

§ 14. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

Основные формулы

Плотность тока в металле

$$j = en \langle v \rangle, \quad (14.1)$$

где e — заряд электрона, n — концентрация свободных электронов (т. е. число их в единице объема), $\langle v \rangle$ — средняя скорость направленного движения электронов

Удельная электропроводность собственных полупроводников

$$\sigma = en(u_n + u_p) \quad (14.2)$$

где u_n и u_p — подвижности электронов и дырок, e и n — то же, что и в (14.1)

Подвижность носителя заряда измеряется средней скоростью, которую он приобретает в электрическом поле с напряженностью равной единице

Зависимость удельной электропроводности собственных полупроводников от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta W / 2kT}, \quad (14.3)$$

где ΔW — ширина запрещенной зоны*, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, σ_0 — постоянная величина, определяемая природой данного полупроводника.

Плотность тока в газе при отсутствии насыщения

$$i = qn(u_+ + u_-)E. \quad (14.4)$$

где q — абсолютное значение заряда каждого иона, n — концентрация ионов (т. е. число ионов одного знака в единице объема), u_+ , u_- — подвижности положительных и отрицательных ионов E — напряженность электрического поля в газе

Плотность тока насыщения в газе между плоскими электродами, расстояние между которыми l , равна

$$I_n = q\Delta n l. \quad (14.5)$$

где Δn — число пар ионов, ежесекундно образуемых ионизатором в единице объема газа.

Число пар ионов, ежесекундно рекомбинирующихся в единице объема газа пропорционально квадрату концентрации ионов:

$$\Delta n' = rn^2, \quad (14.6)$$

где r — коэффициент рекомбинации

Удельная электропроводность электролита

$$\sigma = \alpha n_0(u_+ + u_-), \quad (14.7)$$

где n_0 — концентрация молекул растворенного вещества, α — коэффициент диссоциации, равный отношению числа диссоциированных молекул к их общему числу.

Методические указания

1. Здесь рассмотрены задачи, связанные с электропроводностью металлов, собственных полупроводников, электролитов и газов.

2. Сила постоянного тока на различных участках неразветвленной цепи в любой среде одинакова. Это следствие закона сохранения электрического заряда. В частности, сила тока в электролите равна силе тока в подводящих проводах, несмотря на то что в электролите ток

* Величину ΔW называют также энергией активации.

складывается из двух токов, соответствующих движению отрицательных и положительных ионов. Каждый отрицательный ион, подходя к аноду, отдает ему свой заряд в виде избыточных электронов, которые движутся затем вдоль проводов. Одновременно положительные ионы, отходя от анода, оставляют около него нескомпенсированные отрицательные ионы, которые также отдают аноду свои избыточные электроны. Аналогичные явления происходят около катода. В результате заряд, переносимый за единицу времени через поперечное сечение подводящих проводов электронами, оказывается равным суммарному заряду, переносимому через поперечное сечение электролита положительными и отрицательными ионами.

3. В задачах на ток в газах встречаются два случая: ток в отсутствие насыщения и ток насыщения. В первом случае к газу применим закон Ома [ср. формулы (14.4) и (13.6)]. Во втором случае закон Ома не применим: при увеличении напряжения на электродах сила тока в газе остается постоянной. Кроме того, при постоянной напряженности E поля в газоразрядном промежутке плотность тока будет в соответствии с формулой (14.5) изменяться при изменении длины этого промежутка, что противоречит закону Ома в дифференциальной форме (13.6).

Решение задач

14-1. Определить суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной $l = 10,0$ км при токе силой $I = 400$ А.

Решение Ток в металле представляет собой направленное движение свободных электронов. Оно характеризуется определенным импульсом (количеством движения). Чтобы найти этот импульс K , просуммируем импульсы отдельных электронов:

$$K = \sum_{i=1}^N m v_i = m \sum_{i=1}^N v_i = m N \langle v \rangle, \quad (1)$$

где m — масса электрона, N — число свободных электронов в проводнике, $\langle v \rangle$ — средняя скорость их направленного движения.

Скорость $\langle v \rangle$ выразим через данную в условии силу тока I по формуле (14.1), учитывая, что плотность тока $j = I/S$:

$$\langle v \rangle = I/e n S. \quad (2)$$

Подставив это значение $\langle v \rangle$ в формулу (1) и имея в виду, что отношение N/n равно объему V провода, получим

$$K = \frac{m N I}{e n S} = \frac{m V I}{e S} = \frac{m l I}{e}.$$

Из справочных таблиц находим значения заряда и массы электрона: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Подставив в формулу значения величин, выраженные в единицах СИ, произведем вычисление:

$$K = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,00 \cdot 10^4 \cdot 400}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с} = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}.$$

14-2. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Определить концентрацию дырок, если подвижности электронов $u_n = 0,36 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ и дырок $u_p = 0,16 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$.

Решение. Так как в собственном полупроводнике концентрация дырок равна концентрации свободных электронов, воспользуемся формулой (14.2). Учитывая, что величины ρ и σ взаимно обратны, запишем

$$(1/\rho) = en (u_n + u_p),$$

откуда для концентрации дырок получим

$$n = 1/e (u_n + u_p) \rho.$$

Подставив числовые значения величин и вычислив, найдем

$$n = 2,5 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

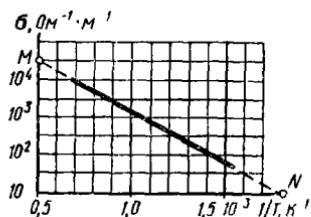


Рис. 14.1

Решение. Как видно из рисунка, величина σ отложена по оси ординат в логарифмической шкале. Следовательно, данный график выражает линейную зависимость между величинами $\ln \sigma$ и $1/T$. Воспользуемся уравнением (14.3). Прологарифмировав его, получим

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta W}{2k} \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Так как величины σ_0 , ΔW , k — постоянные, то уравнение (1), так же как и график, выражает линейную зависимость между $\ln \sigma$ и $1/T$. Следовательно, угловой коэффициент в (1) должен быть равен тангенсу угла наклона графика функции $\ln \sigma = f(1/T)$ к оси абсцисс:

$$-\frac{\Delta W}{2k} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда ширина запрещенной зоны равна

$$\Delta W = -2k \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Для вычисления $\operatorname{tg} \alpha$ продолжим график до пересечения с осями (в точках M и N). Так как $\ln 10 = 2,3$, то точке M соответствует

$$\ln \sigma = 4 \cdot (2,3) + 2,3 : 2 = 10,35,$$

По графику находим, что точке N соответствует значение $1/T$, равное $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Тогда получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\partial M}{\partial N} = -\frac{10,35 - 2,3}{(1,8 - 0,5) \cdot 10^{-3}} = -6,2 \cdot 10^3.$$

Подставив в (2) это значение $\operatorname{tg} \alpha$ и постоянную Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ и учитывая наименование величин, отложенных по осям графика, найдем ответ:

$$\Delta W = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 1,1 \text{ эВ.}$$

14-4. Определить коэффициент диссоциации водного раствора хлористого калия (KCl) с концентрацией $c = 0,10 \text{ г/см}^3$. Удельное сопротивление такого раствора $\rho = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ при 18°C , а подвижности ионов K^+ и Cl^- при этой температуре соответственно равны: $u_+ = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, $u_- = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Решение. Для определения коэффициента диссоциации электролита воспользуемся формулой (14.7), в которую входит эта величина. При этом учтем, что $\rho = 1/\sigma$, где σ — удельная электропроводность, и что ионы K^+ и Cl^- одновалентны, следовательно, заряд каждого из них численно равен заряду электрона e . Теперь, чтобы из формулы (14.7) можно было найти величину α , остается определить концентрацию молекул n_0 , выразив ее через данную концентрацию раствора c . Так как концентрация молекул есть число молекул в единице объема, т. е.

$$n_0 = N/V,$$

а концентрация раствора измеряется массой растворенного вещества в единице объема раствора:

$$c = m/V,$$

то из двух последних равенств имеем

$$n_0 = cN/m. \quad (1)$$

Учтем, что величина N связана с постоянной Авогадро N_A и числом молей растворенного вещества v так:

$$N = N_A v = N_A (m/\mu).$$

Подставим это значение N в формулу (1):

$$n_0 = cN_A/\mu. \quad (2)$$

Теперь перепишем (14.5), учитывая соотношение (2), а также соображения, изложенные выше:

$$\frac{1}{\rho} = e\alpha \frac{cN_A}{\mu} (u_+ + u_-).$$

Отсюда найдем коэффициент диссоциации электролита:

$$\alpha = \mu/pec (u_+ + u_-) N_A. \quad (3)$$

Взяв из таблицы значение молярной массы для хлористого калия ($\mu = 0,074$ кг/моль), подставим в (3) числовые значения входящих в нее величин, выраженные в единицах СИ. Произведя вычисления по (3), получим

$$\alpha = 0,8.$$

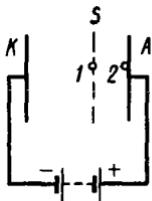


Рис. 14-2

14-5. По цепи, схема которой изображена на рис. 14-2, идет постоянный ток вследствие ионизации рентгеновскими лучами воздуха между пластинами конденсатора. Считая, что в каждой единице объема воздуха ежесекундно возникает одинаковое число пар ионов, определить, какую часть полного тока составляет ток, обусловленный движением отрицательных ионов через сечение S , отстоящее от анода на расстоянии вдвое меньшем, чем от катода. Рассмотрим два случая, соответствующие току, далекому от насыщения, и току насыщения.

Решение. Если пренебречь искажением поля у краев конденсатора, то можно считать площадь S поперечного сечения газоразрядного промежутка одинаковой по всей его длине. Поэтому между силами токов, связанных с движением положительных и отрицательных ионов, будет то же соотношение, что и между плотностями этих токов.

1. Если ток в газе далек от насыщения, его плотность определяется соотношением (14.4), которое перепишем в виде

$$j = qnu_+ E + qnu_- E,$$

где $j_+ = qnu_+ E$ и $j_- = qnu_- E$ — плотности токов соответственно положительных и отрицательных ионов. Отсюда находим искомое отношение токов:

$$\frac{j_-}{j} = \frac{j_-}{j_+ + j_-} = \frac{qnu_- E}{qn(u_+ + u_-)E} = \frac{u_-}{u_+ + u_-}.$$

Взяв из справочных таблиц значения подвижностей положительных и отрицательных ионов, произведем вычисление:

$$\frac{j_-}{j} = \frac{1.4}{1.4 + 1.9} = 0,6$$

Заметим, что в данном случае полученный результат не зависит от того, где находится сечение S .

2. Как видно из соотношения (14.5), плотность тока насыщения в газе пропорциональна длине l газоразрядного промежутка. Это связано с возрастанием плотности тока отрицательных ионов на пути от катода K к аноду A и с увеличением плотности тока положительных ионов на пути от анода к катоду. При этом плотность каждого тока возрастает

пропорционально расстоянию рассматриваемой точки от начального электрода (рис. 14-3). Следовательно, между плотностями тока отрицательных ионов $j_{-}^{(1)}$, $j_{-}^{(2)}$ в точках 1 и 2 (см. рис. 14-2), расстояния от которых до катода по условию относятся как 2 : 3, должно быть соотношение

$$j_{-}^{(1)} : j_{-}^{(2)} = 2 : 3 \quad (1)$$

Но, поскольку вблизи анода (в точке 2) плотность тока положительных ионов $j_{+}^{(2)}$ равна нулю, здесь выполняется равенство

$$j = j_{+}^{(2)} + j_{-}^{(2)} = j_{-}^{(2)}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\frac{j_{-}^{(1)}}{I} = \frac{j_{-}^{(1)}}{j} = \frac{j_{-}^{(1)}}{j_{-}^{(2)}} = \frac{2}{3}.$$

14-6. В условиях предыдущей задачи получен ток насыщения плотностью $j_a = 2,5 \text{ мкА}$ при расстоянии между пластинами $l = 0,50 \text{ м}$. Определить концентрацию ионов, которая установится в воздухе, если конденсатор отсоединить от источника. Коэффициент рекомбинации для воздуха $r = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Возникающие ионы считать одновалентными.

Решение. Если отключить источник, ток между пластинами конденсатора прекратится. Теперь ионы, создаваемые ионизатором, не будут нейтрализовываться на электродах, а будут рекомбинировать по всему объему газа. Следовательно, должно установиться равновесие между числом пар ионов Δn , ежесекундно образуемых ионизатором в единице объема газа, и числом пар ионов $\Delta n'$, ежесекундно рекомбинирующихся в единице объема газа:

$$\Delta n' = \Delta n. \quad (1)$$

Независимо от того, есть ли ток в газоразрядном промежутке, концентрация n ионов всегда связана с числом Δn и коэффициентом рекомбинации r формулой (14.6). Отсюда с учетом соотношения (1) имеем

$$n = \sqrt{\Delta n'/r} = \sqrt{\Delta n/r}. \quad (2)$$

Теперь остается найти величину Δn . Поскольку эта величина определяется лишь действием ионизатора, она не изменится после исчезновения тока. Поэтому с помощью формулы (14.5) для плотности тока насыщения находим

$$\Delta n = \frac{I_n}{ql} = \frac{j_a}{rl},$$

где e — заряд одновалентного иона, численно равный заряду электрона. Подставив это значение Δn в формулу (2), получим ответ:

$$n = \sqrt{j_a/er} = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

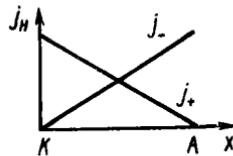


Рис. 14-3