречаем отрицательный полюс источника, затем положительный,

е) чтобы все уравнения, составленные на основании второго правила Кирхгофа, были независимыми, необходимо каждый раз рассматривать контуры, содержащие хотя бы одну новую ветвь цепи, не входящую в уже использованные контуры;

ж) для упрощения выкладок, связанных с решением полученной системы уравнений, предварительно подставить числовые значения всех известных величин;

з) если в полученном ответе какой-либо ток будет иметь знак « — », то это укажет на ошибочность первоначального выбора направления данного тока, т. е. ток в действительности течет в обратном направлении. Если же в задаче определяется сопротивление какой-либо ветви цепи и в результате решения системы уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, получится отрицательное значение сопротивления, это также свидетельствует о неправильном выборе направления тока на данном проводнике. Однако в этом случае неверным окажется и числовое значение сопротивления. Тогда необходимо, изменив на чертеже направление тока в проводнике, составить новую систему уравнений и, решив ее, определить искомое сопротивление.

Решение задач

13-8. Вычислить сопротивление цепей, схемы которых изображены на рис. 13-8. Считать сопротивление каждого проводника, заключенного между двумя узлами, равным 1,00 Ом.

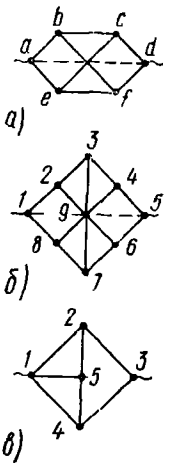

Рис. 13 8

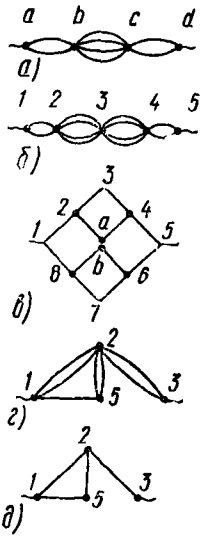

Рис. 13 9

Решение. Рассматривая приведенные схемы, можно убедиться в том, что ни одна из цепей не содержит ни одной пары проводников, соединенных между собой последовательно или параллельно. Однако все три схемы являются симметричными, причем точки их входа и выхода (зажимы цепи) лежат на осях симметрии. В этом ключ к расчету цепей.

Обратимся к схеме рис. 13-8, *а*. Здесь точка *b* симметрична точке *e* относительно оси *ad*, на которой лежит вход и выход цепи. Следовательно, при наличии тока в цепи потенциалы точек *b*, *e* будут одинаковыми. Если теперь соединить эти точки проводом, ток по нему не пойдет. Существовавшее до этого распределение токов в участках цепи не изменится и сопротивление цепи останется прежним. Другими словами, точки *b*, *e* можно объединить в один узел *b*, не изменив сопротивления цепи. По той же причине можно соединить в один узел *c* точки *c* и *f*. Тогда получим новую схему цепи (рис. 13-9, *а*), эквивалентную данной. Применяя формулы (13.11) и (13.12), найдем сопротивление цепи:

$$R = R_{ab} + R_{bc} + R_{cd} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \text{ Ом} = 1{,}25 \text{ Ом}.$$

На схеме рис. 13-8, *б* симметричные (относительно оси *1-5*) точки также обладают одинаковыми потенциалами. Следовательно,

$$\varphi_2 = \varphi_8,\ \varphi_4 = \varphi_6,\ \varphi_3 = \varphi_9 = \varphi_7.$$

Последнее тройное равенство должно выполняться, поскольку каждая из трех точек *3*, *9*, *7* делит путь тока, проходящего через нее от одного зажима цепи (точка *1*) до другого (точка *5*), на две одинаковые части. Поэтому потенциал каждой из точек *3*, *9*, *7* равен $(\varphi_1 - \varphi_5)/2$. Следовательно, в проводах *3-9* и *9-7* тока нет и их можно удалить, не изменив сопротивления цепи. Далее возможны два пути решения задачи. Соединив точки с одинаковыми потенциалами, получим схему цепи рис. 13-9, *б*, эквивалентную данной, и по формулам (13.11) и (13.12) найдем искомое сопротивление:

$$R = R_{1,2} + R_{2,3} + R_{3,4} + R_{4,5} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \text{ Ом} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Можно не соединять точки равного потенциала, а, наоборот, разъединить их в центре схемы. Тогда получим схему цепи рис. 13-9, *в*. Здесь точки *a*, *b* имеют тот же потенциал, что и до разъединения, поскольку они (как и точка *9* на схеме рис. 13-8, *б*) делят путь тока, проходящего через них от одного зажима цепи к другому, на две одинаковые части. Поэтому потенциал каждой из точек по-прежнему равен $(\varphi_1 - \varphi_5)/2$. Следовательно, распределение тока в цепи не изменится и схема рис. 13-9, *в* эквивалентна исходной. Теперь, поочередно применяя формулы (13.11) и (13.12), найдем сопротивление цепи:

$$R = [1 + (1 + 1)/2 + 1]/2 \text{ Ом} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

При рассмотрении схемы рис. 13-8, *в* может показаться, что потенциалы точек *2*, *4*, *5* одинаковы по той же причине, по которой на схеме рис. 13-8, *б* равны потенциалы точек *3*, *9*, *7*. Однако данная схема отличается от предыдущей тем, что линия *2-5-4* не делит схему на две одинаковые части, поэтому в действительности ни одна из точек *2*, *4*, *5* не имеет потенциала, равного $(\varphi_1 - \varphi_3)/2$. Теперь можно лишь утверждать, что точки *2* и *4*, будучи симметричными относительно прямой *1-3*, на которой расположены вход и выход цепи, имеют одинаковые

потенциалы. Соединив их (перегнув чертеж по линии *1-3*) в один узел *2*, получим эквивалентную схему рис. 13-9, *г*, которую можно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Ее можно упростить, заменив каждые два одинаковых параллельно соединенных проводника на участках *1-2*, *5-2* и *2-3* одним проводником вдвое меньшего сопротивления. Тогда получим схему рис. 13-9, *д*, после чего легко найдем ответ с помощью формул (13.11) и (13.12):

$$R = 1{,}375 \text{ Ом}.$$

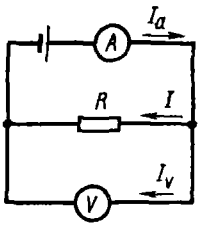

Рис. 13-10

13-9. Сопротивление R резистора измеряется вольтметром и амперметром по схеме, изображенной на рис. 13-10. Показания амперметра $I_a = 2{,}40$ А; вольтметра $U = 7{,}20$ В. Определить относительную ошибку, получаемую при вычислении сопротивления без учета тока, идущего через вольтметр, если его сопротивление $R_V = 1{,}00$ кОм.

Решение. Истинное значение сопротивления по закону Ома (13.3) равно

$$R = U/I, \tag{1}$$

где U — напряжение на концах резистора, измеренное вольтметром, I — сила тока, проходящего через резистор. Амперметр в данной цепи показывает силу тока в неразветвленной ее части, равную сумме токов в параллельных ветвях, состоящих из резистора R и вольтметра:

$$I_a = I + I_V.$$

Если пренебречь током I_V, проходящим через вольтметр, и считать $I \approx I_a$, то получим для вычисляемого сопротивления приближенное значение

$$R' \approx U/I_a. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), видим, что $R' < R$. Поэтому искомая относительная ошибка равна

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R'}{R}. \tag{3}$$

Чтобы найти величину R, заметим, что величина R', определяемая формулой (2), есть сопротивление участка цепи, являющегося параллельным соединением резистора и вольтметра. Поэтому согласно формуле (13.12) запишем

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}.$$

Выразив отсюда величину R и подставив ее в формулу (3), после ряда упрощений получим с учетом соотношения (2):

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{R'}{R_V} \text{ или } \frac{\Delta R}{R}=\frac{U}{I_a R_V}=3{,}0\cdot 10^{-3}, \text{ или } 0{,}30\%.$$

Отсюда видно, что, применяя указанный метод измерения сопротивлений, можно получить достаточно точный результат лишь при условии, если сопротивление вольтметра будет достаточно велико по сравнению с измеряемым сопротивлением.

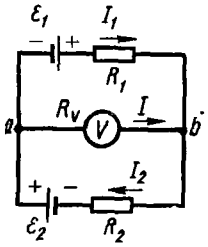

Рис. 13-11

13-10. Элементы цепи, схема которой изображена на рис. 13-11, имеют следующие значения: $\mathscr{E}_1 = 1{,}50$ В, $\mathscr{E}_2 = 1{,}60$ В, $R_1 = 1{,}00$ кОм, $R_2 = 2{,}00$ кОм. Определить показания вольтметра, если его сопротивление $R_V = 2{,}00$ кОм. Сопротивлением источников напряжения и соединительных проводов пренебречь.

Решение. Здесь требуется найти разность потенциалов между точками a и b, которую измеряет вольтметр, подключенный к этим точкам. Если бы вольтметр обладал бесконечно большим сопротивлением и тока через него не было*, то эта задача ничем не отличалась бы от задачи № 13-7, которая решена с помощью закона Ома для участка неоднородной цепи. Однако в данном случае сопротивление R_V одного порядка с R_1 и R_2, поэтому пренебречь током I в цепи вольтметра нельзя. Таким образом, здесь имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут, вообще говоря, разные токи: I_1, I_2, I (рис. 13-11). Задачу можно решить двумя способами, используя правила Кирхгофа для разветвленных цепей или применив первое правило Кирхгофа и закон Ома для участка неоднородной цепи Рассмотрим оба способа.

1. Искомая разность потенциалов по закону Ома (13.3) равна

$$\varphi_a - \varphi_b = IR_V. \qquad (1)$$

Чтобы определить силу тока I в цепи вольтметра, применим правила Кирхгофа (13.9), (13.10). Обозначив на рис. 13-11 направления всех токов (для тока I делаем это лишь предположительно), согласно первому правилу Кирхгофа запишем для узла a:

$$I_2 - I_1 - I = 0. \qquad (2)$$

Для составления остальных двух независимых уравнений воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. Предварительно выбрав направление обхода замкнутых контуров, например по часовой стрелке, и учи-

* Это имеет место для вольтметров электростатической системы.

тывая правило знаков (см. стр. 155), получим соответственно для контуров aR_1ba и abR_2a*:

$$I_1R_1 - IR_V = \mathscr{E}_1, \tag{3}$$

$$I_2R_2 + IR_V = \mathscr{E}_2. \tag{4}$$

Решив систему трех уравнений (2), (3), (4) с тремя неизвестными I_1, I_2, I относительно тока I, найдем

$$I = \frac{\mathscr{E}_2 R_1 - \mathscr{E}_1 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V}. \tag{5}$$

Подставив это значение I в (1) и произведя вычисления, получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{(\mathscr{E}_2 R_1 - \mathscr{E}_1 R_2) R_V}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V} = -0{,}35 \text{ В}. \tag{6}$$

Знак « — » в ответе означает, что $\varphi_b > \varphi_a$ и в действительности ток в цепи вольтметра имеет направление, противоположное тому, что мы предположили, т. е. от точки b к точке a.

2. Применим закон Ома (13.7) для участка неоднородной цепи поочередно к трем участкам: aR_1b, aR_2b, aR_Vb. Тогда, учитывая правило знаков (см. стр. 147), запишем соответственно три уравнения:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \mathscr{E}_1}{R_1};$$

$$-I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathscr{E}}{R_2};$$

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_V}.$$

Подставим эти значения сил токов в уравнение (2):

$$\frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathscr{E}_2}{R_2} + \frac{\varphi_a - \varphi_b + \mathscr{E}_1}{R_1} + \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_V} = 0.$$

Решив это уравнение относительно величины $\varphi_a - \varphi_b$, найдем ответ, совпадающий с формулой (6).

З а м е ч а н и е. При $R_V \to \infty$ можно пренебречь произведением R_1R_2 в знаменателе формулы (6). Тогда, сокращая величину R_V, получим выражение, совпадающее, как и следовало ожидать, с ответом задачи № 13-7.

---

* Вместо этого контура можно было бы взять контур aR_1bR_2a.

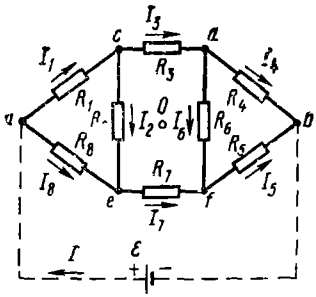

Рис 13-12

13-11. Определить сопротивление цепи ab, схема которой изображена на рис 13-12, если $R_1 = R_5 = 1{,}00$ Ом, $R_2 = R_6 = 2{,}00$ Ом, $R_3 = R_7 = 3{,}00$ Ом, $R_4 = R_8 = 4{,}00$ Ом.

Решение. В данной цепи, состоящей из восьми сопротивлений, нет хотя бы двух элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Кроме того, здесь в отличие от схем, рассмотренных в задаче № 13-8, отсутствует осевая симметрия.

Применим к расчету сопротивления цепи правила Кирхгофа. Для этого предположим, что к зажимам цепи ab подключен источник тока. Тогда в цепи будет ток. Сила тока I в неразветвленной части цепи зависит от э. д. с. $\mathscr{E}$ источника, а также является некоторой функцией от величин R_1, R_2, ..., R_8 (считаем сопротивление источника равным нулю.). Так как при этом, согласно закону Ома (13.8), сила тока I пропорциональна величине $\mathscr{E}$, можно записать

$$I = f\,(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_8)\ \mathscr{E}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из того же закона Ома следует

$$I = \mathscr{E}/R, \qquad (2)$$

где R — искомое сопротивление. Сравнив формулы (1) и (2), получим

$$R = \frac{1}{f\,(R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_8)}.$$

Следовательно, выразив силу тока I согласно формуле (1) как функцию всех данных величин сопротивлений и произвольной величины $\mathscr{E}$ с помощью правил Кирхгофа (13.9), (13.10), найдем сопротивление R цепи.

Обозначим токи на всех участках цепи и укажем (произвольно) их направления (рис. 13-12). В данном случае имеется девять неизвестных сил токов I_1, I_2, ..., I_8, I. Чтобы избежать громоздких вычислений, связанных с решением системы из девяти уравнений, которую мы получим, применив правила Кирхгофа, воспользуемся следующим обстоятельством. Из условия задачи видно, что данная цепь обладает симметрией с центром в точке O (рис. 13-12). Действительно, если, отсоединив цепь в точках a, b от источника, повернуть ее в плоскости чертежа вокруг точки O на 180° и снова соединить с источником, то в силу данных в условии равенств она совместится со своим первоначальным положением. Но теперь в резисторе R_5 течет ток, который

раньше был в резисторе R_1. Перемена же знаков напряжения на зажимах цепи не может вызвать изменения силы тока ни на одном участке цепи. Значит, и раньше в резисторах R_5 и R_1 были токи одинаковой силы, т. е. $I_1 = I_5$. Аналогично можно показать, что в данной цепи должны выполняться равенства: $I_2 = I_6$, $I_3 = I_7$, $I_4 = I_8$. Таким образом, в задаче фактически имеется лишь пять *различных* неизвестных токов: I_1, I_2, I_3, I_4, I.

По первому правилу Кирхгофа с учетом, что $I_4 = I_8$, $I_2 = I_6$, получим соответственно для узлов a, c и d:

$$I = I_1 + I_4; \tag{3}$$

$$I_1 = I_2 + I_3; \tag{4}$$

$$I_3 = I_2 + I_4. \tag{5}$$

Легко убедиться проверкой, что аналогичные уравнения, составленные для остальных трех узлов схемы, будут повторением уже имеющихся уравнений. Недостающие два уравнения получим на основании второго правила Кирхгофа. Выбрав направление обхода контуров по часовой стрелке, запишем, например, для контуров $acdb\mathscr{E}a$ и $acea$ соответственно:

$$I_1R_1 + I_3R_3 + I_4R_4 = \mathscr{E}, \tag{6}$$

$$I_1R_1 + I_2R_2 - I_4R_8 = 0. \tag{7}$$

Подставив в (3) — (7) числовые значения сопротивлений из условия задачи и решив систему пяти уравнений с пятью неизвестными силами токов относительно тока I, получим

$$I = (2/7)\,E. \tag{8}$$

Сравнив выражения (8) и (2), найдем искомое сопротивление:

$$R = (7/2)\ \text{Ом} = 3{,}5\ \text{Ом}.$$

В РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА

Методические указания

Решая задачи данного раздела, следует иметь в виду, что формулы (13.13) и (13.14), выражающие работу сил электрического поля на каком-либо участке цепи и количество теплоты, выделенное при прохождении тока по этому участку, остаются справедливыми в любом случае независимо от наличия или отсутствия э. д. с. на данном участке. Если при этом рассматриваемый участок не содержит э. д. с. и, следовательно, к нему применим закон Ома (13.3), то формулы (13.13) и (13.14) совпадают. Значит, в этом случае вся работа электрических сил идет на выделение тепла в проводнике. Если же данный участок содержит э. д. с., то соотношение (13.3) к нему неприменимо. Следовательно, величины A и Q, определяемые по формулам (13.13), (13.14), в этом случае неодинаковы. При этом знак неравенства зависит от направления тока и э. д. с. (см. задачу № 13-12).

Решение задач

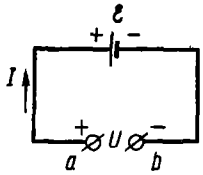

Рис. 13 13

13-12. Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое ежесекундно, в следующих случаях: 1) в резисторе, по которому идет ток силой $I = 1{,}0$ А; разность потенциалов между концами резистора $\varphi_a - \varphi_b = 2{,}0$ В; 2) в аккумуляторе, который заряжается током силой $I = 1{,}0$ А; разность потенциалов на его зажимах $\varphi_a - \varphi_b = 2{,}0$ В, э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E} = 1{,}3$ В; 3) в батарее аккумуляторов, которая дает ток силой $I = 1{,}0$ А на внешнюю нагрузку; разность потенциалов на зажимах батареи $\varphi_a - \varphi_b = 2{,}0$ В, ее э. д. с. $\mathscr{E} = 2{,}6$ В.

Решение. 1. Так как рассматриваемый участок не содержит э. д. с., то по закону Ома для участка однородной цепи имеем

$$\varphi_a - \varphi_b = IR.$$

Из этого следует, что формулы (13.13) и (13.14) в данном случае совпадают. Значит, вся работа электрических сил идет на нагревание резистора:

$$A = Q = (\varphi_a - \varphi_b)\ It = 2 \text{ Дж}.$$

2. При зарядке аккумулятора его зажимы присоединяют к источнику, разность потенциалов на полюсах которого постоянна. При этом ток внутри аккумулятора идет от его положительного полюса к отрицательному (рис. 13-13), т. е. в направлении, обратном току разряда.

Работу электрических сил снова вычислим по формуле (13.13):

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)\ It = 2 \text{ Дж}.$$

Чтобы по формуле (13.14) определить количество выделенной теплоты, найдем сопротивление R участка цепи $a\mathscr{E}b$. Поскольку он содержит э. д. с., применим закон Ома (13.7) для участка неоднородной цепи. Учитывая направления тока и э. д. с., запишем в соответствии с правилом знаков (см. стр. 147)

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathscr{E}}{R}. \qquad (1)$$

Подставив значение R из (1) в (13.14), получим

$$Q = I^2Rt = (\varphi_a - \varphi_b - \mathscr{E})\ It = 0{,}7 \text{ Дж}.$$

В данном случае лишь часть работы электрических сил идет на нагревание аккумулятора, остальная же часть $A - Q = 1{,}3$ Дж превращается в химическую энергию заряжаемого аккумулятора.

3. Работу электрических сил также найдем по формуле (13.13). При этом обратим внимание на отличие данного случая от предыдущего. Если положительный знак разности потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$ сохранился,

то направление тока на участке $a\mathscr{E}b$ изменилось на противоположное (рис. 13-14). Следовательно,

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)(-I)t = -(\varphi_a - \varphi_b)It = -2 \text{ Дж}. \quad (2)$$

Отрицательный знак ответа выражает то обстоятельство, что положительные заряды движутся внутри каждого аккумулятора от его низшего потенциала к высшему, т. е. против электрических сил. При этом положительную работу совершают сторонние силы, перемещая заряды внутри аккумуляторов.

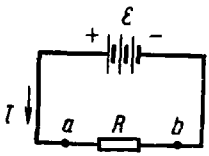

Рис 13 14

Количество теплоты, выделенное в батарее, снова определим по формуле (13.14). При этом сопротивление r батареи, как и в предыдущем случае, можно вычислить по закону Ома (13.7) для участка неоднородной цепи $a\mathscr{E}b$. Теперь, учитывая направление тока и знак э. д. с., запишем

$$-I = (\varphi_a - \varphi_b - \mathscr{E})/r. \quad (3)$$

Сопротивление батареи можно найти также как разность между сопротивлением всей цепи и сопротивлением внешнего участка цепи. Тогда из формул (13.3) и (13.8) имеем

$$r = R_{\text{полн}} - R = \frac{\mathscr{E}}{I} - \frac{\varphi_a - \varphi_b}{I} = \frac{\mathscr{E} - (\varphi_a - \varphi_b)}{I},$$

что совпадает с формулой (3). Подставив найденное значение r в формулу (13.14), получим

$$Q = I^2rt = [\mathscr{E} - (\varphi_a - \varphi_b)]\, It = 0{,}6 \text{ Дж}. \quad (4)$$

Этот вариант задачи можно решить еще по-другому. По данным условия найдем работу электрических сил на внешнем участке цепи aRb:

$$A_{\text{внеш}} = (\varphi_a - \varphi_b)\, It = 2 \text{ Дж}.$$

Однако работа электрических, т. е. кулоновских (но не сторонних!), сил по перемещению зарядов на замкнутом пути всегда равна нулю. Значит,

$$A_{\text{внутр}} + A_{\text{внеш}} = 0,$$

откуда

$$A_{\text{внутр}} = -A_{\text{внеш}} = -2 \text{ Дж},$$

что совпадает с результатом (2).

Вся энергия, расходуемая батареей, превращается (посредством работы электрических сил) в тепло $Q_{\text{общ}}$, выделяющееся во всей цепи. Эту энергию вычислим по формуле (13 15):

$$A_б = Q_{\text{общ}} = \mathscr{E}It = 2{,}6 \text{ Дж}.$$

Так как на внешнем участке выделяется количество теплоты

$$Q_{\text{внеш}} = A_{\text{внеш}} = 2 \text{ Дж},$$

то для батареи

$$Q = Q_{общ} - Q_{внеш} = 0{,}6 \text{ Дж},$$

что совпадает с результатом (4).

13-13. Э. д. с. батареи $\mathscr{E} = 12{,}0$ В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{макс} = 5{,}0$ А. Какая наибольшая мощность $P_{макс}$ может выделиться на подключенном к батарее резисторе с переменным сопротивлением?

Решение. Мощность P тока измеряется работой, совершенной электрическими силами в единицу времени. Поскольку вся работа на внешнем участке цепи идет на нагревание резистора ($A = Q$), то в данном случае мощность измеряется количеством теплоты, выделяемым в резисторе в единицу времени. Поэтому на основании формулы (13.14), а также закона Ома (13.8) для замкнутой цепи получим

$$P = I^2R = \mathscr{E}^2R/(R + r)^2, \tag{1}$$

где R, r — сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи соответственно. Отсюда видно, что при постоянных величинах $\mathscr{E}$, r мощность P является функцией одной переменной — внешнего сопротивления R. Известно, что эта функция имеет максимум при условии $R = r$*. Следовательно,

$$P_{мак} = \frac{\mathscr{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}. \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к отысканию сопротивления r внутреннего участка цепи (батареи). Если учесть, что согласно закону Ома (13.8) для замкнутой цепи наибольшая сила тока $I_{макс}$ будет при внешнем сопротивлении $R = 0$ (ток короткого замыкания), то

$$I_{макс} = \mathscr{E}/r. \tag{3}$$

Подставив найденное из (3) значение внутреннего сопротивления r в формулу (2), получим

$$P_{макс} = \mathscr{E}I_{макс}/4 = 15 \text{ Вт}.$$

13-14. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена одна секция, вода закипает через $t_1 = 10$ мин, если другая, то через $t_2 = 20$ мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить: а) последовательно? б) параллельно? Напряжение на зажимах кипятильника и к. п. д. установки считать во всех случаях одинаковыми.

Решение. При различных включениях секций кипятильника сопротивление цепи различно. Очевидно, искомое время нагревания воды есть некоторая функция сопротивления цепи. Чтобы найти эту функцию, воспользуемся законом Джоуля — Ленца (13.14) для теп-

* В этом можно убедиться, применив общий метод исследования функций на экстремум с помощью производной.

лового действия тока. Поскольку речь идет об участке цепи, не содержащем э. д. с., к которому применим закон Ома (13.3), запишем формулу (13.14) так:

$$Q = I^2Rt = U^2t/R. \qquad (1)$$

Отсюда легко определить вид функции $t = f(R)$.

Во всех случаях для нагревания воды требуется одно и то же количество теплоты, определяемое формулой

$$Q' = cm\Delta t,$$

где c, m — удельная теплоемкость и масса воды, Δt — разность температур. В силу постоянства к. п. д. установки η одним и тем же будет также полное количество теплоты, выделенное током, т. е.

$$Q = \frac{Q'}{\eta}.$$

Учитывая также постоянство напряжения на зажимах цепи, из формулы (1) получим

$$R = \frac{U^2}{Q}t = kt, \qquad (2)$$

где $k = U^2/Q$ — постоянная величина. Таким образом, зависимость времени от сопротивления является пропорциональной. Теперь легко найти ответы в обоих случаях.

При последовательном соединении секций общее сопротивление

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2.$$

Подставив сюда значения R по формуле (2), получим

$$k\,t_{\text{посл}} = kt_1 + kt_2,$$

откуда

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 30 \text{ мин}.$$

При параллельном соединении секций на основании формулы (13.12) имеем

$$R_{\text{пар}} = R_1R_2/(R_1 + R_2).$$

Отсюда, применив соотношение (2), найдем

$$t_{\text{пар}} = t_1t_2/(t_1 + t_2) = 7 \text{ мин}.$$

13-15. Две медные проволоки одинаковой длины $l = 1{,}00$ м и диаметрами $d_1 = 0{,}10$ мм и $d_2 = 0{,}20$ мм, подключенные (поочередно) к зажимам гальванического элемента, нагреваются до одинаковой температуры. Определить его внутреннее сопротивление. Считать отдачу теплоты проволокой в окружающее пространство при постоянной температуре пропорциональной площади ее поверхности.

Решение. При установившемся тепловом режиме, когда температура проволоки перестанет повышаться, количество теплоты, выделенное током в 1 с, согласно закону сохранения энергии, должно

быть равно количеству теплоты, рассеянному за то же время проволокой в окружающее пространство, т. е. должно выполняться равенство

$$P_{\text{тока}} = P_{\text{расс}}. \qquad (1)$$

Мощность тока $P_{\text{тока}} = I^2R$ выразим через внутреннее сопротивление источника и диаметр проволоки, воспользовавшись законом Ома (13.8) для замкнутой цепи и формулой (13.4) сопротивления проводника:

$$P_{\text{тока}} = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2 \rho l}{S} : \left(\frac{\rho l}{S} + r\right)^2 = \frac{4\rho l \pi d^2 \mathscr{E}^2}{(4\rho l + \pi d^2 r)^2}. \qquad (2)$$

С другой стороны, согласно условию задачи, имеем

$$P_{\text{расс}} = kS' = k\pi dl, \qquad (3)$$

где S' — площадь поверхности проволоки, вычисленная как площадь боковой поверхности цилиндра, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры проволоки. Подставив в уравнение (1) значения $P_{\text{тока}}$ и $P_{\text{расс}}$ по формулам (2), (3) и произведя сокращения, получим

$$\frac{d}{(4\rho l + \pi d^2 r)^2} = \frac{k}{4\rho \mathscr{E}^2}. \qquad (4)$$

Поскольку при постоянной температуре все величины, стоящие в правой части формулы (4), постоянны, должно выполняться равенство

$$\frac{d_1}{(4\rho l + \pi d_1 r)^2} = \frac{d_2}{(4\rho l + \pi d_2^2 r)^2}, \qquad (5)$$

так как диаметрам проволоки d_1, d_2 соответствует по условию одинаковая температура. Чтобы решить уравнение (5) относительно неизвестного r, извлечем из обеих частей уравнения квадратный корень:

$$\frac{4\rho l + \pi d_2 r}{4\rho l + \pi d_1 r} = \pm\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}.$$

Так как все слагаемые, стоящие в левой части этого уравнения, — заведомо положительные величины, отрицательный знак перед корнем отбрасываем. Решив уравнение относительно r, найдем

$$r = \frac{4\rho l}{\pi (d_2^2 - d_1^2)}\left(\sqrt{\frac{d_2}{d_1}} - 1\right) \qquad (6)$$

Взяв из таблиц значение удельного сопротивления меди, выразим входящие в формулу величины в единицах СИ: $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, $l = 1{,}00$ м, $d_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ м, $d_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ м. Выполнив вычисление, получим

$$r = 0{,}3 \text{ Ом}.$$